Übungsblatt 7+8

Übungsaufgabe 17-20. Dieses Übungsblatt ist etwas anders als normal. Das Ziel ist folgenden Satz, den wir am Ende dieses Übungsblatt gezeigt haben werden:

Satz. [*] Sei M eine zweidimensionalen orientierte geschlossene[†] Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik $\chi(M) = 0$[‡]. Sei $K \in C^\infty(M)$. Es gibt eine Riemannsche Metrik g auf M mit Gaußkrümmung[§] K genau dann, wenn K das Vorzeichen wechselt oder $K \equiv 0$ gilt.

Der Beweis dieses Satzes ist in Einzelschritte unterteilt. Für jede Teilaufgabe kann man jeweils alle Schritte darüber verwenden.

Ohne Beweis werden wir folgende Abschätzungen verwenden: Für jede <u>zwei</u>-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|u\|_{L^p} \leq c\sqrt{p}\|u\|_{H^1} \quad (1)$$

[¶]

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq c\|du\|_{L^2} \quad (2)$$

[‖]

für alle $u \in H^1(M)$, wobei $\bar{u} := \frac{\int_M u \mathrm{dvol}_g}{\int_M \mathrm{dvol}_g}$ ist.

Sei von nun an (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) = 0$. Die Idee ist es die gesuchte Metrik mit Gaußkrümmung K als einer zu g konform diffeomorphen Metrik zu erhalten, d.h. wir hoffen einen geeigneten Diffeomorphismus $\phi\colon M \to M$ und eine glatte Funktion $u \in C^\infty(M)$ zu finden, so dass $\phi^*\hat{g} = e^{2u}g$ die gesuchte Gaußkrümmung hat.

Man kann nachrechnen, dass für die Gaußkrümmungen K_g bzw. $K_{\hat{g}}$ von g bzw. $\hat{g}$

$$K_{\hat{g}} \circ \phi = e^{-2u}(K_g - \Delta_g u) \quad (3)$$

gilt. Aus $\chi(M) = 0$ und Gauß-Bonnet folgt, dass die Gaußkrümmung einer Metrik g auf M entweder konstant Null sein muss oder das Vorzeichen wechseln muss.

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_g v = K_g$ eine glatte Lösung besitzt, und es damit eine zu g konforme Metrik mit Gaußkrümmung konstant Null gibt. Von nun an können wir also $K \not\equiv 0$ voraussetzen.

(ii) Sei $w := 2(u - v)$. Zeigen Sie, dass u genau dann eine glatte Lösung von (3) mit $K = K_{\hat{g}}$ ist, wenn w eine glatte Lösung von $\Delta_g w = (K \circ \phi)e^{2v}e^w$ ist.

Das heißt, es ist sinnvoll zu untersuchen, wann die Gleichung

$$\Delta u = he^u \quad (4)$$

mit $h \in C^\infty(M)$, $h \not\equiv 0$, eine glatte Lösung besitzt.

---

[*] Thm. 6.2. in J.L.Kazdan und F.W. Warner, *Curvature Functions for Compact 2-Manifolds*, Ann.Math. 99(1), pp. 14-47, 1974.

[†] geschlossen = kompakt und ohne Rand

[‡] $\chi(M) = 2 - 2\cdot$Anzahl der Löcher. Es gilt der Satz von Gauß-Bonnet: $\int_M K_g \mathrm{dvol}_g = 2\pi\chi(M)$.

[§] Gaußkrümmung= 1/2 Skalarkrümmung

[¶] (3.1) im Kazdan-Warner Artikel von oben

[‖] Das ist eine Form der Poincaré-Ungleichung. Sie gilt für geschlossene Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen, vgl. Satz 2.4.21.

(iii) Sei $u \in C^2(M)$ eine Lösung von (4). Zeigen Sie, dass dann $\int_M he^u \mathrm{dvol}_g = 0$ und $\int_M h\mathrm{dvol}_g < 0$ gelten und damit h das Vorzeichen wechseln muss.

Wir werden unsere Gleichung als kritischen Punkt eines geeigneten Funktionals schreiben. Dazu sei nun

$$J\colon C^\infty(M) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (v, \lambda, \mu) \mapsto \int_M (|dv|^2 + \lambda he^v + \mu v)\mathrm{dvol}_g.$$

Ein (v, λ, μ) heißt *kritischer Punkt* von J,* falls für $i = 1, 2, 3$ und alle $\hat{v} \in C^\infty(M)$, $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\epsilon_i}|_{\epsilon_i} J(v + \epsilon_1 \hat{v}, \lambda + \epsilon_2 \hat{\lambda}, \mu + \epsilon_3 \hat{\mu}) = 0.$$

(iv) Zeigen Sie, ist (v, λ, μ) ein kritischer Punkt von J, dann gilt $\int_M he^v \mathrm{dvol}_g = 0$, $\int_M v\mathrm{dvol}_g = 0$ und v ist eine schwache Lösung von $2\Delta v = -\lambda e^v - \mu$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, dass J auch für $v \in H^1(M)$ wohldefiniert ist. Zeigen Sie dazu:

(v) Ist $v \in H^1(M)$, dann ist $v \in L^1(M)$.

(vi) Ist $v \in H^1(M)$, dann ist $e^v \in L^p(M)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und damit $he^v \in L^1(M)$.

Hinweis:

Daraus folgt, dass $J(v, \lambda, \mu)$ auch für $v \in H^1$ wohldefiniert ist (die Aussagen aus (iv) gelten dann analog mit gleichem Beweis). Nehmen wir nun an, dass $(v \in H^1, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ ein kritischer Punkt von J ist.

(vii) Zeigen Sie, dass dann $\mu = 0$ und $\lambda < 0$ sein muss und $u{:=}v + \ln(-2\lambda^{-1})$ eine schwache Lösung von $\Delta u = he^u$ ist.

Mit Taylorentwicklung kann man ähnlich wie in (vi) auch zeigen, dass aus $u \in H^k(M)$ folgt, dass $e^u \in H^k(M)$ und $he^u \in H^k(M)$ ist (Machen wir hier nicht).

(viii) Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty(M)$ ist.

Es bleibt also einen kritischen Punkt $(v \in H^1, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ zu finden. Dazu sei

$$F := \left\{ v \in H^1(M) \;\middle|\; \int_M he^v \mathrm{dvol}_g = 0, \int_M v\mathrm{dvol}_g = 0 \right\} \text{ und } \hat{J}\colon F \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto \int_M |dw|^2 \mathrm{dvol}_g.$$

(ix) Zeigen Sie, dass $F \cap C^\infty(M)$ nichtleer ist, wenn h die Bedingung $\int_M h\mathrm{dvol}_g < 0$ erfüllt und h das Vorzeichen wechselt.

Sei $v_i \in C^\infty(M) \cap F$ eine Folge mit $\lim_{i\to\infty} \hat{J}(v_i) = \inf\{\hat{J}(w) \mid w \in F\}$.

(x) Zeigen Sie, dass dann v_i in $H^1(M)$ beschränkt ist und eine Teilfolge, im Folgenden auch mit v_i benannt, schwach in $H^1(M)$ und stark in $L^4(M)$ gegen ein v konvergiert.

(xi*) Zeigen Sie, dass $e^{v_i} \to e^v$ in L^2 konvergiert.

Hinweis:

(xii) Zeigen Sie, dass $\hat{J}(v) = \inf\{\hat{J}(w) \mid w \in F\}$ gilt.

Das v ist also ein Minimum von $\hat{J}$ und ist damit insbesondere $(v, -2e^{-v}\Delta v, 0)$ ein kritischer Punkt von J.†

Insgesamt haben wir also für jedes $h \in C^\infty(M)$ mit $\int_M h\mathrm{dvol}_g$ und h wechselt das Vorzeichen eine glatte Lösung u von $\Delta u = he^u$. Bei uns soll $h = (K \circ \phi)e^{2v}$ sein. Es bleibt also nur:

(xiii* - 2*) Zeigen Sie, dass es für alle Riemannschen Metriken $\hat{g}$ auf M einen Diffeomorphismus $\phi\colon M \to M$ gibt, so dass $\int_M K \circ \phi \mathrm{dvol}_{\hat{g}} < 0$ gilt.

*Das ist ähnlich wie Extrema für Funktionen in mehreren Variablen bestimmen.

†v könnte a priori noch ein kritischer Punkt von $G\colon v \mapsto (\int_M he^v \mathrm{dvol}_g, \int_M v\mathrm{dvol}_g)$ sein. Man sieht aber schnell, dass G keine kritischen Punkte besitzt.