Übungsblatt 1

Übungsaufgabe 1. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F. Für $x \in M$ definieren wir $E_x := \pi^{-1}(x)$.

(i) Ist E_x eine Untermannigfaltigkeit von E?*

(ii) Ist $T\nu E := \sqcup_{e\in E} T_e(E_{\pi(e)}) \to M$, $v \in T_e(E_{\pi(e)}) \mapsto \pi(e) \in M$, ein Faserbündel?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Übungsaufgabe 2. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und seien $\mu_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F/\sim \xrightarrow{\pi} M,\ [(x,v)] \mapsto x,$$

wobei $(x,v) \in U_\alpha \times F \sim (y,w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\beta\alpha}(x)v = w$ ist, sowie $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, $[(x,v) \in U_\alpha \times F] \mapsto (x,v)$. Zeigen Sie, dass E ein Faserbündel definiert.

Übungsaufgabe 3. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang r über $\mathbb{K}$ mit gegebener Trivialisierung $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$. Wir betrachten die Übergangsfunktionen $\mu_{\beta\alpha}(x)(v) := \mathrm{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x,v)$ mit $\mu_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(\mathbb{K}^r)$. Da $\pi\colon E \to M$ aber nicht nur ein Faserbündel sondern ein Vektorbündel ist, ist der Bildbereich von $\mu_{\alpha\beta}$ in Wirklichkeit viel kleiner. Finden Sie (mit Beweis) $B \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{K}^r)$ derart, dass die Übergangsfunktionen eines jeden Vektorbündels vom Rang r über $\mathbb{K}$ dahin abbilden und das gilt:

Seien $\mu_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to B$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie (hier jetzt immer Isomorphie von Vektorbündeln)) ein eindeutiges Vektorbündel über $\mathbb{K}$, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

*Eine Teilmenge $N \subset M$ einer Mannigfaltigkeit ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $\kappa\colon U \subset M \to \mathbb{R}^m$ mit $\kappa(U \cap N) = \mathbb{R}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^{m-n}\}$ gibt. Äquivalente Definition: Um jeden Punkt $p \in N$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ und eine glatte Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^{m-n}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = N \cap U$ ist. (Die Äquivalenz zeigt man ganz analog zum Fall von Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum, vgl. DiffgeoI, Satz I.1.4.)

Übungsblatt 2

Übungsaufgabe 4.

(i) Zeigen Sie, dass TS^1 das triviale Faserbündel über S^1 mit Fasertyp $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Sei ϵ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus \epsilon$ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(iii) Sei $\pi\colon E \to S^1$ das Möbiusband und $f\colon z \in S^1 \subset \mathbb{C} \mapsto z^k \in S^1$. Zeigen Sie, dass f^*E genau dann trivial ist, wenn k gerade ist.

Übungsaufgabe 5. Sei $E \to M \times [0,1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F. Zeigen Sie, dass es eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von M gibt, so dass alle Einschränkungen $E|_{U_i\times[0,1]}$ trivial sind.*

Übungsaufgabe 6. Sei $E \to M \times [0,1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F über M ohne Rand. Sei U_i wie in Aufgabe 5(ii) und ϕ_i eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze $\psi_i = \sum_{j\le i} \phi_j$. Sei $E_i{:=}E|_{\Gamma_i}$ mit $\Gamma_i{:=}\{(x,\psi_i(x)) \mid x \in M\} \subset M \times [0,1]$.

(i) Skizzieren Sie für das Beispiel $M = [0,1]$†, $U_1 = [0,2/3)$, $U_2 = (1/3,1]$ eine Wahl einer untergeordneten Zerlegung der Eins und die resultierenden Mengen Γ_i.

(ii) Konstruieren Sie einen Faserbündelisomorphismus $h_i\colon E_i \to E_{i-1}$ über $(x,\psi_i(x)) \in \Gamma_i \to (x,\psi_{i-1}(x)) \in \Gamma_{i-1}$.

Hinweis:

(iii) Konstruieren Sie aus obigen h_i einen Bündelisomorphismus von $E|_{M\times\{0\}}$ und $E|_{M\times\{1\}}$.

*Unsere Mannigfaltigkeiten haben immer eine abzählbare Basis. Daraus folgt insbesondere, dass sie Lindelöf-Räume sind, d.h. dass jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

†Hier ist M zwar mit Rand, aber dadurch zeichnet es sich leichter.

Übungsblatt 3

Übungsaufgabe 7. (i) Sei $\pi\colon E \to M$ ein Geradenbündel (=Vektorbündel vom Rang 1). Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}(E) \to M$ ein triviales Bündel ist.

(ii) Es gilt $\mathrm{Hom}(E, E' \oplus E'') \cong \mathrm{Hom}(E, E') \oplus \mathrm{Hom}(E, E'')$ für Vektorbündel E, E', E'' über M.

(iii) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon \cong \underbrace{\tau \oplus \ldots \oplus \tau}_{(n+1)\text{-mal}}$ gilt, wobei ϵ das triviale Bündel und τ das tautologische Geradenbündel über $\mathbb{R}P^n$ ist.

Übungsaufgabe 8 (Konstruktion von Vektorbündeln über Sphären)**.** Seien $U_\pm$ offene zusammenziehbare Mengen, die S^m überdecken und $U_+ \cap U_- = S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \subset S^m$.
Sei eine glatte Funktion $\mu_{+-}\colon S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ gegeben.

(i) Definiert μ_{+-} ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel $\pi\colon E \to S^m$? Wie und warum?

Weiterhin liefert jede glatte Abbildung $f\colon S^{m-1} \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ mit $\mu_{+-}(x,t) := f(x)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Nach der Vektorbündelversion von Folgerung 1.2.8 führen homotope $f\colon S^{m-1} \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ zu isomorphen $\mathbb{K}$-Vektorbündeln. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi\colon [S^{m-1}, \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})]^* \to \mathrm{Vect}^r_{\mathbb{K}}(S^m)^\dagger.$$

Solche Funktionen f werden Clutching-Funktionen genannt.

(ii) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist, d.h. sie müssen zeigen, dass ein beliebiges μ_{+-} zu einem aus einer Abbildung $f\colon S^m \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ wie oben entstandenen μ_{+-} (glatt) homotop ist.

(iii) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist Φ eine Bijektion.

Hinweis:

(iv) Stimmt (iii) auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

$^*[X, Y]$ bezeichnet die Menge der (glatten) Homotopieklassen von Funktionen $X \to Y$
$^\dagger\mathrm{Vect}^r_{\mathbb{K}}(S^m)$ ist die Menge der Vektorbündel über S^m mit Faser $\mathbb{K}^r$.

Übungsaufgabe 9. Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\pi\colon E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang r mit M kompakt.

(i) Zeigen Sie, dass es eine glatte Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ für ein $r \leq m < \infty$, so dass es für alle $x \in M$ die Einschränkung $g|_{E_x}$ injektiv und linear ist.

Hinweis:

Sei $G_r(\mathbb{K}^m) = \{r\text{-dimensionale Untervektorräume von } \mathbb{K}^m\}$ eine Grassmann-Mannigfaltigkeit.*
Dann ist $G_1(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}P^{m-1}$, für welches wir in Beispiel 1.2(iii) das tautologische Geradenbündel τ kennengelernt haben. Analog kann man das tautologische Bündel über $G_r(\mathbb{K}^m)$ definieren:

$$\gamma_r^m := \{(\ell, v) \in G_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \mid v \in \ell\} \to G_r(\mathbb{K}^m), \quad (\ell, v) \mapsto \ell.$$

Das ist ein Vektorbündel vom Rang r - insbesondere ein Unterbündel von trivialen Faserbündel $G_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \to G_r(\mathbb{K}^m)$. Weiterhin ist $q\colon (\ell, v) \in \gamma_r^m \mapsto v \in \mathbb{K}^m$ ein g wie aus (i).

(ii) Zeigen Sie: Gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist, dann ist qu ein g wie aus (i). Ist andersherum ein $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ wie in (i) gegeben, dann gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist und für den $g = qu$ gilt.

(iiii) Folgern Sie, dass es für jedes $\mathbb{K}$-Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ vom Rang r ein m groß genug und eine glatte Abbildung $f\colon M \to G_r(\mathbb{K}^m)$ gibt, so dass $f^*\gamma_r^m \cong E$ gilt.

Zu (iii) - Warum ist das toll? Das ist ein wichtiges Resultat in der Differentialtopologie zur Klassifikation von Vektorbündeln. Es sagt, dass jedes Vektorbündel als Pullback von diesen tautologischen Vektorbündeln mit geeignetem m aufgefasst werden kann. Man kann sich überlegen, dass man Einbettungen $G_r(\mathbb{K}^m) \hookrightarrow G_r(\mathbb{K}^{m+1}) \hookrightarrow G_r(\mathbb{K}^{m+2}) \hookrightarrow \ldots$ hat und $\gamma_r^{m+1}|_{G_r(\mathbb{K}^m)} \cong \gamma_r^m$ gilt. Damit kann man den direkten Limes der Grassmannschen $G_r(\mathbb{K}^m)$ und der Bündel γ_r^m für $m \to \infty$ bilden und erhält ein universelles Bündel $\gamma_r^\infty \to G_r(\mathbb{K}^\infty)$. Das ist nicht mehr ein Vektorbündel in unserem Sinne, da die Räume keine Mannigfaltigkeiten mehr sind, aber ansonsten verhält es sich ähnlich. Es heißt universell, weil nun (durch 'Weglassen' der Dimensionseinschränkung) jedes Vektorbündel als Pullback dieses universellen Bündels dargestellt werden kann.

*Man kann $G_r(\mathbb{K}^m)$ auch als Teilmenge von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ verstehen, nämlich $G_r(\mathbb{K}^m) = \{P \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \mid P^2 = P, P^T = P, \mathrm{Spur}(P) = k\}(= \{P \text{ ist Orthogonalprojektion auf einen } k \text{ dimensionalen Untervektorraum}\})$. Dann ist $G_r(\mathbb{K}^m)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ der Dimension $r(m - r)$.

Übungsblatt 4

Übungsaufgabe 10. Zeigen Sie, dass es für jeden skalare Differentialoperator $P\colon C^\infty(M,\mathbb{R})$ erster Ordnung ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gibt, so dass $Pu = X(u) + fu$ für alle $u \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt.

Übungsaufgabe 11. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit metrischem Zusammenhang ∇^E (bzgl. einer Bündelmetrik h^E). Auf E^* erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*}\omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(i) Zeigen Sie, dass ∇^{E^*} bzgl. der Bündelmetrik h^{E^*} aus Lemma 1.2.27 metrisch ist.

(ii) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, $E = TM$ und ∇^E der Levi-Civita-Zusammenhang auf (M,g). Berechnen Sie die lokale Darstellung von ∇^{E^*}.

Übungsaufgabe 12. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit affinem Zusammenhang ∇^E. Auf $\Lambda^k E^*$ erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*}\omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \quad \text{und}$$
$$\nabla_X^{\Lambda^{k+\ell}E^*}(\alpha \wedge \beta) = \left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*}\alpha\right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*}\beta\right)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*}\alpha\right)(s_1,\ldots,s_k) = X(\alpha(s_1,\ldots,s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1,\ldots,s_{j-1},\nabla_X^E s_j, s_{j+1},\ldots,s_k)$$

für alle $s_i \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

Übungsblatt 5

Übungsaufgabe 13 (1/2+1+1/2+1+2)**.** Sei (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren den Hodge-Stern $*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$ durch $\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta)\mathrm{dvol}_g$.

(i) Warum ist $*$ wohldefiniert?

(ii) Sei e_i^* eine positiv orientierte* Orthonormalbasis von T_x^*M. Berechnen Sie $*(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_k^*)$ for $1 \le k \le m$.

(iii) Zeigen Sie, dass $** \alpha = (-1)^{k(m-k)}\alpha$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ gilt.

(iv) Zeigen Sie, dass $g(\alpha, \beta) = g(*\alpha, *\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ gilt.

(v) Zeigen Sie, dass $\delta = (-1)^{km-1} * d*$ gilt. (Benutzen Sie, dass $\int_M d\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Omega_c^{m+1}(M) := \Gamma_c(\Lambda^{m+1}M)$ gilt (Satz von Stokes))

Übungsaufgabe 14. (1+1+3) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei e_i ein lokaler orthonormaler Rahmen von TM über $U \subset M$. Sei θ^i der zugehörige duale Rahmen, d.h. $\theta^i \in \Omega^1(U)$ und $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$. Ziel dieser Aufgabe ist es nachzurechnen, dass auf U gilt

$$d = \theta^i \wedge \nabla_{e_i} \tag{1}$$

$$\delta = -\iota_{e_i}\nabla_{e_i}, \tag{2}$$

wobei $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, $\alpha \mapsto \alpha(X, \ldots)$, für ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ das innere Produkt ist.

(i) Zeigen Sie, dass die beiden Formeln unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis ist.

Nach (i) können wir die Formeln auch für eine spezielle Orthonormalbasis in jedem Punkt $p \in U$ extra nachrechnen. Dazu wählen wir geodätische Normalkoordinaten x^i um $p \in U$ mit $\partial_i|_p = e_i(p)$, vgl. DGI Def. II.7.4 und darunter.

(ii) Zeigen Sie, dass dann $\nabla_{e_i}\theta^j(p) = 0$ gilt.

(iiii) Rechnen Sie die obigen Formeln für d und δ nach.

*d.h. $\mathrm{dvol}_g = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_m^*$, vgl. DGI Lemma II.10.26

Übungsblatt 6

Übungsaufgabe 15. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_\ell(P)(x,\xi)z = \frac{\mathrm{i}^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ sowie $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist und berechnen Sie das Hauptsymbol der äußeren Ableitung $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

Übungsaufgabe 16. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Wir betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um p. Sei $e_i = \partial_{x^i}|_p$ und θ^i die zugehörige duale Basis. Berechnen Sie mit Hilfe der letzten Aufgabe, dass in p

$$\Delta = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \theta^i \wedge \iota_{e_j} R(e_i, e_j)$$

für den Hodge-Laplace auf k-Formen gilt.

Hinweis.

(ii) Folgern Sie, dass für einen beliebigen Orthonormalrahmen e_i um p

$$\Delta = -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \sum_i \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} - \theta^i \wedge \iota_{e_j} R(e_i, e_j)$$

gilt.

Übungsblatt 7+8

Übungsaufgabe 17-20. Dieses Übungsblatt ist etwas anders als normal. Das Ziel ist folgenden Satz, den wir am Ende dieses Übungsblatt gezeigt haben werden:

Satz. [*] Sei M eine zweidimensionalen orientierte geschlossene[†] Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik $\chi(M) = 0$[‡]. Sei $K \in C^\infty(M)$. Es gibt eine Riemannsche Metrik g auf M mit Gaußkrümmung[§] K genau dann, wenn K das Vorzeichen wechselt oder $K \equiv 0$ gilt.

Der Beweis dieses Satzes ist in Einzelschritte unterteilt. Für jede Teilaufgabe kann man jeweils alle Schritte darüber verwenden.

Ohne Beweis werden wir folgende Abschätzungen verwenden: Für jede zwei-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|u\|_{L^p} \leq c\sqrt{p}\|u\|_{H^1} \text{[¶]} \tag{3}$$

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq c\|du\|_{L^2} \text{[‖]} \tag{4}$$

für alle $u \in H^1(M)$, wobei $\bar{u} := \frac{\int_M u \mathrm{dvol}_g}{\int_M \mathrm{dvol}_g}$ ist.

Sei von nun an (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) = 0$. Die Idee ist es die gesuchte Metrik mit Gaußkrümmung K als einer zu g konform diffeomorphen Metrik zu erhalten, d.h. wir hoffen einen geeigneten Diffeomorphismus $\phi\colon M \to M$ und eine glatte Funktion $u \in C^\infty(M)$ zu finden, so dass $\phi^*\hat{g} = e^{2u}g$ die gesuchte Gaußkrümmung hat.

Man kann nachrechnen, dass für die Gaußkrümmungen K_g bzw. $K_{\hat{g}}$ von g bzw. $\hat{g}$

$$K_{\hat{g}} \circ \phi = e^{-2u}(K_g - \Delta_g u) \tag{5}$$

gilt. Aus $\chi(M) = 0$ und Gauß-Bonnet folgt, dass die Gaußkrümmung einer Metrik g auf M entweder konstant Null sein muss oder das Vorzeichen wechseln muss.

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_g v = K_g$ eine glatte Lösung besitzt, und es damit eine zu g konforme Metrik mit Gaußkrümmung konstant Null gibt. Von nun an können wir also $K \not\equiv 0$ voraussetzen.

(ii) Sei $w := 2(u - v)$. Zeigen Sie, dass u genau dann eine glatte Lösung von (5) mit $K = K_{\hat{g}}$ ist, wenn w eine glatte Lösung von $\Delta_g w = (K \circ \phi)e^{2v}e^w$ ist.

Das heißt, es ist sinnvoll zu untersuchen, wann die Gleichung

$$\Delta u = he^u \tag{6}$$

mit $h \in C^\infty(M)$, $h \not\equiv 0$, eine glatte Lösung besitzt.

[*] Thm. 6.2. in J.L.Kazdan und F.W. Warner, Curvature Functions for Compact 2-Manifolds, Ann.Math. 99(1), pp. 14-47, 1974.

[†] geschlossen = kompakt und ohne Rand

[‡] $\chi(M) = 2 - 2\cdot$Anzahl der Löcher. Es gilt der Satz von Gauß-Bonnet: $\int_M K_g \mathrm{dvol}_g = 2\pi\chi(M)$.

[§] Gaußkrümmung= 1/2 Skalarkrümmung

[¶] (3.1) im Kazdan-Warner Artikel von oben

[‖] Das ist eine Form der Poincaré-Ungleichung. Sie gilt für geschlossene Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen, vgl. Satz 2.4.21.

(iii) Sei $u \in C^2(M)$ eine Lösung von (6). Zeigen Sie, dass dann $\int_M he^u \mathrm{dvol}_g = 0$ und $\int_M h\mathrm{dvol}_g < 0$ gelten und damit h das Vorzeichen wechseln muss.

Wir werden unsere Gleichung als kritischen Punkt eines geeigneten Funktionals schreiben. Dazu sei nun

$$J\colon C^\infty(M) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (v, \lambda, \mu) \mapsto \int_M (|dv|^2 + \lambda he^v + \mu v)\mathrm{dvol}_g.$$

Ein (v, λ, μ) heißt kritischer Punkt von J,* falls für $i = 1, 2, 3$ und alle $\hat{v} \in C^\infty(M)$, $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\epsilon_i}|_{\epsilon_i} J(v + \epsilon_1 \hat{v}, \lambda + \epsilon_2 \hat{\lambda}, \mu + \epsilon_3 \hat{\mu}) = 0.$$

(iv) Zeigen Sie, ist (v, λ, μ) ein kritischer Punkt von J, dann gilt $\int_M he^v \mathrm{dvol}_g = 0$, $\int_M v\mathrm{dvol}_g = 0$ und v ist eine schwache Lösung von $2\Delta v = -\lambda e^v - \mu$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, dass J auch für $v \in H^1(M)$ wohldefiniert ist. Zeigen Sie dazu:

(v) Ist $v \in H^1(M)$, dann ist $v \in L^1(M)$.

(vi) Ist $v \in H^1(M)$, dann ist $e^v \in L^p(M)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und damit $he^v \in L^1(M)$.
Hinweis:

Daraus folgt, dass $J(v, \lambda, \mu)$ auch für $v \in H^1$ wohldefiniert ist (die Aussagen aus (iv) gelten dann analog mit gleichem Beweis). Nehmen wir nun an, dass $(v \in H^1, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ ein kritischer Punkt von J ist.

(vii) Zeigen Sie, dass dann $\mu = 0$ und $\lambda < 0$ sein muss und $u{:=}v + \ln(-2\lambda^{-1})$ eine schwache Lösung von $\Delta u = he^u$ ist.

Mit Taylorentwicklung kann man ähnlich wie in (vi) auch zeigen, dass aus $u \in H^k(M)$ folgt, dass $e^u \in H^k(M)$ und $he^u \in H^k(M)$ ist (Machen wir hier nicht).

(viii) Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty(M)$ ist.

Es bleibt also einen kritischen Punkt $(v \in H^1, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ zu finden. Dazu sei

$$F := \left\{ v \in H^1(M) \;\middle|\; \int_M he^v \mathrm{dvol}_g = 0, \int_M v\mathrm{dvol}_g = 0 \right\} \text{ und } \hat{J}\colon F \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto \int_M |dw|^2 \mathrm{dvol}_g.$$

(ix) Zeigen Sie, dass $F \cap C^\infty(M)$ nichtleer ist, wenn h die Bedingung $\int_M h\mathrm{dvol}_g < 0$ erfüllt und h das Vorzeichen wechselt.

Sei $v_i \in C^\infty(M) \cap F$ eine Folge mit $\lim_{i\to\infty} \hat{J}(v_i) = \inf\{\hat{J}(w) \mid w \in F\}$.

(x) Zeigen Sie, dass dann v_i in $H^1(M)$ beschränkt ist und eine Teilfolge, im Folgenden auch mit v_i benannt, schwach in $H^1(M)$ und stark in $L^4(M)$ gegen ein v konvergiert.

(xi*) Zeigen Sie, dass $e^{v_i} \to e^v$ in L^2 konvergiert.
Hinweis:

(xii) Zeigen Sie, dass $\hat{J}(v) = \inf\{\hat{J}(w) \mid w \in F\}$ gilt.

Das v ist also ein Minimum von $\hat{J}$ und ist damit insbesondere $(v, -2e^{-v}\Delta v, 0)$ ein kritischer Punkt von J.†

Insgesamt haben wir also für jedes $h \in C^\infty(M)$ mit $\int_M h\mathrm{dvol}_g$ und h wechselt das Vorzeichen eine glatte Lösung u von $\Delta u = he^u$. Bei uns soll $h = (K \circ \phi)e^{2v}$ sein. Es bleibt also nur:

(xiii* - 2*) Zeigen Sie, dass es für alle Riemannschen Metriken $\hat{g}$ auf M einen Diffeomorphismus $\phi\colon M \to M$ gibt, so dass $\int_M K \circ \phi \mathrm{dvol}_{\hat{g}} < 0$ gilt.

---

*Das ist ähnlich wie Extrema für Funktionen in mehreren Variablen bestimmen.

†v könnte a priori noch ein kritischer Punkt von $G\colon v \mapsto (\int_M he^v \mathrm{dvol}_g, \int_M v\mathrm{dvol}_g)$ sein. Man sieht aber schnell, dass G keine kritischen Punkte besitzt.

Übungsblatt 9

Übungsaufgabe 21. (i) Sei P ein Differentialoperator auf einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit derart, dass eine L^2-Basis von orthonormierten Eigenschnitten zu nichtnegativen Eigenwerten gibt. Zeigen Sie, dass $\|e^{-tP}s\|_{L^2} \leq \|s\|_{L^2}$ für alle $s \in \Gamma(E)$ gilt.

(ii) Sei P wie in (i). Sei P zusätzlich noch Laplace-artig und sei $k_t \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$, $t > 0$, der zugehörige Wärmeleitungskern. Zeigen Sie, dass

$$K_t \colon L^2(E) \to L^2(E); s \mapsto \int_M k_t(x, y)s(y)dy$$

ein beschränkter Operator ist.

(iii) Sei $A \colon L^2(E) \to L^2(E)$ ein beschränkter Operator mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren e_i zu Eigenwerten λ_i und Kern $k \in C(E \boxtimes E^*)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}A = \sum_i \lambda_i = \int_M k(x, x)\mathrm{dvol}_g$ ist. Hierbei wird $k(x, x)$ mittels der Abbildung $E_x \otimes E_x^* \to \mathbb{C}$, $(e, f) \mapsto f(e)$, als komplexwertige stetige Abbildung auf M aufgefasst.

Übungsaufgabe 22. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, d.h. $\Delta\alpha = 0$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta|\alpha|_g^2 = 2|\nabla\alpha|_g^2 + 2\mathrm{Ric}(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp)$$

gilt.

(ii) Folgern Sie, dass auf jeder geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Riccikrümmung, die harmonischen 1-Form genau die parallelen Einsformen sind (d.h. $\nabla\alpha \equiv 0$). Ist weiterhin die Riccikrümmung sogar positiv, gibt es gar keine harmonischen 1-Formen.*

*Das ist dann ein Beispiel für einen Laplace-artigen Operator, der 0 nicht als Eigenwert hat.

Übungsblatt 10

Übungsaufgabe 23. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E. Sei $v \in T_xM$, $\pi(e) = x$. Wir definieren $v^* \in T_eE$ als $\tilde{\gamma}'(0) \in T_eE$, wobei $\tilde{\gamma}$ der horizontale Lift einer Kurve $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma_x(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$ mit $\tilde{\gamma}(0) = e$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass $TM \to TE$, $v \in T_{\pi(e)}M \mapsto v^* \in T_eE$, wohldefiniert ist und dass $X^*\colon e \in E \mapsto (X(\pi(e)))^*$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld auf E definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $d_e\pi(X^*(e)) = X(\pi(e))$ und $T_eE_{\pi(e)} = \ker d_e\pi$ gilt.

Übungsaufgabe 24. Sei H eine Lieuntergruppe der Liegruppe G. Sei $\Psi\colon G \times G/H \to G/H$, $(g', gH) \mapsto \Psi_{g'}(gH) := g'gH$. Sei $\rho\colon H \to \mathrm{Gl}(T_H(G/H))$ die Isotropiedarstellung von H ist, d.h. $\rho(h) := d_H\Psi_h$.

(i) Sei Ψ eine effektive Wirkung, d.h. aus $\Psi_g = \mathrm{id}$ folgt $g = 1$. Zeigen Sie, dass dann das Tangentialbündel $T(G/H) \to G/H$ isomorph zum assoziierten Faserbündel $G \times_\rho T_H(G/H) \to G/H$ ist.

(ii) Sei $\bar{H} := \{g \in G \mid \Psi_g = \mathrm{id}_M\}$. Dann ist $\bar{H}$ der größte Normalteiler von G, der in H enthalten ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die induzierte Wirkung von $\hat{G} = G/\bar{H}$ auf $M = G/H$ effektiv ist und dass $M = \hat{G}/\hat{H}$ für $\hat{H} = H/\bar{H}$ gilt.

Übungsblatt 11

Übungsaufgabe 25.

(i) (Anschauung der Lieklammer) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und ϕ_t der Fluss von X, d.h. $X(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \phi_t(x))$. Wir zeigen, dass

$$[X, Y](x \in M) = \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\phi_t(x)}\phi_{-t}(Y(\phi_t(x))).$$

test

Beweis. Taylorentwicklung ergibt $f \circ \phi_t(x) = f(x) + th_t(x)$ mit $h_0(x) =$ ________ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0} d___ (f \circ \phi_{-t})(Y(\phi_t(x))) &= \lim_{t\to 0} \frac{d___ (f \circ \phi_{-t})(Y(\phi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{d___ f(Y(\phi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} - d_____ (Y(\phi_t(x))) \right) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{Y(f) \circ \phi_t - Y(f)}{t} - Y(_) \circ _ \right)(x) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} Y(f) \circ \phi_t(x) - Y(h_0(x)) = \left(\mathrm{X(Y(f))} - _____ \right)(x) \\
&= [X, Y](f)(x).
\end{aligned}$$

warum? □

(ii) Sei $P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel mit gegebenem Zusammenhang. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $Y = \mathrm{hor}(Y) \in \mathfrak{X}(P)$. Dann ist $[\tilde{X}, Y]$ auch ein horizontales Vektorfeld.

Beweis. Der Fluss

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, Y](p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\phi_t(p)}\phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{d_{p\cdot\exp(tX)} R_{\exp___} (Y(p \cdot \exp(tX)))}_{=:\gamma(t)}
\end{aligned}$$

Da Y horizontal ist und für den Zusammenhang $d_p R_g(Q_p P) =$ ____ gilt, ist $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(t) \in$ _______ und damit $[\tilde{X}, Y]$ selbst horizontal. □

Übungsaufgabe 26. Füllen Sie die hellblauen Lücken und sagen Sie, warum die hellblau gewellt-unterstrichenenen Formeln richtig sind.

(i) Haben wir einen Zusammenhang Q auf einem G-Hauptfaserbündel $P \to M$ gegeben, definieren wir $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_p P$. Das definiert ein $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und sieht, dass $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ für alle $g \in G$, d.h. $\omega_{p\cdot g}(d_p R_g(Z))) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$ für alle $p \in P$ und $Z \in T_p P$, denn:

warum?

Ein $Z \in T_pP$ hat immer die Form $\tilde{X}(p) + Y$ mit $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_pP$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
(R_g^*\omega)_p(Z = \tilde{X}(p) + Y) &= \omega_{p\cdot g}(d_pR_g(\tilde{X}(p) + Y)) \\
&= \omega_{p\cdot g}(\mathrm{Ad}\widetilde{(g^{-1})}X(p) + d_pR_g(Y)) \quad && \text{da } d_pR_g(\tilde{X}(p)) = \mathrm{Ad}\widetilde{(g^{-1})}X(p\cdot g) \text{ und } d_pR_g \ \underline{\hspace{1.5cm}} \text{ ist} \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})X && \text{da } \underline{\hspace{4cm}} \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(Z).
\end{aligned}
$$

warum?

Ein Element $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$, für welches $\omega(\tilde{X}) = X$, wobei $\tilde{X}$ das fundamentale Vektorfeld zu $X \in \mathfrak{g}$ ist, und $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ gilt, nennt man Zusammenhangsform dem G-Hauptfaserbündel $\pi\colon P \to M$. Wir haben also oben aus einem Zusammenhang Q eine Zusammenhangsform konstruiert. Andersherum gehört zu einer Zusammenhangsform auch wieder einen Zusammenhang:

$$u \in P \mapsto Q_uP := \ker\, \omega_u$$

Wir wollen zeigen, dass diese Zuordnung wirklich einen Zusammenhang definiert:

$T_pP = Q_pP \oplus T_pP_{\pi(p)}$: Sei $Y \in Q_pP \cap T_pP_{\pi(p)}$. Dann ist Y der Wert eines fundamentalen Vektorfeldes, also $Y = \tilde{X}(p)$ für ein $X \in \mathfrak{g}$. Wegen $\omega(\tilde{X}) = X$ folgt damit $X = 0$ und damit auch $Y = 0$. Da ω_p nach Definition surjektiv ist, folgt aus $\underline{\hspace{4.5cm}}$

Rechtsinvarianz: Ist $Y \in Q_pP$, dann ist $d_pR_g(Y) \in \underline{\hspace{1.5cm}}$, denn:

$$\omega_{p\cdot g}(d_pR_g(Y)) = (R_g^*\omega)(Y) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega(Y)) = 0.$$

Glattheit: Sei $p \in P$, $x^1, \dots, x^n$ Koordinaten auf U um p und $a_1, \dots, a_k$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann hat $Y \in T_pP$ die Form $Y = Y^i\partial_{x^i}|_p$ für $Y^i \in \underline{\hspace{0.4cm}}$. Da ω glatt ist, gibt es $\omega_i^j \in C^\infty(\underline{\hspace{1cm}})$ mit $\omega(\partial_{x^i}) = \omega_i^j a_j$. Damit ist $Y \in \ker\,\omega_p$ genau dann, wenn $\underline{\hspace{2cm}} = 0$ für alle $j = 1, \dots, k$. Die Lösungen Y^i hängen glatt von p ab, weswegen $\ker\,\omega$ durch glatte Vektorfelder aufgespannt wird.

Damit folgt, dass obige Zuordnung wirklich ein Zusammenhang ist. Weiterhin sind beide Zuordnungen $Q \mapsto \omega$ und $\omega \mapsto Q = \ker\omega$ invers zueinander, da $\underline{\hspace{4.5cm}}$

(ii) Sei $\Phi\colon G \times M \to M$ eine Rechtswirkung auf M, $x(t)$ eine Kurve in M mit $x(0) = x$ und $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = g$. Sei $z(t) = \Psi(g(t), x(t)) = x(t)\cdot g(t)$. Wir nutzen die Abkürzungen $\Psi_x = \Psi(., x)$ und $\Psi_g = \Psi(g, .)$. Wir rechnen nach, dass

$$\dot{z}(0) = d_xR_g(\dot{x}(0)) + d_g\widetilde{L_{g^{-1}}(}\dot{g}(0))(x\cdot g)$$

gilt: Es ist $T_{(g,x)}(G \times M) \cong T_xM \underline{\hspace{1.5cm}}$ und wir haben

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(g(t), x(t)) = d_{(g,x)}\Psi(\dot{g}(0), \dot{x}(0)) \\
&= d_{(g,x)}\Psi(\dot{g}(0), 0) + d_{(g,x)}\Psi(0, \dot{x}(0)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(\underline{\hspace{1.5cm}}) + \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(\underline{\hspace{1.5cm}}) \\
&= d_g\Psi_x(\dot{g}(0)) + \underline{\hspace{2.5cm}}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Außerdem gilt für alle $X \in \mathfrak{g}$

$$\tilde{X}(x\cdot g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\underline{\hspace{3.5cm}}) = d_g\Psi_x\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(g\cdot \exp(tX)\right) = d_g\Psi_x(\underline{\hspace{1.2cm}}).$$

Zusammen mit $X = \underline{\hspace{3cm}} \in T_1G \cong \mathfrak{g}$ folgt $\tilde{X}(g) = \dot{g}(0)$ und damit zusammen mit (7) die Behauptung.