Übungsblatt 9

Übungsaufgabe 21. (i) Sei P ein Differentialoperator auf einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit derart, dass eine L^2-Basis von orthonormierten Eigenschnitten zu nichtnegativen Eigenwerten gibt. Zeigen Sie, dass $\|e^{-tP}s\|_{L^2} \leq \|s\|_{L^2}$ für alle $s \in \Gamma(E)$ gilt.

(ii) Sei P wie in (i). Sei P zusätzlich noch Laplace-artig und sei $k_t \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$, $t > 0$, der zugehörige Wärmeleitungskern. Zeigen Sie, dass

$$K_t \colon L^2(E) \to L^2(E); s \mapsto \int_M k_t(x,y)s(y)dy$$

ein beschränkter Operator ist.

(iii) Sei $A \colon L^2(E) \to L^2(E)$ ein beschränkter Operator mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren e_i zu Eigenwerten λ_i und Kern $k \in C(E \boxtimes E^*)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}A = \sum_i \lambda_i = \int_M k(x,x)\mathrm{dvol}_g$ ist. Hierbei wird $k(x,x)$ mittels der Abbildung $E_x \otimes E_x^* \to \mathbb{C}$, $(e,f) \mapsto f(e)$, als komplexwertige stetige Abbildung auf M aufgefasst.

Übungsaufgabe 22. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, d.h. $\Delta\alpha = 0$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta|\alpha|_g^2 = 2|\nabla\alpha|_g^2 + 2\mathrm{Ric}(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp)$$

gilt.

(ii) Folgern Sie, dass auf jeder geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Riccikrümmung, die harmonischen 1-Form genau die parallelen Einsformen sind (d.h. $\nabla\alpha \equiv 0$). Ist weiterhin die Riccikrümmung sogar positiv, gibt es gar keine harmonischen 1-Formen.*

*Das ist dann ein Beispiel für einen Laplace-artigen Operator, der 0 nicht als Eigenwert hat.