
Übungsblatt 10

Übungsaufgabe 23. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E . Sei $v \in T_x M$, $\pi(e) = x$. Wir definieren $v^* \in T_e E$ als $\tilde{\gamma}'(0) \in T_e E$, wobei $\tilde{\gamma}$ der horizontale Lift einer Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma_x(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$ mit $\tilde{\gamma}(0) = e$ ist.

- (i) Zeigen Sie, dass $TM \rightarrow TE$, $v \in T_{\pi(e)}M \mapsto v^* \in T_e E$, wohldefiniert ist und dass $X^*: e \in E \mapsto (X(\pi(e)))^*$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld auf E definiert.
- (ii) Zeigen Sie, dass $d_e \pi(X^*(e)) = X(\pi(e))$ und $T_e E_{\pi(e)} = \ker d_e \pi$ gilt.

Übungsaufgabe 24. Sei H eine Lieuntergruppe der Liegruppe G . Sei $\Psi: G \times G/H \rightarrow G/H$, $(g', gH) \mapsto \Psi_{g'}(gH) := g'gH$. Sei $\rho: H \rightarrow \text{Gl}(T_H(G/H))$ die Isotropiedarstellung von H ist, d.h. $\rho(h) := d_H \Psi_h$.

- (i) Sei Ψ eine effektive Wirkung, d.h. aus $\Psi_g = \text{id}$ folgt $g = 1$. Zeigen Sie, dass dann das Tangentialbündel $T(G/H) \rightarrow G/H$ isomorph zum assoziierten Faserbündel $G \times_{\rho} T_H(G/H) \rightarrow G/H$ ist.
- (ii) Sei $\bar{H} := \{g \in G \mid \Psi_g = \text{id}_M\}$. Dann ist \bar{H} der größte Normalteiler von G , der in H enthalten ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass die induzierte Wirkung von $\hat{G} = G/\bar{H}$ auf $M = G/H$ effektiv ist und dass $M = \hat{G}/\hat{H}$ für $\hat{H} = H/\bar{H}$ gilt.