Nadine Große, Jonah Reuß
SS24

Übungsblatt 6

Übungsaufgabe 16. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_\ell(P)(x,\xi)z = \frac{\mathrm{i}^\ell}{\ell!}P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ sowie $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist und berechnen Sie das Hauptsymbol der äußeren Ableitung $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

Übungsaufgabe 17. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Wir betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um p. Sei $e_i = \partial_{x^i}|_p$ und θ^i die zugehörige duale Basis. Berechnen Sie mit Hilfe der letzten Aufgabe, dass in p

$$\Delta = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \theta^i \wedge \iota_{e_j} R(e_i, e_j)$$

für den Hodge-Laplace auf k-Formen gilt.

Hinweis. Rechnen Sie nach und benutzen Sie $\iota_{e_j}\nabla_{e_i} = \nabla_{e_i}\iota_{e_j}$.

(ii) Folgern Sie, dass für einen beliebigen Orthonormalrahmen e_i um p

$$\Delta = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} - \theta^i \wedge \iota_{e_j} R(e_i, e_j)$$

gilt.