

# Differentialgeometrie II

Universität Freiburg, SS 2024

Nadine Große

Skript – Version vom 10. Juli 2024

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel</b>	<b>3</b>
II.1. Faserbündel	3
II.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen	7
II.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln	10
II.2. Vektorbündel	15
II.2.1. Schnitte	16
II.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln	17
II.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel	23
II.2.4. Bündelmetriken	24
<b>III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln</b>	<b>29</b>
III.1. Definitionen und erste Eigenschaften	29
III.1.1. Im $\mathbb{R}^n$	29
III.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln	30
III.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln	32
III.2.1. Horizontaler Lift – Paralleltransport	37
III.2.2. Krümmung	38
III.3. Hauptsymbol und Klassifikation	41
III.3.1. Hauptsymbol	41
III.3.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren	43
III.4. Elliptische Diffops	45
III.4.1. Grundlagen und erste Anwendungen	46
III.4.2. Wichtige Begriffe der Funktionalanalysis	48
III.4.3. Elliptische Abschätzungen	50
III.4.4. Existenz von Lösungen in Sobolevräumen - Fredholmalternative	51
III.4.5. Laplace-artige Operatoren	53
III.4.6. Dirac-artige Operatoren	59
III.4.7. Etwas Funktionalkalkül	62
III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung	63
III.5.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns	65
III.5.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz	69
<b>IV. Hauptfaserbündel</b>	<b>73</b>
IV.1. Vom Tangential- zum Repèrebündel	73

*Inhaltsverzeichnis*

IV.2. Definition . . . . .	74
IV.2.1. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel . . . . .	77
IV.2.2. Exkurs: Čech-Kohomologie . . . . .	79
IV.2.3. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln . . . . .	81
IV.2.4. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln . . . . .	83
IV.2.5. Krümmung . . . . .	88
IV.3. Klassische Yang-Mills-Theorie . . . . .	92
IV.3.1. Klassische Elektrodynamik . . . . .	92
IV.3.2. Klassische Yang-Mills Theorie . . . . .	94
IV.4. Dirac-Operatoren . . . . .	96
<b>A. Liegruppen und Wirkungen</b>	<b>101</b>
A.1. Liegruppen . . . . .	101
A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren . . . . .	102
A.1.2. Lie-Untergruppen . . . . .	103
A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen . . . . .	104
A.1.4. Killingform . . . . .	105
A.2. Gruppenwirkungen . . . . .	106
<b>B. Übersicht - Operationen auf Differentialformen</b>	<b>111</b>
<b>C. Zusammenhänge – VB vs. HFB</b>	<b>115</b>
<b>Literatur</b>	<b>120</b>

# I. Einleitung

Woche 1

In dieser Vorlesung werden wir uns mit Bündeln, vor allem Vektor- und Hauptfaserbündeln sowie Differentialoperatoren beschäftigen. Vektorbündel sind eine Verallgemeinerung des Tangentialbündels, welches alle Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit umfasst. Es ist also in allen Punkten der Mannigfaltigkeit eine Linearisierung. Das macht es einfacher darauf Analysis zu machen, wie wir dann mit den Differentialoperatoren im zweiten Teil der Vorlesung sehen werden. Dabei wird auch immer wichtig sein, wie alles lokal also im flachen Fall im  $\mathbb{R}^n$  geht und dann zu sehen, welche neuen Effekte ggf. durch das 'Zusammenkleben' entstehen.

Hauptfaserbündel sind eine andere Form von Bündeln, die viel mit Gruppenwirkungen zu tun haben. Mit einer Darstellung der Gruppe kann man diesen Bündeln dann auch immer ein Vektorbündel zuordnen. Diese kommen vor bei vielen Operatoren, die ursprünglich aus der Physik kommen, wie z.B. der Diracoperator. Differentialgleichungen des Diracoperators kommen in semi-klassischen Theorien in der Physik vor. Aber der Diracoperator ist auch eines der meist genutzten Werkzeuge bei Fragen nach Existenz von Metriken mit positiver Skalarkrümmung.

Diese Vorlesung stellt in erster Linie die Werkzeuge zur Verfügung, um mit Bündeln und Differentialoperatoren darauf umzugehen. Einige Sätze aus PDE und Funktionalanalysis werden wir als Blackbox verwenden, um so wenigstens einige Anwendungen explizit durchführen zu können.



## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Ziel dieses Kapitels ist es einen Begriff einzuführen, der die Besonderheiten des Tangentialbündels, als Mannigfaltigkeit, die aus den einzelnen Tangentialräumen einer Mannigfaltigkeit gebaut ist, verallgemeinern soll. Das führt zum Begriff des Faserbündels. Wir werden uns zunächst allgemein mit Faserbündeln und dann mehr mit Vektorbündeln beschäftigen.

### II.1. Faserbündel

Wir wollen in diesem Abschnitt Faserbündel einführen. Diese kann man als Verallgemeinerung des Tangentialbündels verstehen, welches wir uns zuerst anschauen:

Sei  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte\*  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, z.B.  $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Dann ist der Tangentialraum  $T_x M$  ein Vektorraum für alle  $x \in M$ , und wir haben einen Vektorraumisomorphismus  $\tau_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  (mit  $\tau_x(0 \in T_x M) = 0$ ). Ändern wir  $x$ , dann ändert sich auch dieser Tangentialraum, aber in einer stetigen Weise.

Die disjunkte Vereinigung  $TM := \sqcup_{x \in M} T_x M$  erhält durch die Forderung, dass für eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  auf  $M$  die Abbildung

$$d\kappa: TU = \sqcup_{x \in U} T_x M \rightarrow TV \cong V \times \mathbb{R}^m,$$

definiert durch

$$d\kappa(v \in T_x M) := (x, d_x \kappa(v)),$$

eine Karte von  $TM$  sein soll, eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur. So wird auch dort  $TM$  zu einer glatten  $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, vgl. [2, Satz I.3.21].

Allerdings ist es eine Mannigfaltigkeit mit einer prominenten Zusatzstruktur: Wir haben eine surjektive glatte Abbildung

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad v \in T_x M \mapsto x \in M.$$

Des Weiteren gilt für  $U \subset M$  klein genug: Es gibt eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  und  $\pi^{-1}(U) = TU$  ist mittels der Abbildung  $(\kappa^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}^m}) \circ d\kappa$  isomorph zu  $U \times \mathbb{R}^m$  – diese Eigenschaft heißt *lokal trivial*. Diese Zusatzstrukturen machen  $TM$  zu einem sogenannten Faserbündel (am Ende sogar zu einem Vektorraumbündel, da die  $d_p \kappa$

---

\*Ab sofort sind bei uns Mannigfaltigkeiten und Abbildungen immer glatt – außer wir sagen es explizit dazu – und wir schreiben das glatt i.A. nur noch hinzu, um es hervorzuheben.

II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

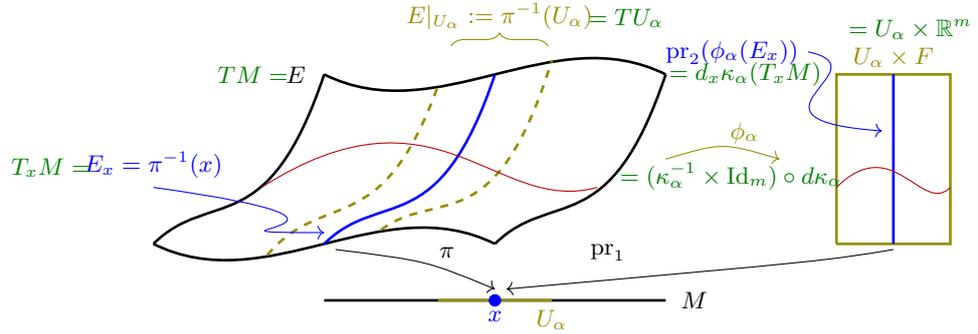


Abb. II.1.: Schematische Darstellung (eines Teils) eines Faserbündels mit einem Schnitt  $s$  in darkred. In grün steht jeweils dabei, was die einzelnen Punkte für unser Beispiel  $TM^m$  von oben wären. Für das Tangentialbündel sind glatte Schnitte genau die glatten Vektorfelder von  $M$ .

sogar Vektorraumisomorphismen sind – später dazu mehr)– speziell nennen wir  $TM$  *Tangentialbündel* von  $M$ :

**Definition II.1.1.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und sei  $F$  eine Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\pi: E \rightarrow M$  ein *Faserbündel mit dem Fasertyp  $F$* , falls es eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$  und Diffeomorphismen  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  gibt, so dass  $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$  (Man sagt:  $\phi_\alpha$  ist *fasertreu*) gilt.

Der Raum  $E$  heißt *Totalraum*,  $M$  *Basisraum*,  $\pi$  ist die *Projektion* und  $F$  der *Fasertyp* der Faserung. Dann ist  $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$  die *Faser* über  $x \in M$  und  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  ist eine *lokale Trivialisierung* über  $U_\alpha$ .

Gegeben seien zwei Faserbündel  $\pi_i: E_i \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$  mit Fasertyp  $F$ . Eine glatte Abbildung  $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$  heißt *Faserbündelmorphismus*, falls es eine Abbildung  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  mit  $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$  gibt. Man sagt auch,  $\Phi$  ist ein *Faserbündelmorphismus über  $\phi$* . Ist  $M_1 = M_2$ ,  $\phi = \text{Id}$  und  $\Phi$  auf allen Fasern sogar ein Diffeomorphismus, so nennt man  $\Phi$  *Faserbündelisomorphismus\** und die entsprechenden Faserbündel *isomorph*. Ein (*glatter*) *Schnitt* ist eine (glatte) Abbildung  $s: M \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = \text{Id}$ . Die Menge aller glatten Schnitte von  $E$  bezeichnen wir mit  $\Gamma(E)$ .

Für ein Faserbündel ist  $\pi$  automatisch eine Submersion (d.h.  $d_e \pi: T_e E \rightarrow T_{\pi(e)} M$  ist für alle  $e \in E$  surjektiv), ÜB 0.

**Beispiel II.1.2.**

- (i) (*Triviales* Faserbündel)  $E = M \times F \xrightarrow{\pi=\text{pr}_1} M$  (jedes dazu isomorphe Faserbündel nennen wir auch trivial). Glatte Schnitte  $s: M \rightarrow E$  sind dann in 1 : 1 Beziehung zu glatten Abbildungen  $\hat{s}: M \rightarrow F$  (mittels  $s(p) = (p, \hat{s}(p))$ ).

\*Wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Art von Bündel es geht, sagt man manchmal auch nur Bündel(iso)morphismus

- (ii) Ist die Faser diskret, also  $\dim F = 0$ , so nennt man das Bündel *Überlagerung*.
- (iii) *Möbiusband* Setze  $E := [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$  mit  $(x, v) \sim (y, w)$  genau dann, wenn  $\{x, y\} = \{0, 1\}$  und  $v = -w$  ist. Dann ist  $\pi: E \rightarrow S^1 \cong [0, 1] / (0 \sim 1)$ ,  $[(x, v)] \mapsto [x]$ , ein Faserbündel über  $S^1$ . Jeder Schnitt in  $E$  kommt von einer antiperiodischen Abbildung auf  $\mathbb{R}$  der Periode 1, also von einem  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x+1) = -f(x)$ .

Auch  $E' := ([0, 1] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) / \sim$  mit  $\sim$  wie oben ist ein Faserbündel über  $S^1$ . Es ist dann  $\Gamma(E') = \emptyset$ .

- (iv) (*Tautologisches Geradenbündel*) Sei  $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{K}^*$  der projektive Raum mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Das ist eine Mannigfaltigkeit, vgl. [2, Abschnitt I.3.3]. Das tautologische Geradenbündel ist definiert als

$$\begin{aligned} \pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid v \in \ell\} &\rightarrow \mathbb{K}P^n \\ (\ell, v) &\mapsto \ell, \end{aligned}$$

wobei  $v \in \ell$  bedeutet, dass  $v$  in der zu  $\ell$  gehörigen Ursprungsgeraden enthalten ist. Wir betrachten  $\tau$  als Teilmenge von  $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1}$  mit der induzierten Mannigfaltigkeitsstruktur. Dann ist  $\pi: \tau \subset \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}P^n$ , die Projektion auf die erste Koordinate, ein Faserbündel. Mit Fasertyp:  $\mathbb{K}$ .

- (v) Sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  und  $\pi: TM \rightarrow M$  das Tangentialbündel auf  $M$ . Dann ist das *Einheitstangentialbündel*

$$e \in SM := \{e \in TM \mid g_{\pi(e)}(e, e) = 1\} \mapsto \pi(e) \in M$$

ein Faserbündel über  $M$ . Mit Fasertyp:  $S^{\dim M - 1}$ .

So ist für  $M = S^1$  dann  $SS^2 \rightarrow S^2$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $S^1$  und es gilt  $\Gamma(SS^2) = \emptyset$  (Ein Element in  $\Gamma(SS^2)$  wäre ein glattes Einheitsvektorfeld auf  $S^2$ , was es nach dem Satz vom Igel nicht gibt.).

- (vi) *Hopffaserung*: Wir betrachten die Wirkung von  $U(1) \cong S^1$  auf  $\mathbb{C}^2$  mittels

$$((z_1, z_2), e^{i\alpha}) \in \mathbb{C}^2 \times U(1) \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2) \in \mathbb{C}^2$$

– vgl. Abbildung II.2. Diese Wirkung lässt die Untermannigfaltigkeit

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

invariant. Die Projektion  $S^3 \rightarrow S^3/U(1)$  ist ein Faserbündel mit Fasertyp  $S^1$ .

*Beweis.* Später – vgl. Beispiel A.2.7.iii. □

**Bemerkung II.1.3.** In obigen Beispielen haben wir gesehen, dass  $\Gamma(E)$  auch leer sein kann. Was es aber immer gibt, sind *lokale Schnitte*. D.h. für alle  $p \in M$  gibt es eine Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  und eine glatte Abbildung  $s: U \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = \text{Id}_U$ . Das folgt direkt aus der Existenz der lokalen Trivialisierungen.

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

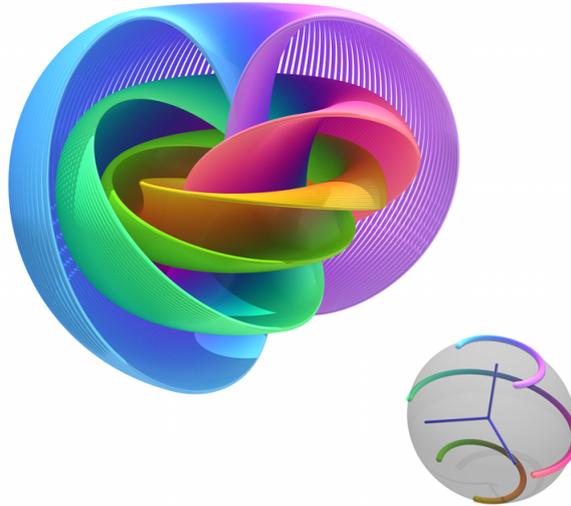


Abb. II.2.: Das ist eine Visualisierung der Hopffaserung. Aufgrund der hohen Dimensionen wird eine stereographische Projektion der  $S^3$  auf den  $\mathbb{R}^3$  durchgeführt und dieser dann diffeomorph in einen Ball  $B_2(0) \subset \mathbb{R}^3$  abgebildet. Das Bild zeigt verschiedene Punkte von  $S^2 \subset B_2(0)$  zusammen mit ihren Bahnen unter Wirkung  $S^1$  in verschiedenen Farben, vgl. auch <https://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk> für eine Animation. [By Niles Johnson - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22485543>]

Oft werden Bündel mit Zusatzstrukturen betrachtet. So ist z.B. das Tangentialbündel von oben ein Faserbündel  $\pi: E = TM \rightarrow M^m$  mit einem Vektorraum als Fasertyp, dessen lokale Trivialisierungen Vektorraumisomorphismen auf den Fasern sind. Das gleiche gilt fürs Möbiusband. Beide gehören zu den (reellen) Vektorbündeln:

**Definition II.1.4.** Ein Faserbündel  $\pi: E \rightarrow M$  mit Fasertyp  $F$  ist ein *reelles Vektorbündel vom Rang  $r$* , falls  $F = \mathbb{R}^r$ , alle Fasern  $E_p := \pi^{-1}(p)$  Vektorräume sind und falls für jede lokale Trivialisierung  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  und  $p \in U_\alpha$  die Einschränkung  $\phi_p := \text{pr}_2 \circ \phi_\alpha|_{E_p}: E_p \rightarrow \mathbb{R}^r$  ein Vektorraumisomorphismus ist. Analog werden *komplexe Vektorbündel* oder allgemein  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel ( $\mathbb{K}$  ein Körper) definiert. Vektorbündel vom Rang 1 nennen wir auch *Geradenbündel*\*

Ein *Vektorbündelhomomorphismus* bzw. *-isomorphismus* zwischen zwei Vektorbündeln ist ein Bündelmorphismus, dessen Einschränkung auf die Fasern linear bzw. ein Vektorraumisomorphismus ist.

Von den Beispielen aus II.1.2 hat das triviale Faserbündel mit Faser  $\mathbb{K}^r$ , das tautologische Geradenbündel über  $\mathbb{K}P^n$  und das Möbiusband jeweils Vektorbündelstruktur – die

---

\*englisch: line bundle

letztem beiden haben Rang 1.

Mehr zu Vektorbündeln in Abschnitt II.2. Eine andere spezielle Klasse von Faserbündeln werden Hauptfaserbündel sein, vgl. Abschnitt IV.

### II.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns anschauen, wie und ob man sich aus trivialen Faserbündeln über offenen Teilmengen von  $M$  ein Faserbündel über ganz  $M$  zusammenkleben kann:

**Bemerkung II.1.5.** (Wechsel lokaler Trivialisierungen) Sei  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  mit lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  eines Faserbündels  $\pi: E \rightarrow M$ . Dann gibt es für alle  $\alpha, \beta$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  eine Abbildung

$$\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F) \text{ mit } \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \mu_{\alpha\beta}(p)v)$$

für  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  und  $v \in F$ . Hierbei ist  $\text{Diff}(F)$  die Menge aller Diffeomorphismen von  $F$ . Diese bilden zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe – die *Diffeomorphismengruppe* von  $F$ . Die Abbildungen  $\mu_{\alpha\beta}$  werden *Übergangsfunktionen* genannt.

**Definition II.1.6.** Eine Abbildung  $h: B \rightarrow \text{Diff}(F)$  nennen wir *glatt*, falls  $\tilde{h}: B \times F \rightarrow F$ ,  $\tilde{h}(b, f) := h(b)(f)$ , glatt ist (im ursprünglichen Sinne von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten). Die Menge solcher glatten Abbildungen bezeichnen wir mit  $C^\infty(B, \text{Diff}(F))$ .

In diesem Sinne sind die obigen Abbildungen  $\mu_{\alpha\beta}$  glatt.

Es gilt

- (i)  $\mu_{\alpha\alpha} = 1$ , d.h.  $\mu_{\alpha\alpha}(x) = \text{Id}: F \rightarrow F$  für alle  $x \in U_\alpha$ .
- (ii)  $\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}\mu_{\gamma\alpha} = 1$ .

Man sagt, dass die  $\mu_{\alpha\beta}$  die *Kozykelbedingung* erfüllen. Nehmen die  $\mu_{\alpha\beta}(x)$  nur Werte in einer Untergruppe  $G \subset \text{Diff}(F)$  an, so nennen wir  $G$  die *Strukturgruppe* vom Faserbündel und die  $\mu_{\alpha\beta}$  einen  *$G$ -Kozykel*.

**Bemerkung II.1.7.** Für zwei beliebige Faserbündel  $E$  und  $E'$  über  $M$  weiß man a priori erst einmal nur, dass es offene Überdeckungen  $\{U_\alpha\}_\alpha$  und  $\{U'_\beta\}_\beta$  von  $M$  gibt, über denen  $E$  bzw.  $E'$  lokal trivial ist. Diese offenen Überdeckungen haben i.A. nichts miteinander zu tun. Man kann aber immer zu einer gemeinsamen Verfeinerung (z.B.  $\{U_\alpha \cap U'_\beta\}_{(\alpha,\beta)}$ ) übergehen.

Als nächstes werden wir sehen, dass in den  $\mu_{\alpha\beta}$  (bei gegebener Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$ ) schon das Faserbündel kodiert ist:

**Satz II.1.8.** Sei  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Seien  $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$  glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges Faserbündel vom Fasertyp  $F$ , welches diese  $\mu_{\alpha\beta}$  als Übergangsfunktionen hat.

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

*Beweis. Existenz:* (Skizze - vgl. Übungsaufgabe 2) Wir setzen

$$E := \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F) / \sim \xrightarrow{\pi} M, [(x, v)] \mapsto x,$$

wobei  $(x, v) \in U_{\alpha} \times F \sim (y, w) \in U_{\beta} \times F$  genau dann gilt, wenn  $x = y$  und  $\mu_{\beta\alpha}(x)v = w$  ist. Dann ist  $\phi_{\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times F, [(x, v)] \mapsto (x, v)$ .

*Eindeutigkeit:* Sei  $E' \xrightarrow{\pi'} M$  ein Faserbündel über  $M$  mit Faser  $F$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  über der gegebenen Überdeckung  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha}$ . Sei  $E$  wie oben konstruiert. Seien  $\phi'_{\alpha}$  die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von  $E'$ .

Wir müssen nun einen Faserbündel-Isomorphismus zwischen  $E$  und  $E'$  konstruieren: Wir definieren  $f: E' \rightarrow E$  als

$$e \in (\pi')^{-1}(U_{\alpha}) \subset E' \xrightarrow{\phi'_{\alpha}} (x, v) \in U_{\alpha} \times F \xrightarrow{\sim} [(x, v)] \in E.$$

Für Wohldefiniertheit reicht es zu zeigen, dass  $\phi'_{\alpha}(e) \sim \phi'_{\beta}(e)$  für  $\pi'(e) \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  gilt. Das folgt direkt, da beide Faserbündel die gleichen Übergangsfunktionen haben:  $\phi'_{\beta}(e) = \phi'_{\beta} \circ (\phi'_{\alpha})^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$ .

Es gilt  $\pi \circ f = \pi'$ . Damit bleibt zu zeigen, dass  $f$  glatt ist und  $f|_{E'_x}: E'_x \rightarrow E_x$  für alle  $x \in M$  ein Diffeomorphismus ist:

Die Abbildung  $\phi_{\alpha} \circ f \circ (\phi'_{\alpha})^{-1}: U_{\alpha} \times F \rightarrow U_{\alpha} \times F$  ist gegeben durch

$$(x, v) \in U_{\alpha} \times F \xrightarrow{(\phi'_{\alpha})^{-1}} e := (\phi'_{\alpha})^{-1}(x, v) \in E' \xrightarrow{f} [(x, v)] \in E \xrightarrow{\phi_{\alpha}} (x, v) \in U_{\alpha} \times F,$$

also gleich der Identität. Damit ist insbesondere  $f|_{E'_x}: E'_x \rightarrow E_x$  für alle  $x \in M$  ein Diffeomorphismus. Da die  $\phi_{\alpha}$  und  $\phi'_{\alpha}$  glatt sind, muss auch  $f$  auf  $(\pi')^{-1}(U_{\alpha})$  und damit auf ganz  $M$  glatt sein.  $\square$

**Woche 2** Die Übergangsfunktionen selbst hängen stark von den gewählten Trivialisierungen ab. Die Frage ist nun, wann liefert obige Konstruktion isomorphe Faserbündel.

**Satz II.1.9.** *Gegeben zwei Faserbündel  $E, E'$  über  $M$  mit Fasertyp  $F$ . Zu einer gegebenen Überdeckung  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha}$  von  $M$  seien die Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  bzw.  $\mu'_{\alpha\beta}$ . Dann sind die Faserbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen  $h_{\alpha} \in C^{\infty}(U_{\alpha}, \text{Diff}(F))$  mit*

$$\mu_{\alpha\beta} h_{\beta} = h_{\alpha} \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_{\alpha} \cap U_{\beta}. \quad (\text{II.1})$$

*Insbesondere ist das Faserbündel  $E$  trivial, wenn  $\mu_{\alpha\beta} = h_{\alpha} h_{\beta}^{-1}$  für geeignete  $h_{\alpha}$  gilt.*

*Beweis.* Sei zunächst  $f: E' \rightarrow E$  ein Bündelisomorphismus. Dann definiert  $\phi_{\alpha} \circ f \circ (\phi'_{\alpha})^{-1}: U_{\alpha} \times F \rightarrow U_{\alpha} \times F$  durch  $\phi_{\alpha} \circ f \circ (\phi'_{\alpha})^{-1}(x, v) \mapsto (x, h_{\alpha}(x)(v))$  eine glatte Abbildung  $h_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow \text{Diff}(F)$ . Mit

\*D.h.  $\mu_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha}(x)h_{\beta}(x)^{-1}$ , wobei  $h_{\beta}(x)^{-1}$  das Inverse zum Diffeomorphismus  $h_{\beta}(x): F \rightarrow F$  ist.

$$\begin{aligned} (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ f \circ (\phi'_\beta)^{-1})(x, v) &= (\phi_\alpha \circ f \circ (\phi'_\alpha)^{-1}) \circ (\phi'_\alpha \circ (\phi'_\beta)^{-1})(x, v) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ (x, \mu_{\alpha\beta}(x)h_\beta(x)(v)) &\qquad \qquad \qquad (x, h_\alpha(x)\mu'_{\alpha\beta}(x)(v)) \end{aligned}$$

folgt direkt (II.1).

Sei nun andererseits (II.1) für glatte Funktionen  $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Diff}(F)$  erfüllt. Dann definieren wir  $g: E \rightarrow E'$  durch: Sei  $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  mit  $\phi_\alpha(e) = (x, v)$ . Dann setze  $g(e) := (\phi'_\alpha)^{-1}(x, h_\alpha(x)^{-1}(v))$ . Wohldefiniertheit von  $g$  folgt mit

$$\phi_\beta(e) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$$

und

$$\begin{aligned} (\phi'_\beta)^{-1}(x, h_\beta(x)^{-1}\mu_{\beta\alpha}(x)(v)) &= (\phi'_\beta)^{-1}(x, \mu'_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x)^{-1}(v)) \\ &= (\phi'_\alpha)^{-1}(x, h_\alpha(x)^{-1}(v)). \end{aligned} \quad \square$$

Sei  $f: E' \rightarrow E$  ein Faserbündelisomorphismus von Faserbündeln über  $M$  und  $s \in \Gamma(E')$ . Dann ist  $f \circ s \in \Gamma(E)$ .

**Beispiel II.1.10.** Alle Faserbündel  $\pi: E \rightarrow M$  über  $M = [0, 1]^*$  sind trivial:

*Beweis:* Da jedes Faserbündel lokal trivial ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  groß genug, so dass  $E|_{U_i}$  mit  $U_i = [\frac{3i}{3n+1}, \frac{3i+4}{3n+1}]$  trivial für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  ist. Diese Intervalle sind so gewählt, dass jeder Punkt in  $[0, 1]$  zu maximal zwei Intervallen gehört. Insbesondere ist für  $i < j$

$$U_i \cap U_j = \begin{cases} \emptyset & j > i+1 \\ [\frac{3i+3}{3n+1}, \frac{3i+4}{3n+1}] & j = i+1. \end{cases}$$

Seien  $\mu_{i,i+1}: U_i \cap U_{i+1} \rightarrow \text{Diff}(F)$  die zugehörigen Übergangsfunktionen. Die Übergangsfunktionen des trivialen Faserbündels über  $U_i$  sind  $\mu'_{i,i+1}(x) = \text{id}_F$ . Um Satz II.1.9 anzuwenden, benötigen wir Funktionen  $h_i \in C^\infty(U_i, \text{Diff}(F))$  mit  $\mu_{i,i+1} = h_{i+1}h_i^{-1}$ . Diese können wir z.B. erhalten, indem wir  $h_0(x) := \text{id}_F$  und für  $i > 1$

$$h_i(x) = \mu_{i-1,i}(x) \circ h_{i-1}(x) \quad \text{für } x \in U_{i-1} \cap U_i = \left[ \frac{3i}{3n+1}, \frac{3i+1}{3n+1} \right]$$

setzen und dann  $h_i$  glatt auf  $U_i \setminus U_{i-1}$  fortsetzen. Mit Satz II.1.9 folgt, dass unser Faserbündel trivial ist.  $\square$

**Beispiel II.1.11** (Das Möbiusband ist kein triviales Faserbündel). Da das Möbiusband keinen nirgends verschwindenden Schnitt hat, das triviale Bündel aber natürlich schon, kann das Möbiusband als Vektorbündel nicht isomorph zum trivialen Vektorbündel  $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$  sein.

---

\* $M$  ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, vgl. [2, Def. II.10.5]. Für alle Definitionen bis jetzt kann  $M$  genauso gut auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand sein.

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Wir wollen jetzt sehen, dass das Möbiusband auch als Faserbündel nicht isomorph zum trivialen Faserbündel  $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ist. Wir werden das auf dem Level der Übergangsfunktionen sehen:

Sei  $U_{\pm} := S^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ . Dann zerfällt  $U_+ \cap U_-$  in zwei Zusammenhangskomponenten, die wir  $V_{\pm}$  nennen. Für das Möbiusband wählen wir die Trivialisierungen, so dass  $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = v$  für  $x \in V_+$  und  $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = -v$  für  $x \in V_-$  ist. Für das triviale Bündel wählen wir einfach eine globale Trivialisierung. Dann ist die zugehörige Übergangsfunktion  $\mu'_{+-}(x)(v) = v$  für alle  $x \in U_+ \cap U_-$ . Wäre das Möbiusband trivial, müsste es nach letztem Satz Funktionen  $h_{\pm}: U_{\pm} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R})$  mit  $\mu_{+-}(x) = h_+(x) \circ h_-(x)^{-1}$  geben. Das heißt, entweder  $h_+$  oder  $h_-$  würde einem glatten Weg in  $\text{Diff}(\mathbb{R})$  entsprechen, der von einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zu einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus geht. Einen solchen Weg gibt es nicht, da ein orientierungserhaltender (-umkehrender) Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}$  überall positive (negative) Ableitung hat, während entlang eines solchen Weges die Ableitungen aber stetig sein müssen.

Wir werden noch sehen: Das triviale Bündel und das Möbiusband sind bis auf Isomorphie sogar die einzigen Faserbündel über  $S^1$  mit Faser  $\mathbb{R}$ , vgl. Beispiel II.1.14.

### II.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln

#### II.1.2.1. Einschränkungen

Die einfachste Art aus gegebenen Faserbündeln  $\pi: E \rightarrow M$  neue zu konstruieren sind Einschränkungen auf Untermannigfaltigkeiten  $N \subset M$ , also  $\pi_N: E|_N := \pi^{-1}(N) \rightarrow N$ . Dies ist ein Faserbündel über  $N$  mit Fasertyp  $F$ :

*Beweis.* Da  $\pi$  eine Submersion ist, ist  $\pi^{-1}(N)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $E^*$ . Nun folgt der Rest automatisch durch Einschränkung der lokalen Trivialisierungen von  $E$ . □

Einschränkungen können helfen, um zu zeigen, dass zwei Faserbündel isomorph sind:

**Satz II.1.12.** *Sei  $\pi: E \rightarrow M \times [0, 1]$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$ . Dann sind die Einschränkungen  $E|_{M \times \{0\}}$  und  $E|_{M \times \{1\}}$  isomorphe Faserbündel über  $M$ .*

*Beweis.* Übungsaufgabe 6 □

---

\*Sei  $x \in \pi^{-1}(Z)$ . Da  $Z^z \subset M^m$  eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine offene Umgebung  $U \subset Z$  von  $\pi(x) = y$  und eine Funktion  $g: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{\ell:=m-z}$  mit  $g^{-1}(0) = U$  und 0 als regulären Wert. Also ist insbesondere  $d_y g$  surjektiv. Dann ist  $\pi^{-1}(Z)$  in einer Umgebung von  $x$  gleich  $(g \circ \pi)^{-1}(0)$ . Wegen  $d_x(g \circ \pi) = d_y g \circ d_x \pi$  ist  $d_x(g \circ \pi): T_x \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{\ell}$  genau dann surjektiv (und damit 0 regulärer Wert von  $g \circ \pi$  und damit  $\pi^{-1}(Z)$  in einer Umgebung von  $x$  eine Mannigfaltigkeit), falls  $d_y g$  das Bild von  $d_x \pi$  surjektiv auf  $\mathbb{R}^{\ell}$  abbildet. Da  $\pi$  allerdings eine Submersion ist, ist  $d_x \pi$  surjektiv und damit auch  $d_x(g \circ \pi)$ .

(Ganz analog kann man so allgemeiner für eine Abbildung  $f: E \rightarrow M$  ein Kriterium finden, wann  $f^{-1}(Z) \subset E$  Untermannigfaltigkeit ist - Stichwort: Transversalität.)

**Folgerung II.1.13.** Sei  $E_i \rightarrow M$ ,  $i = 0, 1$ , Faserbündel mit Fasertyp  $F$ , lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha^i$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ . Für alle  $\alpha, \beta$  seien die  $\mu_{\alpha\beta}^0$  und  $\mu_{\alpha\beta}^1$  homotope Abbildungen mit glatter Homotopie  $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(F)$ , so dass die  $\mu_{\alpha\beta}^t := \tilde{\mu}_{\alpha\beta}(\cdot, t)$  zu jeder Zeit  $t \in [0, 1]$  die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind  $E_0$  und  $E_1$  isomorph.

*Beweis.* Seien  $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: (U_\alpha \times [0, 1]) \cap (U_\beta \times [0, 1]) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(F)$  die Homotopien. Diese erfüllen nach Voraussetzungen die Kozykelbedingung und definieren damit nach Satz II.1.8 ein Faserbündel  $\tilde{E} \rightarrow M \times [0, 1]$ . Nach Konstruktion ist  $E_i \cong \tilde{E}|_{M \times \{i\}}$ . Nach letztem Satz sind damit  $E_0$  und  $E_1$  isomorphe Faserbündel.  $\square$

**Beispiel II.1.14.** Man kann nach Beispiel II.1.10 jedes Faserbündel über  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  mit Fasertyp  $\mathbb{R}$  über  $U_\pm = \{(x, y) \in S^1 \mid \pm(y \pm \frac{1}{2}) > 0\}$  lokal trivialisieren. Sei  $V_+ \sqcup V_- := U_+ \cap U_-$ . Damit ist die Übergangsfunktion  $\mu_{+-}$  eine Abbildung von zwei disjunkten Intervallen  $V_+ \sqcup V_-$  nach  $\text{Diff}(\mathbb{R})$ . Man kann sich überlegen, dass man jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus  $\phi$  zur Identität homotopieren kann und jeden orientierungsumkehrenden diffeomorph zu minus der Identität: Eine surjektive glatte Abbildung  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein orientierungserhaltender (-umkehrender) Diffeomorphismus, falls  $\phi' > 0$  ( $< 0$ ) ist. Wir wählen als Homotopie:

$$H(x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]) = (1 - t)\phi(x) \pm tx$$

(+ falls  $\phi$  orientierungserhaltend, - sonst).

Diese Homotopie hängt glatt von  $\phi$  ab. Das impliziert mit letzter Folgerung insbesondere, dass die lokalen Trivialisierungen so gewählt werden können, dass die Übergangsfunktionen lokal konstant  $\pm 1$  sind. Daraus folgt, dass jedes solche Faserbündel entweder trivial oder zum Möbiusband isomorph ist.

### II.1.2.2. Bündel-Trivialisierungslemma

Im Allgemeinen, also im Gegensatz zur Einschränkung oben, ist es nicht so einfach zu zeigen, dass etwas ein Faserbündel ist. Für einige der folgenden Konstruktionen wird uns folgender Satz helfen (Insbesondere dann, wenn nicht schon per Konstruktion klar ist, dass der Totalraum wieder eine Mannigfaltigkeit ist.):

**Satz II.1.15** (Bündel-Trivialisierungslemma). Sei  $\pi: E \rightarrow M$  eine surjektive Abbildung. Seien  $F$  und  $M$  Mannigfaltigkeiten. Sei eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$  zusammen mit bijektiven Abbildungen  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$  mit  $pr_1 \circ \phi_\alpha = \pi$  gegeben. Die Abbildungen

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

seien von der Form

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$$

für glatte  $\mu_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ . Dann trägt  $E$  eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass  $\pi: E \rightarrow M$  Faserbündel mit Fasertyp  $F$  und lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha$  ist.

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

*Beweisskizze.* Um eine glatte Struktur auf  $E$  zu erhalten, ist die Idee auf  $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$  die glatte Struktur (also Karten) von  $U_\alpha \subset M$  zusammen mit der glatten Struktur auf  $F$  zu nutzen. Sei  $p \in M$ . Wir wählen  $\alpha$  mit  $p \in U_\alpha$ . Sei  $\kappa_p: V_p \subset M \rightarrow \hat{V}_p \subset \mathbb{R}^m$  eine Karte um  $p$ . O.B.d.A. sei diese klein genug, dass  $V_p \subset U_\alpha$  gilt. Weiterhin seien  $\{\varkappa_\beta: \tilde{U}_\beta \subset F \rightarrow \hat{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n\}_{\beta \in J}$  Karten, die  $F$  überdecken ( $\dim F = n$ ). Wir setzen

$$\hat{\kappa}_{p,\beta} := (\kappa_p \times \varkappa_\beta) \circ \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(V_p)}$$

und erhalten eine Abbildung

$$\hat{\kappa}_{p,\beta}: (\hat{\kappa}_{p,\beta})^{-1}(\hat{V}_p \times \hat{U}_\beta) \subset \pi^{-1}(V_p) \subset E \rightarrow \hat{V}_p \times \hat{U}_\beta \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

Man überprüft direkt

1. Mit dem Atlas  $\{(\hat{\kappa}_{p,\beta})^{-1}(\hat{V}_p \times \hat{U}_\beta)\}_{p,\beta}$  erhält  $E$  eine abzählbare Hausdorff Topologie.
2.  $\{\hat{\kappa}_{p,\beta} \mid p \in M, \beta \in J\}$  ist ein glatter Atlas für  $E$  und damit hat  $E$  die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit:

Die Kartenwechsel  $\hat{\kappa}_{p,\beta} \circ \hat{\kappa}_{p',\beta'}^{-1}$  haben die Form

$$(\kappa_p \times \varkappa_\beta) \circ (\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha'}^{-1}) \circ (\kappa_{p'} \times \varkappa_{\beta'})^{-1}(x, v) = (\kappa_p \times \varkappa_\beta)(\kappa_{p'}^{-1}(x), \mu_{\alpha\alpha'}(\kappa_{p'}^{-1}(x))(\varkappa_{\beta'}^{-1}(v)))$$

3. Mit der obigen Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $E$  sind die Abbildungen  $\phi_\alpha$  Diffeomorphismen und  $\pi$  ist glatt.
4. Eindeutigkeit der glatten Struktur auf  $E$  mit den geforderten Eigenschaften.  $\square$

Entweder direkt über die Faserbündeldefinition oder mit dem letztem Satz können wir nun zeigen, dass die folgenden Konstruktionen wieder Faserbündel liefern. Bei all diesen Konstruktionen werden auch Isomorphieklassen respektiert, was wir nicht immer dazu sagen werden, aber direkt klar durch die Konstruktionen ist.

### II.1.2.3. Produkt zweier Faserbündel

Seien  $\pi: E \rightarrow M$  und  $\pi': E' \rightarrow M'$  Faserbündel mit Fasertyp  $F$  bzw.  $F'$ . Dann ist

$$(\pi, \pi'): E \times E' \rightarrow M \times M', \quad (e, e') \mapsto (\pi(e), \pi'(e'))$$

ist ein Faserbündel über  $M \times M'$  mit Fasertyp  $F \times F'$ .

*Beweis.* Seien  $\phi_\alpha$  bzw.  $\phi'_{\alpha'}$  lokale Trivialisierungen von  $E$  bzw.  $E'$  zu einer offenen Überdeckung  $U_\alpha$  von  $M$  bzw.  $U'_{\alpha'}$  von  $M'$ . Die zugehörigen Übergangsfunktionen nennen wir  $\mu_{\alpha\beta}$  und  $\mu'_{\alpha'\beta'}$ . Dann ist  $\{U_\alpha \times U'_{\alpha'}\}_{(\alpha,\alpha')}$  eine offene Überdeckung von  $M \times M'$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{(\alpha,\alpha')} &: (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha \times U'_{\alpha'}) \rightarrow U_\alpha \times F \times U'_{\alpha'} \times F' \cong U_\alpha \times U'_{\alpha'} \times F \times F' \\ &(e, e') \mapsto (\phi_\alpha(e), \phi'_{\alpha'}(e')). \end{aligned}$$

Dann ist  $\tilde{\phi}_{(\alpha,\alpha')}$  ein Diffeomorphismus mit  $\text{pr}_{U_\alpha \times U'_{\alpha'}} \circ \tilde{\phi}_{(\alpha,\alpha')} = (\pi, \pi')$  und damit ist  $E \times E' \times M \times M'$  per Definition ein Faserbündel.  $\square$

**II.1.2.4. Summe zweier Faserbündel**

$\pi: E \rightarrow M$  und  $\pi': E' \rightarrow M$  über der gleichen Basis und mit Fasertyp  $F$  bzw.  $F'$ . Dann ist

$$\tilde{\pi}: E \oplus E' := \{(e, e') \in E \times E' \mid \pi(e) = \pi'(e')\} \rightarrow M$$

ist ein Faserbündel mit Fasertyp  $F \times F'$ .

*Beweis.* Es ist  $\tilde{\pi}^{-1}(x) = E_x \times E'_x$ . Seien  $\phi_\alpha$  bzw.  $\phi'_\alpha$  lokale Trivialisierungen von  $E$  bzw.  $E'$  zu einer offenen Überdeckung  $U_\alpha$  von  $M$ . Sei  $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow F$  definiert durch  $\phi_\alpha(e_x) = (x, \psi_\alpha(e_x))$  und analog  $\psi'_\alpha$ . Wir setzen  $\tilde{\phi}_\alpha: (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \times F'$ ,  $(e_x, e'_x) \mapsto (x, \psi_\alpha(e_x), \psi'_\alpha(e'_x))$ . Damit ist  $\tilde{\pi}: E \oplus E' \rightarrow M$  wieder ein Faserbündel.  $\square$

**II.1.2.5. Unterbündel**

Sei  $\pi: E' \rightarrow M$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$ . Sei  $E \subset E'$  eine Teilmenge, so dass  $\pi|_E: E \rightarrow M$  wieder ein Faserbündel ist, dann nennen wir  $E$  ein *Unterbündel* von  $E'$ .

**Beispiel II.1.16.**

- (i) Ist  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit, dann ist  $TM$  ein Unterbündel vom trivialen Bündel  $T\mathbb{R}^n|_M \cong M \times \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Das tautologische Geradenbündel  $\tau$  über  $\mathbb{K}P^n$  (s. Beispiel II.1.2) ist ein Unterbündel des trivialen Bündels  $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{pr_1} \mathbb{K}P^n$ .

**II.1.2.6. Pullbackbündel**

**Satz II.1.17.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$  und  $f: M' \rightarrow M$  eine glatte Abbildung. Dann ist das Pullbackbündel definiert durch

$$f^*E := \{(x, e) \in M' \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$$

mit  $\pi': f^*E \rightarrow M'$ ,  $(x, e) \mapsto x$ , ein Faserbündel über  $M'$  mit Fasertyp  $F$ .

Insbesondere definiert

$$\begin{array}{ccc} (x, e) \in f^*E & \xrightarrow{pr_2} & e \in E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in M' & \xrightarrow{f} & f(x) \in M \end{array}$$

einen Bündelmorphismus, der für alle  $x \in M$  die Faser  $(f^*E)_x$  diffeomorph auf  $E_{f(x)}$  abbildet.

Hier ist nicht sofort a priori klar, dass  $f^*E$  eine Mannigfaltigkeit ist. Deshalb werden wir hier im Beweis über das Bündeltrivialisierungslemma gehen.

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

*Beweis.* Seien  $\mu_{\alpha\beta}$  die Übergangsfunktionen von  $E$  zur offenen Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$ . Dann ist  $U'_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$  eine offene Überdeckung von  $M'$ . Es gilt  $f \circ \pi' = \pi \circ \text{pr}_2$  und damit  $(\pi')^{-1}(U'_\alpha) = (\pi')^{-1} \circ f^{-1}(U_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha)$ . Wir setzen

$$\phi'_\alpha := (\pi', \text{pr}_2 \circ \phi_\alpha \circ \text{pr}_2): (\pi')^{-1}(U'_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U'_\alpha \times F.$$

Damit ist automatisch  $\text{pr}_1 \circ \phi'_\alpha = \pi'$  und  $(\pi')^{-1}(x) \cong E_{f(x)}$ . Weiterhin ist  $\phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1} = \text{Id} \times (\mu'_{\beta\alpha} := \mu_{\beta\alpha} \circ f)$ , denn für  $(x, e) \in (\pi')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  (und damit ist insbesondere  $f(x) = \pi(e)$ ) und  $\phi'_\alpha(x, e) =: (x, v)$  gilt

$$\begin{aligned} \phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, v) &\stackrel{(x,v)=\phi'_\alpha(x,e)=\text{pr}_2 \circ \phi_\alpha(e))}{=} \phi'_\beta(x, e) = (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta(e)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha(e)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(\pi(e) = f(x), v)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ (f(x), \mu_{\beta\alpha}(f(x))v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(f(x))v). \end{aligned}$$

Mit Satz II.1.15 folgt, dass  $f^*E$  ein Faserbündel ist.  $\square$

Als nächstes betrachten wir eine Charakterisierung des Pullbackbündels:

**Lemma II.1.18.** *Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Faserbündel und  $f: M' \rightarrow M$ . Dann ist  $f^*E$  das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Faserbündel, für welches es einen Faserbündelmorphismus  $g: f^*E \rightarrow E$  über  $f: M' \rightarrow M$  gibt, so dass  $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$  für alle  $x \in M'$  ein Diffeomorphismus ist.*

*Beweis.* Sei  $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M'$  ein Faserbündel und  $g: \tilde{E} \rightarrow E$  ein Faserbündelmorphismus wie oben gefordert. Betrachten wir  $G: \tilde{E} \rightarrow f^*E$ ,  $e' \mapsto (\tilde{\pi}(e'), g(e'))$ . Dann bildet  $G$  in  $f^*E$  ab, da  $g$  Faserbündelmorphismus über  $f$  ist und damit  $f(\tilde{\pi}(e')) = \pi(g(e'))$  gilt. Die Abbildung  $G$  ist ein Faserbündelmorphismus und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} e' \in \tilde{E} & \xrightarrow{G} & (\tilde{\pi}(e'), g(e')) \in f^*E \\ \downarrow g & \swarrow \text{pr}_2 & \\ g(e') \in E & & \end{array}$$

kommutiert faserweise. Insbesondere ist damit  $G$  auf jeder Faser ein Diffeomorphismus und damit ist das Faserbündel  $\tilde{E}$  isomorph zu  $f^*E$ .  $\square$

Für Faserbündel gelten folgende Rechenregeln:

**Lemma II.1.19.** *Seien  $E, E_i$  Faserbündel über  $M$  und  $f: M' \rightarrow M$ ,  $f': M'' \rightarrow M'$  glatt. Dann haben wir folgende Bündelisomorphismen:*

$$(i) (f')^* f^* E \cong (f \circ f')^* E$$

$$(ii) \text{Id}^* E \cong E$$

(iii)  $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$

(iv) Ist  $\iota: N \hookrightarrow M$  eine Einbettung, dann ist  $\iota^*E \cong E|_N$ .

*Beweis.* Direkt klar auf dem Level der Übergangsfunktionen. □

**Beispiel II.1.20.** (i) Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Faserbündel und  $f: M' \rightarrow M$ . Besteht das Bild von  $f$  nur aus einem Punkt  $y \in M$ . Dann ist  $f^*E$  isomorph zum trivialen Bündel  $M' \times \pi^{-1}(y)$ .

(ii) Sei  $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  die Quotientenabbildung. Dann ist  $q^*T\mathbb{R}P^n$  isomorph zu  $TS^n$ .

(iii) Sei  $\pi: E \rightarrow S^1$  das Möbiusband und  $f: z \in S^1 \rightarrow z^2 \in S^1$ . Dann ist  $f^*E$  das triviale Bündel, vgl. ÜA 4.

**Satz II.1.21.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Faserbündel. Sei  $f: [0,1] \times M' \rightarrow M$  eine glatte Abbildung. Setze  $f_t := f(t, \cdot)$ . Also ist  $f_0$  glatt homotop zu  $f_1$ . Dann gilt  $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$ .

*Beweis.* Es gilt  $f^*(E)|_{\{t\} \times M'} \cong f_t^*(E)$ . Damit folgt der Rest aus Satz II.1.12. □

**Folgerung II.1.22.** Sei  $f: M \rightarrow M'$  eine glatte Homotopieäquivalenz. Dann ist

$$f^*: \{ \text{Faserbündel über } M' \text{ mit Faser } F \} \rightarrow \{ \text{Faserbündel über } M \text{ mit Faser } F \}$$

eine Bijektion. Insbesondere ist jedes Faserbündel über einer zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit trivial.

*Beweis.* Da  $f$  glatte Homotopieäquivalenz ist, gibt es  $g: M' \rightarrow M$ , so dass  $f \circ g$  homotop zu  $\text{Id}_{M'}$  und  $g \circ f$  glatt homotop zu  $\text{Id}_M$  ist. Damit ist nach letztem Satz  $g^*f^*E \cong E$  und  $f^*g^*E' \cong E'$  und somit  $g^*$  die zu dem  $f^*$  von oben inverse Abbildung. □

### II.1.2.7. Überlagerungen als weiteres Beispiel

Eine *Überlagerung* ist ein Faserbündel, so dass die zugehörige Projektion ein lokaler Homöomorphismus\* ist. Die zugehörige Faser ist dann ein diskreter Raum†.

**Beispiel II.1.23.**

(i)  $\pi: S^1 \rightarrow S^1, z \rightarrow z^k$ , ist eine Überlagerung mit Faser  $\mathbb{Z}_k$ .

(ii)  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 = [0,1]/\{0 \sim 1\}, x \rightarrow x \bmod 1$ , ist eine Überlagerung mit Faser  $\mathbb{Z}$ .

## II.2. Vektorbündel

Wir haben in Abschnitt II.1 als Spezialfall von Faserbündeln schon Vektorbündel definiert, siehe Definition II.1.4. Hier wollen wir nun mehr Eigenschaften von solch speziellen Faserbündeln diskutieren.

Im Folgenden sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über dem Körper  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  vom Rang  $r$ ,  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  und  $\phi_\alpha$  lokale Trivialisierungen von  $E$ .

\*lokaler Homöomorphismus  $f: A \rightarrow B$ : Zu jedem  $a \in A$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  und eine offene Menge  $V \subset B$ , so dass  $f|_U: U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist.

† diskreter Raum = abzählbare Menge mit diskreter Topologie

### II.2.1. Schnitte

Die Menge der glatten Schnitte von  $E$ ,

$$\Gamma(E) := \{s \in C^\infty(M, E) \mid \pi \circ s = \text{Id}_M\},$$

ist im Gegensatz zum allgemeinen Faserbündel nie leer, da  $E$  auf jeder Faser eine Vektorraumstruktur trägt. Deshalb gibt es insbesondere den Nullschnitt  $s(x) = 0 \in E_x$ . Aber jedes Vektorbündel hat sogar immer unendlich viele Schnitte – wie sieht man das: Lokal (d.h. über  $U_\alpha$ ) gibt es immer unendlich viele Schnitte – z.B. die konstanten Schnitte:  $x \in U_\alpha \mapsto c_\alpha \in \mathbb{K}^r$ , die man mittels einer Zerlegung der Eins zu einem glatten Schnitt von ganz  $E$  zusammenkleben kann. Dazu sei  $\rho_\alpha$  eine zu  $\{U_\alpha\}$  untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir setzen  $s(x) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x) \phi_\alpha^{-1}(x, c_\alpha)$ . Dann ist  $s: M \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = \text{Id}$ . Da die  $\rho_\alpha$  und  $\phi_\alpha$  glatt sind, ist auch  $s$  glatt.

**Bemerkung II.2.1.**  $\Gamma(E)$  ist ein  $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modul und damit insbesondere ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (Vektorraumstruktur:  $(fs + s')(p) := f(p)s(p) + s'(p)$  für  $s, s' \in \Gamma(E)$  und  $f \in C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{K})$ ).

Da Vektorbündel lokal trivial sind, ist  $\Gamma(E)$  lokal frei erzeugt:

Sei  $U \subset M$  eine offene Teilmenge, so dass  $E|_U$  lokal trivial ist, also  $\phi_U: E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$ . Dann erzeugen z.B.  $s_i(x) := \phi_U^{-1}(x, e_i)$  für  $e_i$  eine Basis von  $\mathbb{R}^r$  frei den Modul  $\Gamma(E|_U)^*$ . Eine Menge von  $s_i$ , die  $\Gamma(E|_U)$  frei erzeugen und für die die  $s_i(x)$  für alle  $x \in U$  eine Basis von  $E_x$  sind, nennen wir *lokalen Rahmen*<sup>†</sup>.

Ist  $M$  kompakt, dann ist  $\Gamma(E)$  damit auch endlich erzeugt<sup>‡</sup>, da  $E$  dann mittels endlich vieler lokaler Trivialisierungen überdeckt werden kann. Aber i.A. ist  $\Gamma(E)$  nicht frei erzeugt, vgl. Satz II.2.19.

**Lemma II.2.2.** *Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel ist genau dann trivial (d.h. isomorph als Vektorbündel zu  $M \times \mathbb{K}^r \rightarrow M$  für ein  $r > 0$ ), wenn es  $r$  Schnitte  $s_1, \dots, s_r$  gibt, so dass  $s_1(x), \dots, s_r(x)$  für jedes  $x \in M$  linear unabhängige Vektoren in  $E_x$  sind.*

*Beweis.* Habe  $E$  solche Schnitte  $s_i$ . Dann definieren wir die glatte Abbildung  $h: M \times \mathbb{K}^r \rightarrow E$  durch  $(x, t^1, \dots, t^r) \mapsto \sum t^i s_i(x)$ . Das ist ein linearer Isomorphismus in jeder Faser und glatt. Nach folgendem Lemma ist auch  $h^{-1}$  glatt und damit  $h$  ein Vektorbündelisomorphismus.  $\square$

**Lemma II.2.3.** *Eine glatte Abbildung  $f: E \rightarrow E'$  zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorbündeln  $\pi: E \rightarrow M$  bzw.  $\pi': E' \rightarrow M$ , welche für jedes  $x \in M$  die Faser  $\pi^{-1}(x)$  linear isomorph auf  $(\pi')^{-1}(x)$  abbildet, ist ein Vektorbündelisomorphismus.*

\*Erzeugen heißt, dass es für jeden Schnitt  $s \in \Gamma(E|_U)$  Funktionen  $a^i \in C^\infty(U)$  mit  $s(x) = \sum a^i(x) s_i(x)$  für alle  $x \in U$  gibt. Frei erzeugen heißt, dass diese  $a^i$  eindeutig bestimmt sind – und damit ist insbesondere  $s_i(x)$  eine Basis von  $E_x$  für alle  $x \in U$ .

<sup>†</sup>engl. local frame

<sup>‡</sup>Ein  $R$ -Modul  $P$  ist endlich erzeugt, wenn es  $a_1, \dots, a_n \in P$  gibt mit  $P = \{r^i a_i \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$ .

*Beweis.* Aus den Voraussetzungen folgt direkt, dass  $f$  bijektiv ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass auch  $f^{-1}$  glatt ist.

Da das eine lokale Aussage ist, reicht es offene Teilmengen  $U \subset M$  zu betrachten, über die  $E$  und  $E'$  trivial sind (die zugehörige Trivialisierungen seien  $\phi$  und  $\phi'$ ). Damit ergibt sich die Abbildung  $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}: U \times \mathbb{K}^r \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ ,  $(u, v) \mapsto (u, g(u)(v))$  für ein  $g \in C^\infty(U, \text{Gl}_r(\mathbb{K}))$ . Dann ist auch  $g^{-1}: u \in U \mapsto (g(u))^{-1} \in \text{Gl}_r(\mathbb{K})$  glatt und damit auch die Inverse  $h^{-1}(u, v) = (u, g(u)^{-1}(v))$ . Also ist auch  $f^{-1}|_{\pi^{-1}(U)}$  glatt und somit auch  $f^{-1}$ .  $\square$

Im Möbiusband hat jeder Schnitt mindestens eine Nullstelle. D.h. hier sehen wir nochmal (nach vorletztem Lemma), dass das Möbiusband als Vektorbündel nicht trivial ist.

### II.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln

Da Vektorbündel ein Spezialfall von Faserbündeln sind, liegt es nahe mal zu überprüfen, welche der Konstruktionen von Faserbündel aus Abschnitt II.1.1 und II.1.2 auch Vektorbündel liefern. D.h. muss man Zusatzforderungen stellen (und wenn ja, welche sind dann sinnvoll), damit die resultierenden Faserbündel wieder Vektorbündel sind?

Das erste, was wir bemerken (vgl. Übungsaufgabe 3), ist: Im Falle eines (reellen) Vektorbündels von Rang  $r$  sind die  $\mu_{\alpha\beta}$  glatte Abbildungen von  $U_\alpha \cap U_\beta$  in  $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$ .

Wir erhalten folgende angepassten Sätze – die Änderungen sind in **dunkelrot** gekennzeichnet. Wir beschränken uns hier auf reelle Vektorbündel, die Aussagen für komplexe Vektorbündel gelten ganz analog mit  $\text{Gl}_r(\mathbb{C})$  statt  $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$ .

**Satz II.2.4.** (Vektorbündelversion von Satz II.1.8 - vgl. Übungsaufgabe 3) Sei  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Seien  $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$  glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen, dann gibt es (bis auf Isomorphie (hier jetzt immer Isomorphie von Vektorbündeln, vgl. Definition II.1.4)) ein eindeutiges reelles Vektorbündel, welches diese  $\mu_{\alpha\beta}$  als Übergangsfunktionen hat.

**Folgerung II.2.5.** Ist  $\pi: E \rightarrow M$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $F = \mathbb{R}^r$ . Ist das Bild der Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  (zu einer Überdeckung durch lokale Trivialisierungen) Teilmenge von  $\text{Gl}_r(\mathbb{R}) \subset \text{Diff}(\mathbb{R}^r)$ , dann ist  $E$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $r$ .

**Satz II.2.6.** (Vektorbündelversion von Satz II.1.9) Gegeben zwei **reelle Vektorbündel**  $E, E'$  über  $M$  vom Rang  $r$ . Zu einer gegebenen Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$  seien die Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  bzw.  $\mu'_{\alpha\beta}$ . Dann sind die Vektorbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen  $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \text{Gl}_r(\mathbb{R}))$  mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Insbesondere ist das Vektorbündel  $E$  trivial, wenn  $\mu_{\beta\alpha} = h_\beta h_\alpha^{-1}$  für geeignete  $h_\alpha$  gilt.

**Satz II.2.7.** (Vektorbündelversion von Satz II.1.12) Sei  $\pi: E \rightarrow M \times [0, 1]$  ein **Vektorbündel vom Rang  $r$** . Dann sind die Einschränkungen  $E|_{M \times \{0\}}$  und  $E|_{M \times \{1\}}$  isomorphe **Vektorbündel vom Rang  $r$**  über  $M$ .

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

**Folgerung II.2.8.** (Vektorbündelversion von Folgerung II.1.13) Seien  $E_i \rightarrow M$ ,  $i = 0, 1$ , *reelle Vektorbündel vom Rang  $r$*  mit lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha^i$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ . Für alle  $\alpha, \beta$  seien die  $\mu_{\alpha\beta}^0$  und  $\mu_{\alpha\beta}^1$  homotope Abbildungen mit Homotopie  $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ , so dass zu jeder Zeit  $t \in [0, 1]$  die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind  $E_0$  und  $E_1$  als Vektorbündel isomorph.

### II.2.2.1. Operationen auf Vektorbündel

**Satz II.2.9** (Bündel-Trivialisierungslemma – Vektorbündelversion von Satz II.1.15). Sei  $\pi: E \rightarrow M$  eine surjektive Abbildung. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Sei  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  gegeben zusammen mit bijektiven Abbildung  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  mit  $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$  gegeben. Die Abbildungen

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$$

seien glatt und der Form

$$\phi_\beta \circ (\phi_\alpha)^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$$

für glatte Abbildungen  $\mu_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ . Dann trägt  $E$  eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass  $\pi: E \rightarrow M$  *reelles Vektorbündel vom Rang  $r$*  und lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha$  ist.

Die Operationen auf Faserbündel aus Abschnitt II.1.2 auf Vektorbündel angewendet, geben auch wieder ein Vektorbündel. Nur fürs Untervektorbündel muss man natürlich zusätzlich fordern, dass  $\pi|_E$  selbst ein Vektorbündel ist:

**Beispiel II.2.10.** Sei  $\psi: E \rightarrow E'$  ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen  $\pi: E \rightarrow M$  und  $\pi': E' \rightarrow M'$  über  $f: M \rightarrow M'$ , so dass  $\psi|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  für alle  $x \in M$  den gleichen Rang hat. Dann ist  $\ker \psi := \{e \mid \psi(e) = 0 \in E'_{\pi'(e)}, e \in E\}$  ein Untervektorbündel von  $E$ . Gleiches gilt dann auch für  $\text{im } \psi := \{e' \in E' \mid \exists e \in E : \psi(e) = e'\}$ .

Damit  $\ker \psi$  ein Untervektorbündel von  $E$  muss die konstante Rang Bedingung erfüllt sein, da sonst die Fasern keine konstante Dimension hätten. Und die konstante Rang Bedingung ist auch nicht automatisch: Seien  $E = E' = \mathbb{R}^2$  das triviale Geradenbündel über  $M = \mathbb{R}$  ( $\pi = \text{pr}_1$ ). Sei  $f = \text{Id}$  und  $\psi: M \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow M \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y \in \mathbb{R}) \mapsto (x, x \cdot y)$ . Dann ist

$$(\ker \psi)|_x = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \mathbb{R} & x = 0. \end{cases}$$

Sehr oft wird davon insbesondere die direkte Summe  $E \oplus E'$  zweier Vektorbündel  $E, E'$  über  $M$  (Im Kontext von Vektorbündeln auch *Whitney-Summe* genannt.) verwendet. Hier gilt

$$\Gamma(E \oplus E') \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(E'),$$

wobei  $\cong$  hier isomorph als  $C^\infty(M)$ -Modul bedeutet.

Für den Pullback von Vektorbündel gilt folgende Version von Lemma II.1.18.

**Lemma II.2.11.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein **Vektorbündel** und  $f: M' \rightarrow M$ . Dann ist  $f^*E$  das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte **Vektorbündel**, für welches es einen Bündelmorphismus  $g: f^*E \rightarrow E$  gibt, so dass  $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$  für alle  $x \in M'$  ein **Vektorraumisomorphismus** ist.

Zusätzlich sind die Bündelmorphismen in Lemma II.1.19 für Vektorbündel schon Vektorbündelisomorphismen. Außerdem gibt es für Vektorbündel noch folgende Operationen:

### II.2.2.2. Duales Vektorbündel

Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über  $\mathbb{K}$  vom Rang  $r$  mit lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$ .

Sei  $E^* := \bigsqcup_{x \in M} E_x^*$ , wobei  $E_x^*$  das Dual des Vektorraums  $E_x = \pi^{-1}(x)$  ist. Wir definieren

$$\pi': E^* \rightarrow M \text{ als } \pi'(L_x \in E_x^*) = x$$

sowie\*

$$\begin{aligned} \phi'_\alpha: (\pi')^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x^* \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r)^* \\ L_x \in E_x^* &\mapsto (\pi'(L_x) = x, (v \in \mathbb{K}^r \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, v)))) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Übergangsfunktionen  $\mu'_{\beta\alpha}$  sind durch  $\mu'_{\beta\alpha} = (\mu_{\alpha\beta})^*$  gegeben, wobei  $*$  die duale Abbildung meint, also  $\mu'_{\beta\alpha}(x)(f \in (\mathbb{K}^r)^*)(v \in \mathbb{K}^r) = (\mu_{\alpha\beta}(x))^* f(v) = f(\mu_{\alpha\beta}(x)(v))$ . Damit ist insbesondere  $\mu'_{\beta\alpha}(x) \in \text{Gl}_r(\mathbb{R})$  und hängt glatt von  $x$  ab.

Nachrechnen der Form von  $\mu'_{\beta\alpha}$ :

$$\begin{aligned} (x, \mu'_{\beta\alpha}(x)(f \in (\mathbb{K}^r)^*)) &\stackrel{!}{=} \phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, f) \stackrel{f(v)=L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, v))}{=} \phi'_\beta(L_x) \\ &= (x, (v \mapsto L_x(\phi_\beta^{-1}(x, v)))) = (x, (v \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, v)))) \\ &= (x, (v \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, \mu_{\alpha\beta}(x)v)))) = (x, (v \mapsto f(\mu_{\alpha\beta}(x)v))) \end{aligned}$$

und es gilt  $\Gamma(E^*) \cong (\Gamma(E))^*$ . Nach Satz II.2.9 macht dies  $E^* \rightarrow M$  zu einem Vektorbündel. Wir nennen es das *zu  $E$  duales Bündel*.

**Beispiel II.2.12** (Kotangentialbündel  $T^*M := (TM)^*$ ). Ein Element  $\alpha \in \Gamma(T^*M) =: \Omega^1(M)$ , genannt *1-Form*, ist eine glatte Abbildung mit  $\alpha(x) \in T_x^*M := (T_xM)^*$ . In lokalen Koordinaten  $x^i$  auf  $U$  hat  $TM$  die lokale Basis  $\partial_{x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Man definiert  $dx^i: TU \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$  und  $C^\infty(U)$ -lineare Fortsetzung. Dann hat  $\alpha$  die lokale Darstellung  $\alpha_i dx^i$  für  $\alpha_i \in C^\infty(U)$ , vgl. [2, Kap. II.10.3].

Ähnlich wie Einsformen lassen sich auch Tensoren und Differentialformen auf  $M$ , vgl. [2, Kap. II.10.3] als Schnitte eines geeigneten Vektorbündels darstellen/einführen:

---

\*Strenggenommen sollte folgende Trivialisierung per Definition nach  $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$  gehen. Das kann man erreichen, indem man noch einen Isomorphismus  $(\mathbb{K}^r)^* \rightarrow \mathbb{K}^r$  nachschaltet. Das fällt bei Berechnung der Übergangsfunktionen aber sowieso wieder raus.

### II.2.2.3. Tensorprodukt von Vektorbündeln (= Whitney-Produkt)

Seien  $\pi: E \rightarrow M$  bzw.  $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$  Vektorbündel über  $\mathbb{K}$  vom Rang  $r$  bzw.  $\tilde{r}$ . Seien  $\phi_\alpha$  bzw.  $\tilde{\phi}_\alpha$  lokale Trivialisierungen von  $E$  bzw.  $\tilde{E}$  bzgl. einer offenen Überdeckung  $U_\alpha$  von  $M$ .

Wir setzen  $E \otimes \tilde{E} := E \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E} := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x$  und  $\pi^\otimes: e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \mapsto x \in M$ . Die Topologie und glatte Struktur auf  $E \otimes \tilde{E}$  wird durch

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^\otimes: (\pi^\otimes)^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\tilde{r}} \cong \mathbb{K}^{r\tilde{r}}) \\ e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x &\mapsto (x, \psi_\alpha(e_x) \otimes \tilde{\psi}_\alpha(\tilde{e}_x)) \end{aligned}$$

bestimmt mit  $\phi_\alpha^\otimes(e \in E_x) = (x, \psi_\alpha(e))$ . Die neuen Übergangsfunktionen sind einfach das Tensorprodukt der alten. Das resultierende Bündel  $E \otimes \tilde{E}$  nennen wir das *Tensorprodukt* beider Bündel. Es gilt (als Isomorphie von  $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Moduln)

$$\Gamma(E \otimes_{\mathbb{K}} E') \cong \Gamma(E) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{K})} \Gamma(E').$$

**Bemerkung II.2.13.** Ist  $s_\alpha$  bzw.  $s'_\alpha$  ein lokaler Rahmen von  $E$  bzw.  $E'$  über  $U_\alpha$ , dann ist  $s_\alpha \otimes s'_\alpha$  ein lokaler Rahmen von  $E \otimes E'$ . Für

$$T_r^s M := \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{s\text{-mal}}$$

– dem  $(r, s)$ -Tensorbündel von  $M$  – ist damit  $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$  für  $1 \leq i_k, j_\ell \leq m$  ein lokaler Rahmen. So ist z.B.  $s \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$  in lokalen Koordinaten  $x^i$  über  $U$  durch  $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j$  für  $a_j^i \in C^\infty(U)$  gegeben und kann wegen  $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j = (a_j^i \partial_{x^i}) \otimes dx^j = \partial_{x^i} \otimes (a_j^i dx^j)$  auch als Schnitt in  $\Gamma(TM) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma^*(TM)$  angesehen werden.

**Beispiel II.2.14** (Riemannsche Metriken). Eine Riemannsche Metrik  $g$  ist in jedem Punkt  $x \in M$  eine positiv definite symmetrische Bilinearform  $g_x$ , welche glatt vom Punkt  $x$  abhängt, vgl. [2, Def. II.1.1]. Dort mussten wir noch direkt in lokalen Karten hinschreiben, was es bedeutet, dass  $g_x$  glatt vom Punkt abhängt. Mit der Bündelsprache haben wir jetzt, dass eine Riemannsche Metrik insbesondere  $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \cong \Gamma(T^*M) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma(T^*M)$  – ein  $(0, 2)$ -Tensor – ist.

**Bemerkung II.2.15.** Der Pullback aus Abschnitt II.1.2.6 erfüllt für Vektorbündel noch zusätzlich  $f^*(E_1 \otimes E_2) = f^*E_1 \otimes f^*E_2$ . Das sieht man wieder direkt auf dem Level der Übergangsfunktionen.

Wie bei Vektorräumen gibt es eine Paarung von einem Vektorbündel mit seinem dualen:

$$\Gamma(E^* \otimes E) \rightarrow \Gamma(M \times \mathbb{K} \rightarrow M), (\alpha \otimes s)(x \in M) := (x, \underbrace{\alpha(x)}_{\in E_x^*} \underbrace{(s(x))}_{\in E_x}) \in \{x\} \times \mathbb{K}.$$

### II.2.2.4. Homomorphismenbündel

Unter den gleichen Voraussetzungen und Notationen wie im Tensorproduktabschnitt von oben, setzen wir

$$\text{Hom}(E, \tilde{E}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \text{ und } \hat{\pi}: L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \mapsto x \in M.$$

Die Topologie und glatte Struktur auf  $\text{Hom}(E, \tilde{E})$  wird durch

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\alpha: \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \\ L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) &\mapsto (x, \Psi_x) \end{aligned}$$

mit  $\Psi_x(v \in \mathbb{K}^r) := (\text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}_\alpha \circ L_x \circ \phi_\alpha^{-1})(x, v)$  bestimmt. Es ist  $\text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \cong (\mathbb{K}^*)^r \otimes \mathbb{K}^{\tilde{r}}$ . Die Übergangsfunktionen sind  $\mu_{\beta\alpha}^* \otimes \tilde{\mu}_{\alpha\beta}$ , wobei wir die letzte Isomorphie genutzt haben. Das resultierende Bündel  $\text{Hom}(E, \tilde{E})$  nennen wir das *Homomorphismenbündel* beider Bündel. Es ist vom Rang  $r\tilde{r}$ , und es gilt  $\text{Hom}(E, \tilde{E}) \cong E^* \otimes \tilde{E}$ .

Ist  $E = \tilde{E}$ , setzen wir  $\text{End}(E) := \text{Hom}(E, E)$  und nennen es das *Endomorphismenbündel* von  $E$ .

**Beispiel II.2.16** (Riemannscher Krümmungstensor).  $R \in \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM \otimes TM \otimes TM, TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$  – ein (1,3)-Tensor.

### II.2.2.5. Äußeres Produkt

Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$ , lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$ . Wir setzen

$$\Lambda^k(E) := \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(E_x) \text{ und definieren } \hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M \text{ durch } \hat{\pi}^{-1}(x) = \Lambda^k(E_x).$$

Hier ist  $\Lambda^k(E_x)$  das  $k$ -fache äußere Produkt des Vektorraums  $E_x$ , vgl. [2, S. 75].

Ist  $e_i$  eine Basis von  $\mathbb{K}^r$ . Dann ist  $s_{\alpha,i}(x) := \phi_\alpha^{-1}(x, e_i)$  ein lokaler Rahmen von  $E$ . Wir setzen

$$a^{i_1 < \dots < i_k} s_{\alpha, i_1}(x) \wedge \dots \wedge s_{\alpha, i_k}(x)^* \in \Lambda^k(E_x) \subset \Lambda^k(E)|_{U_\alpha} \mapsto a^{i_1 < \dots < i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

zu einer wohl-definierten Abbildung  $\Lambda^k \phi_\alpha: \Lambda^k(E)|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \Lambda^k(\mathbb{K}^r)$  zusammen, die faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist. Mit Satz II.1.15 folgt, dass  $\hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M$  ein Vektorbündel vom Rang  $\binom{r}{k}$  ist.

Wir setzen  $\Lambda^0(E) := M \times \mathbb{K}$  – das triviale Vektorbündel über  $M$  vom Rang 1.

Für  $k > 0$  ist  $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k(E^*))$  eine Abbildung mit  $\alpha(x \in M) \in \Lambda^k(E_x^*)$ , also  $\alpha(x): E_x \times \dots \times E_x \rightarrow \mathbb{K}$  ist multilinear und alternierend, und die Abhängigkeit von  $x$  ist glatt, d.h. man kann  $\alpha$  auch als Abbildung  $\alpha: \Gamma(E)^k = \Gamma(E) \times \dots \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$ , die multilinear (bzgl. der  $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Modul Struktur von  $\Gamma(E)$ ), also  $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -linear in allen Komponenten) und alternierend ist, auffassen. Weiterhin ist  $\Gamma(\Lambda^0 E) = C^\infty(M, \mathbb{K})$  und wir setzen  $\Gamma(\Lambda^* E) = \bigoplus_{k=0}^\infty \Gamma(\Lambda^k E)$ .

\*Wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention.

**Beispiel II.2.17.**

(i) Im Spezialfall  $E = T^*M$  kürzt man ab:  $\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M)$  und  $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k M)$ . Elemente aus  $\Omega^k(M)$  heißen  $k$ -(Differential)Formen. Sei  $\alpha \in \Omega^k(M)$ . Dann ist  $\alpha_x := \alpha(x) \in \Lambda^k T_x^*M$ . Seien  $x^i$  lokale Koordinaten auf  $U \subset M$  um  $x$ . Dann ist  $\partial_{x^i}|_x$  eine Basis von  $T_x M$  und  $dx^i|_x$  die zugehörige duale Basis von  $T_x^*M$ . Damit ist  $\alpha(x) = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1}|_x \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x$ . Variiert man  $x$ , ist  $\partial_{x^i}$  ein lokaler Rahmen von  $TU = TM|_U$  und  $dx^i$  von  $T^*U = T^*M|_U$  und damit  $\alpha|_U = a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  für  $a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ .

(ii) Das Vektorbündel  $\Lambda^m M \rightarrow M$  mit  $m = \dim M$  ist genau dann trivial, wenn  $M$  orientierbar\* ist.

*Beweis.*  $\Lambda^m M$  ist ein Vektorbündel von Rang  $\binom{m}{m} = 1$ . Sei  $\Lambda^m M$  das triviale Vektorbündel. Dann gibt es nach Lemma II.2.2 eine  $m$ -Form  $\omega$ , so dass  $\Lambda^m(T_p M) \ni \omega_p \neq 0$  für alle  $p \in M$  ist. Ein solches  $\omega$  heißt *Volumenform* von  $M$ . Damit entspricht die Behauptung der Aussage:  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn  $M$  eine Volumenform besitzt. Das haben wir in [2, Satz II.10.24] bewiesen.  $\square$

(iii) Wir betrachten die faserweise lineare Abbildung  $\iota: \Lambda^k E \rightarrow E \otimes \dots \otimes E =: E^{\otimes k}$  gegeben durch  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}$  für  $i_1 < \dots < i_k$ . Das macht  $\iota$  zu einem wohldefinierten injektiven Bündelmorphismus. So kann  $\Lambda^k E$  als Untervektorbündel von  $E^{\otimes k}$  betrachtet werden. Insbesondere ist diese Einbettung kompatibel mit der Paarung für die dualen Bündel: Es ist für  $\alpha \in \Lambda^k E_x^*$  und  $X_i \in E_x$

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \iota(\alpha)(X_1, \dots, X_k)$$

wobei  $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(X_1, \dots, X_k) = \prod_j e_{i_j}^*(X_j)$  für eine Basis  $e_i$  von  $E_x$  gilt.

(iv) Betrachten wir  $\Lambda^k T^*M \otimes E$ . Dann ist ein Schnitt eine multilineare alternierende Abbildung  $\alpha: TM \times \dots \times TM \rightarrow E$  – genannt eine  $k$ -Form mit Werten in  $E$ . Wir setzen  $\Omega^k(M, E) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$ . Da  $\Lambda^0(T^*M) \cong M \times \mathbb{R}$  und  $(M \times \mathbb{R}) \otimes E \cong E$ , können wir  $\Omega^0(M, E)$  mit  $\Gamma(E)$  identifizieren.

**II.2.2.6. Konjugiertes Vektorbündel**

Ist  $E \rightarrow M$  ein komplexes Vektorbündel. Dann ist  $\bar{E} := \sqcup_{x \in M} \bar{E}_x \rightarrow M$ ,  $\bar{e} \in \bar{E}_x \mapsto x \in M$  wieder ein komplexes Vektorbündel. Hierbei ist als Menge  $E_x = \bar{E}_x$ , aber ist  $(z, e) \mapsto ze$  die skalare Multiplikation auf  $E_x$ , dann ist die auf  $\bar{E}_x$  gegeben durch  $(z, e) \mapsto \bar{z}e$ .

**II.2.2.7. Graßmannbündel**

Sei  $E \rightarrow M$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $r$  und sei  $d \leq r$ . Für  $x \in M$  trägt  $G_d(E_x) := \{d\text{-dimensionale Untervektorräume von } E_x\}$  die Struktur einer kompakten Mannigfaltigkeit diffeomorph zu  $O(r)/(O(d) \times O(r-d))$ , vgl. Beispiel A.2.7(ii). Sei

---

\* $M$  heißt orientierbar, falls es Karten  $\kappa_i: U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^m$  von  $M$  gibt, die  $M$  überdecken, und für alle  $i, j$  und  $p \in U_i \cap U_j \subset M$  gilt  $\det d_{\kappa_i(p)}(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}) > 0$ , s. [2, Def. II.10.1].

$G_d(E) = \sqcup_{x \in M} G_d(E_x)$  zusammen mit der Projektionsabbildung  $\pi: e \in G_d(E_x) \subset G_d(E) \mapsto M$  gegeben. Um eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $G_d(E)$  zu erhalten, sei  $U_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  mit Karten  $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ . Wir setzen  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G_d(\mathbb{R}^n)$ ,  $e \mapsto (\pi(e), \{d_{\pi(e)}\kappa_\alpha(v) \mid v \in e\})$ . Die Übergangsfunktionen sind dann

$$\mu_{\beta\alpha}(x)(A \in G_d(\mathbb{R}^n)) = d_{\kappa_\alpha(x)}(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})(A).$$

Zusammen mit Satz II.2.9 ist  $G_d(E) \rightarrow M$  damit ein Vektorbündel.

### II.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel

Für Mannigfaltigkeiten\* wissen wir, dass diese immer als Untermannigfaltigkeit eines genügend hochdimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  aufgefasst werden können. Das ist der Einbettungssatz von Whitney [2, Satz I.3.40]. Wir werden nun sehen, dass man jedes Vektorbündel  $E \rightarrow M$  als Untervektorbündel eines trivialen Vektorbündels über  $M$  auffassen kann. Wir werden uns auf kompakte  $M$  einschränken:

Woche 4

**Satz II.2.18.** *Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit  $M$  kompakt. Dann gibt es ein Vektorbündel  $\pi': E' \rightarrow M$ , so dass  $E \oplus E'$  trivial ist.*

*Beweis.* Sei  $U_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ , eine endliche Überdeckung von  $M$ , so dass  $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$  gilt. Sei  $\rho^\alpha$  eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Seien  $s_i^\alpha$  ein lokaler Rahmen von  $E|_{U_\alpha}$ . Wir setzen  $t_i^\alpha := \rho^\alpha s_i^\alpha$ . Durch Fortsetzen durch 0 können wir diese  $t_i^\alpha$  als Schnitte auf ganz  $E$  auffassen. Wir betrachten den Vektorbündelhomomorphismus

$$A: M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E \quad (x, a_\alpha^i) \mapsto a_\alpha^i t_i^\alpha(x).$$

Da für jedes  $x \in M$  die  $t_i^\alpha(x)$  den Vektorraum  $E_x$  erzeugen, ist  $A_x: \{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E_x$  surjektiv. Also ist  $E$  das Bild von  $A$ .

Man kann dann zeigen, dass es einen Vektorbündelhomomorphismus  $B: E \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$  mit  $AB = \text{Id}_E$  gibt, vgl. [7, Thm. I.5.13]†. Insbesondere heißt das, dass  $B$  injektiv ist.

Sei  $E'$  der Kern von  $p := BA$ . Wir zeigen, dass  $p$  konstanten Rang hat und  $E'$  damit nach Beispiel II.2.10 ein Untervektorbündel des trivialen Bündels  $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$  ist: Es ist  $p^2 = BABA = BA = p$  – also faserweise eine Projektion.‡ Sei

$$p_x := (BA)|_{\{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})} \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})) \quad \text{und} \quad x_0 \in M.$$

Wir setzen  $f(x) = \text{Id} - p_x - 2p_{x_0}p_x \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}))$ . Dann ist  $p_{x_0}f(x) = f(x)p_x$ , womit das folgende Diagramm kommutiert: (mit  $\hat{f}(x, a) := f(x)(a)$ )

\*Bei uns immer mit abzählbarer Basis

†Faserweise ist das lineare Algebra und dann muss man noch überprüfen, dass alles so gewählt werden kann, dass es zu einem Faserbündel zusammenklebt.

‡Der folgende Beweis funktioniert für alle Vektorbündelmorphismen, die faserweise Projektionen sind, da alle Bündel lokal trivial sind.

II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

$$\begin{array}{ccc}
 M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{p} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \\
 \hat{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\
 M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{Id} \times p_{x_0}} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})
 \end{array}$$

Da  $f(x_0) = \text{Id}$  ist, ist  $f(x)$  für  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$  invertierbar und damit haben die  $p_x$  dieser Umgebung den gleichen Rang wie auch  $\text{Id} \times p_{x_0}$ .

Dann gibt  $E \oplus E' \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ ,  $(e, e') \mapsto B(e) + \iota(e')$ , mit  $\iota: E' \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$  die Inklusion, einen Vektorbündelmorphismus. Nach Konstruktion ist diese Abbildung faserweise ein Isomorphismus. Also sind  $E \oplus E'$  und  $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$  schon isomorph.  $\square$

Insbesondere liefert der letzte Satz, die erste Hälfte des Satzes von Serre-Swan:

**Satz II.2.19** (Satz von Serre-Swan). [7, Thm. I.6.18] Sei  $M$  kompakt. Der  $C^\infty(M)$ -Modul  $\Gamma(E)$  ist endlich erzeugt und projektiv\*. Andersherum gibt es zu jedem endlich erzeugten projektiven  $C^\infty(M)$ -Modul  $R$  ein Vektorbündel über  $M$ , so dass  $R \cong \Gamma(E)$  als  $C^\infty(M)$ -Modul.

### II.2.4. Bündelmetriken

In Beispiel II.2.14 haben wir Riemannsche Metriken als einen Schnitt von  $TM \otimes TM$  interpretiert, der auf jeder Faser ein Skalarprodukt ist. Ähnliche Strukturen existieren auf allen Vektorbündeln:

**Definition II.2.20.** Eine Bündelmetrik auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel  $\pi: E \rightarrow B$  ist eine glatte Abbildung  $h: E \otimes E \rightarrow \mathbb{K}$ , deren Einschränkung  $h_x: E_x \otimes E_x \rightarrow \mathbb{K}$  auf jeder Faser ein Skalarprodukt<sup>†</sup> (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) bzw. hermisches inneres Produkt<sup>‡</sup> (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) ist.

---

\*projektiver  $R$ -Modul  $P =$  Es gibt einen  $R$ -Modul  $Q$ , so dass  $P \oplus Q$  ein freier  $R$ -Modul ist.

†Skalarprodukt = positiv definite symmetrische Bilinearform

‡hermisches inneres Produkt = Sesquilinearform, antilinear in der zweiten Komponente und positiv definit

**Bemerkung II.2.21.**

- (i) Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  induziert eine Bündelmetrik  $h$  einen Isomorphismus  $E \cong E^*$  durch  $e \mapsto h(e, \cdot)$  und  $h_x: E_x \rightarrow E_x^*$  ist selbstadjungiert für  $x \in M$ . Damit ist  $h \in \Gamma(E \otimes E)^* \cong \Gamma((E \otimes E)^*) \cong \Gamma(E^* \otimes E^*) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*))$ .

Für eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  induziert die Identifizierung  $g_x: T_x M \rightarrow T_x^* M$  einen Isomorphismus  $\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ ,  $X \mapsto X^\flat := g(X, \cdot)$ , dessen Inverses mit  $\sharp$  bezeichnet wird, vgl. [2, Bsp. II.10.16].

- (ii) Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  erhalten wir analog zu (i) einen Isomorphismus  $\bar{E} \cong E^*$  durch  $e \mapsto h(\cdot, e)$ , wobei nun  $\bar{E}$  das konjugierte Vektorbündel ist.

**Bemerkung II.2.22.** Jedes Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit besitzt eine solche Bündelmetrik: Lokal nimmt man auf jeder Faser das euklidische bzw. hermitesche Produkt. Global benutzt man eine Zerlegung der Eins auf  $M$ , um die lokalen Bündelmetriken 'zusammenzukleben'. Alternativ kann man eine Einbettung von  $E$  in ein triviales Bündel nutzen, welche nach Satz II.2.18 immer existiert. Auf dem trivialen Bündel gibt es immer eine Bündelmetrik, deren Einschränkung auf  $E$  dann dort eine Bündelmetrik gibt.

Ein Skalarprodukt eines Vektorraumes ordnet jedem Untervektorraum ein eindeutiges orthogonales (bzgl. dieses Skalarproduktes) Komplement zu. Analoges gilt für Bündelmetriken auf Vektorbündeln:

**Lemma II.2.23.** (Orthogonales Bündel) Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Untervektorbündel von  $\pi: E' \rightarrow M$ , und sei  $h$  eine Bündelmetrik auf  $E'$ . Dann ist

$$E^\perp := \{e' \in E' \mid h(e, e') = 0 \text{ für alle } e \in E \text{ mit } \pi(e) = \pi(e')\} \rightarrow M, \quad e' \mapsto \pi(e')$$

ein Untervektorbündel von  $E$ . Insbesondere gilt  $E \oplus E^\perp \cong E'$ .

*Beweis.* Falls  $E^\perp$  ein Untervektorbündel ist, dann gibt  $E \oplus E^\perp \rightarrow E'$ ,  $(e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2$  nach Lemma II.2.3 den Vektorbündelisomorphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass  $E^\perp$  lokal trivial und damit ein Untervektorbündel ist. Da das eine lokale Frage ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $E$  und  $E'$  trivial sind, also  $E = U \times \mathbb{K}^r$  und  $E' = U \times \mathbb{K}^t$  ( $r \leq t$ ). Seien  $s_1, \dots, s_r$  linear unabhängige Schnitte von  $E|_U$ . Wir können diese (in einer Umgebung  $U'$  von  $x \in U$ ) zu einer Menge von  $t$  linear unabhängigen Schnitten von  $E'|_{U'}$  erweitern: Sei  $x \in U$ . Wir erweitern  $s_1(x), \dots, s_r(x)$  mittels Vektoren  $s_{r+1}(x), \dots, s_{r+u}(x)$  zu einer Basis von  $(\pi')^{-1}(x) \subset E'$ . Für alle  $y \in U$  setzen wir  $s_i(y) = s_i(x)$  für  $t \geq i > r$ . Wegen Stetigkeit der Determinante der in einer lokalen Trivialisierung um  $x$  dargestellten  $s_i$  sind die  $s_1(y), \dots, s_{r+u}(y)$  in einer Umgebung  $U'$  von  $x$  noch immer linear unabhängig (aber i.A. nicht orthogonal). Mittels Gram-Schmidt und der Bündelmetrik erhalten wir nun aus den  $s_i$  punktweise neue  $s'_i$ . Da die Bündelmetrik glatt von der Faser abhängt, sieht man an den expliziten Formeln für Gram-Schmidt, dass die  $s'_i$  wieder glatte Schnitte sind. Weiterhin sind nach Konstruktion  $s'_1$  bis  $s'_r$  wieder Schnitte in  $E|_{U'}$  und die  $s'_{r+1}$  bis  $s'_s$  sind Schnitte in  $E^\perp|_{U'}$ . Damit ist  $E^\perp$  lokal trivial.  $\square$

## II. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

**Beispiel II.2.24.** Sei  $X^n \subset M^m$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Sei  $p \in X$ . Dann haben wir die orthogonale (bzgl.  $g_p$ ) Zerlegung  $T_p M = T_p X \oplus N_p X$ , wobei  $N_p X := \{v \in T_p M \mid v \perp T_p X\}$  der Normalenraum ist bzgl. auf dem Level der Bündel, die orthogonale Zerlegung:  $TM = TX \oplus NX$ ;  $NX$  ist das Normalenbündel von  $M$  (bzgl.  $g$ ).

**Beispiel II.2.25.** Sei  $\pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ,  $(\ell, v) \mapsto \ell$ , das tautologische Geradenbündel aus Beispiel II.1.2.iii. Dieses ist ein Untervektorbündel vom trivialen Bündel  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Das letzte Bündel versehen wir mit der Bündelmetrik, die faserweise einfach das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Beispiel II.2.26.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist  $g$  eine Bündelmetrik auf  $TM$ . Wir wollen nun eine Bündelmetrik  $g^*$  auf  $T^*M$  finden, die in gewissen Sinne dual zu  $g$  auf  $TM$  ist. Eine vernünftige Forderung ist Kompatibilität mit den musischen Operatoren: Für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  sollte gelten

$$g(X, Y) = g^*(X^\flat, Y^\flat).$$

Damit wäre  $g^*$  automatisch positiv definit. In lokalen Koordinaten  $x^i$  soll damit gelten

$$g_{ij} X^i Y^j = (g^*)^{kl} g_{kr} X^r g_{ls} Y^s,$$

also  $g_{ij} = (g^*)^{kl} g_{ki} g_{lj}$  und damit  $(g^*)^{kl} = g^{kl}$ . Insgesamt ist also  $g^* = g^{kl} \partial_{x^k} \otimes \partial_{x^l}$ . (Hier wird  $\partial_{x^k}$  mit der dualen Basis durch  $\partial_{x^k}(dx^j) := dx^j(\partial_{x^k}) = \delta_k^j$  identifiziert. D.h.  $g^*(\alpha = \alpha_i dx^i, \beta = \beta_j dx^j) = \alpha_i \beta_j g^{ij}$ .)

Allgemeiner können Bündelmetriken auf Vektorbündeln Bündelmetriken auf abgeleiteten Vektorbündeln induzieren:

**Lemma II.2.27.** Seien  $E$  bzw.  $V$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel über  $M$  mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Der Rang von  $E$  sei  $r$ . Seien  $h^E$  bzw.  $h^V$  Bündelmetriken auf  $E$  bzw.  $V$ . Für  $s_i \in \Gamma(E)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma(E^*)$ ,  $\gamma, \delta \in \Gamma(\Lambda^k E)$ ,  $\tilde{s}_i \in \Gamma(V)$ ,  $f_i \in \text{Hom}(E, V)$  und  $(e_1, \dots, e_r)$  ein orthonormaler lokaler Rahmen von  $\Gamma(E|_U)$  für  $U \subset M$  setzen wir

$$h^{E \oplus V}(s_1 \oplus \tilde{s}_1, s_2 \oplus \tilde{s}_2) = h^E(s_1, s_2) + h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$$

$$h^{E \otimes V}(s_1 \otimes \tilde{s}_1, s_2 \otimes \tilde{s}_2) = h^E(s_1, s_2) h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$$

$$h^{E^*}(\alpha, \beta)|_U = \sum_i \alpha(e_i) \overline{\beta(e_i)}$$

$$h^{\Lambda^k E}(\gamma, \delta) = \frac{1}{k!} h^{E^{\otimes k}}(\iota(\gamma), \iota(\delta)) \text{ mit } \iota \text{ wie in Bsp. II.2.17.iii.}$$

Diese erweitern sich eindeutig zu Bündelmetriken auf  $E \oplus V$ ,  $E \otimes V$ ,  $E^*$  und  $\Lambda^k E$ . Insbesondere ergibt  $h^{\text{Hom}(E, V)}(f_1, f_2)|_U = \sum_{i=1}^r h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$  durch die Identifizierung  $\text{Hom}(E, V) \cong E^* \otimes V$  eine Bündelmetrik auf  $\text{Hom}(E, V)$ .

*Beweisskizze.* Es ist klar für die Summe. Wir skizzieren hier den Beweis fürs Tensorprodukt: Als erstes überlegt man sich, dass die Abbildung  $\Gamma(E) \times \Gamma(V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$ ,

$(s_1, \tilde{s}_1) \mapsto h^E(s_1, s_2)h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$  für jedes feste  $(s_2, \tilde{s}_2) \in \Gamma(E) \times \Gamma(V)$  bilinear ist und damit eine Abbildung  $\Gamma(E) \otimes \Gamma(V) \cong \Gamma(E \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$  induziert. Analog gilt es für vertauschte Indizes 1 und 2. Insofern induziert die Gleichung für  $h^{E \otimes V}$  insgesamt eine bilineare Abbildung

$$h^{E \otimes V} : \Gamma(E \otimes V) \times \overline{\Gamma(E \otimes V)} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}).$$

(Das komplexe Konjugieren ist für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  erforderlich und entfällt bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .) Ist  $e_i$  ein orthonormaler Rahmen von  $\Gamma(E|_U)$  bzgl.  $h^E$  und analog  $v_i$  ein orthonormaler Rahmen von  $\Gamma(V|_U)$ , dann ist  $e_i \otimes v_j$  ein lokaler Rahmen von  $\Gamma(E \otimes V|_U)$ , der nach der Forderung im Lemma dann ebenfalls orthonormal bzgl.  $h^{E \otimes V}$  ist. Damit ist  $h^{E \otimes V}$  eine eindeutig bestimmte Bündelmetrik. Die Bündelmetrik auf  $E^*$  wird analog überprüft. Man muss hier nur zusätzlich die Unabhängigkeit von dem gewählten orthonormalen Rahmen beweisen. Das folgt aus der Linearität der Argumente und daraus, dass ein neuer orthonormaler Rahmen immer durch eine Matrix  $A \in O(r)$  entsteht.

Die Abbildung

$$\iota : \text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V, f \in \text{Hom}(E_x, V_x) \mapsto \sum_i e_i^* \otimes f(e_i),$$

wobei  $e_i$  eine Orthonormalbasis von  $E_x$  ist, definiert einen Bündelisomorphismus von  $\text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V$  und dann folgt, direkt die Formel  $h^{E^* \otimes V}(\iota(f_1), \iota(f_2)) = \sum_i h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$ .  $\square$

**Beispiel II.2.28.** (Nochmal Bündelmetrik auf  $T^*M$ ) Für die Bündelmetriken auf den abgeleiteten Bündeln von  $TM$  wie in Lemma II.2.27, siehe Tabelle II.1. Dort haben wir die lokalen Definitionen der Bündelmetriken, die der Einfachheit halber auch einfach nur  $g$  genannt werden. Es bleibt natürlich zu überprüfen, dass dies die Bündelmetriken von letztem Lemma sind. Wir überprüfen hier, dass für 1-Formen die Bündelmetrik aus Beispiel II.2.26 herauskommt: Möglichkeit (a) wäre die Basis  $\partial_{x^i}$  zu beliebigen lokalen Koordinaten bzgl. der orthonormalen Basis  $e_i$  zu schreiben und es direkt nachzurechnen. Möglichkeit (b) wäre: In einer Umgebung zu jedem  $p \in U$  gibt es immer lokale Koordinaten (z.B. geodätische Normalkoordinaten [2, Def. II.7.4]) für die  $\partial_{x^i}|_p = e_i|_p$  und damit  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$  gilt. Damit gilt  $g^*(\alpha, \beta)|_p = \alpha(\partial_{x^i}|_p)\beta(\partial_{x^j}|_p)g^{ij}(p) = \alpha(e_i|_p)\beta(e_i|_p)$ .

$E$	Bündel		Schnitte			Bündelmetrik (induziert von der Riem. Metrik $g$ )
	Bezeichnung	Rang	$\Gamma(E)$	Bezeichnung eines Schnittes	lokal	$(g(s_1, s_2))$ lokal
$M^m \times \mathbb{R}^r$	Triviales Bündel	$r$	$C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$	(vektorwert.) Funktion	$f(x)$ (sogar global)	punktweises Produkt
$TM$	Tangentialbündel	$m$	$\mathfrak{X}(M)$	Vektorfeld	$f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ (kurz $f^i \partial_{x^i}$ )	$g(f^i \partial_{x^i}, h^l \partial_{x^l}) = g_{ij} f^i h^j$
$T^*M := (TM)^*$	Kotangentialbündel	$m$	$\Omega^1(M)$	1-(Differential)Form	$f_i(x) dx^i$	$g(f_i(x) dx^i, h_l(x) dx^l) = g^{il} f_i h_l$
$T_r^s(M) = \bigotimes_{i=1}^r TM \otimes \bigotimes_{j=1}^s T^*M$	$(r, s)$ -Tensorbündel	$m^{r+s}$	$T_r^s(M)$	$(r, s)$ -Tensoren	$f_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(x) \partial_{x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{j_r}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}$	$g_{i_1 i_2} \dots g_{i_r i_r} g^{j_1 j_1} \dots g^{j_s j_s} f_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_r}^{j_r}$
$\Lambda^k TM$	Bündel der $k$ -Formen	$\binom{m}{k}$	$\Omega^k(M)$	$k$ -(Differential)Form	$f_{j_1 \dots j_k}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	$g(\alpha, \beta) := \frac{1}{k!} g(t(\alpha), t(\beta))$ mit $t: \Lambda^k TM \rightarrow T^*M^{\otimes k}$ die triviale Einbettung wie in Bsp. II.2.17.iii $g(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \det(g^{i_l j_l})_{r,s}$

Tabelle II.1.: Abgeleitete Bündel von  $TM$  (Die Formeln für die hier gegebenen induzierten Bilinearformen auf den abgeleiteten Bündeln gelten noch immer, wenn  $g$  eine (semi-)Riemannsche Metrik war – jedoch sind sie dann nicht Bündelmetriken im Sinne von Definition II.2.20.)

# III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Wir wollen nun erste allgemeine Notationen für Differentialoperatoren einführen und uns als erste Beispiele insbesondere Operatoren auf Differentialformen (z.B. die äußere Ableitung) und Zusammenhänge auf Vektorbündeln (verallgemeinert/abstrahiert den Levi-Civita-Zusammenhang auf  $(M, g)$ ). Für diese ersten Beispiele brauchen wir die Sprache der Differentialoperatoren zwar so erst einmal nicht, aber es ist gut, sich daran schon einmal zu gewöhnen.

## III.1. Definitionen und erste Eigenschaften

### III.1.1. Im $\mathbb{R}^n$

Ein *Differentialoperator auf  $\mathbb{R}^n$*  ist definiert als

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{III.1}$$

wobei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  ein *Multiindex* mit  $|\alpha| := \sum_i |\alpha^i|$ ,  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , und  $D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^1} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^n}$  ist. Gibt es ein  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$  und  $a_\alpha \neq 0$ , dann nennen wir  $k$  die *Ordnung* von  $P$  (sonst ist die Ordnung kleiner als  $k$ ).

In vielen Anwendungen in der Analysis und Stochastik muss man geringere Regularität der Koeffizienten  $a_\alpha$  zulassen, aber wir beschränken uns hier auf glatte Koeffizienten. Also ist hier  $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Allgemeiner kann  $P$  auch auf  $\mathbb{K}^\ell$ -wertige Funktionen operieren und  $\mathbb{K}^r$ -wertige Funktionen ausgeben – dazu muss dann  $a_\alpha$  eine  $r \times \ell$ -matrixwertige Funktion sein. Dabei operieren die partiellen Ableitungen dann komponentenweise.

#### Beispiel III.1.1.

- (i) Die Operatoren  $\text{rot}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ,  $\text{div}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  und  $\text{grad}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  sind Differentialoperatoren erster Ordnung.
- (ii) Laplace-Operator:<sup>\*</sup>  $\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii) Wärmeoperator:  $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

<sup>\*</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace\\_operator](https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator)

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(iv) Wellenoperator\*:  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i}$

(v) Cauchy Riemann Operator  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(vi) Sturm-Liouville Operatoren†:  $y \in C^\infty(I \subset \mathbb{R}) \mapsto (-py')' + qy \in C^\infty(I)$  für  $p, q \in C^\infty(I)$  und  $p > 0$

(vii) Dirac-Operator‡:

$$D: C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$$

$$D = \begin{pmatrix} \text{Id}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\text{Id}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3}$$

mit  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  und  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Man rechnet nach, dass  $D^2$  der Wellenoperator ist.

#### III.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln

Wir wollen nun (III.1) als lokale Form benutzen, um so Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln zu definieren:

**Definition III.1.2.** Ein (skalärer) Differentialoperator der Ordnung  $k$  auf einer Mannigfaltigkeit ist eine lineare Abbildung  $P: C^\infty(M, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$ , die in jeder Karte die Form (III.1) annimmt.

**Beispiel III.1.3.** 0.te Ordnung skalare Operatoren sind einfach Multiplikationsoperatoren  $Pf = af$  für ein  $a \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ .

**Beispiel III.1.4.** Jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , aufgefasst als Derivation

$$X: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), f \mapsto X(f),$$

ist ein skalärer Differentialoperator erster Ordnung: Lokal ist  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Jeder skalare Differentialoperator erster Ordnung auf  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  kann als Vektorfeld plus einem 0.te Ordnungoperator aufgefasst werden, vgl. ÜA 10. Die Hintereinanderausführung von Vektorfeldern und Linearkombinationen davon sind auch wieder Differentialoperatoren von entsprechend höherer Ordnung.

Im  $\mathbb{R}^n$  konnten wir einen Differentialoperator  $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^\ell) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^s)$  als Operator der Form (III.1) definieren, wobei nun die  $a_\alpha(x) \in \text{Hom}(\mathbb{K}^\ell, \mathbb{K}^s)$  waren. So können wir nun analog den Begriff des Differentialoperators auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten auch auf Vektorbündel übertragen:

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembert\\_operator](https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembert_operator)

†[https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%E2%80%93Liouville\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%E2%80%93Liouville_theory) - Sturm-Liouville Probleme treten oft als resultierende Probleme nach Symmetriereduktion auf, z.B. Laplacegleichung auf  $\mathbb{R}^n$  nach Abtrennen der Radialsymmetrie, vgl. [4, App. B]

‡[https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac\\_operator](https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_operator)

### III.1. Definitionen und erste Eigenschaften

**Definition III.1.5.** Eine lineare Abbildung  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ , die in Koordinaten, über denen  $E$  und  $F$  trivialisieren, die Form (III.1) mit  $a_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$  (also insbesondere  $a_\alpha(x) \in \text{Hom}(E_x, F_x)$ ) annimmt, ist ein *Differentialoperator* zwischen den Vektorbündeln  $E$  und  $F$ . Die Menge der Differentialoperatoren zwischen  $E$  und  $F$  der Ordnung  $\ell$  bezeichnen wir mit  $\text{Diff}^\ell(E, F)$ . Ist  $E = F$ , so schreiben wir auch  $\text{Diff}^\ell(E)$ .

**Beispiel III.1.6.** Die äußere Ableitung

$$d: \Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) = \Gamma(\Lambda^{k+1} M),$$

definiert in [2, S.108], ist ein Differentialoperator erster Ordnung: In lokalen Koordinaten hat ein  $\alpha \in \Omega^k(M)$  die Form  $f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  und damit ist  $d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Also ist  $d = b_a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}$  mit  $b_a(x)(e \in \Lambda_x^k M) = dx^a|_x \wedge e \in \Lambda_x^{k+1} M$ .

**Beispiel III.1.7.**

$$g(\text{grad } f, \cdot) = df(\cdot)$$

definiert einen Differentialoperator erster Ordnung

$$\text{grad}: C^\infty(M) \cong \Gamma(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(TM).$$

**Formal adjungierte Operatoren.** Seien  $E, F$  Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M^m, g)$  mit gewählten Bündelmetriken. Ist  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  ein Differentialoperator, dann ist sein *formal adjungierter Operator* der eindeutig bestimmte Differentialoperator  $P^\dagger: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$  für den

$$\int_M \langle \phi, P\psi \rangle d\text{vol}_g = \int_M \langle P^\dagger \phi, \psi \rangle d\text{vol}_g$$

für alle  $\psi \in \Gamma_c(E)$  und  $\phi \in \Gamma(F)$  gilt. Hierbei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Bündelmetrik auf  $F$  (links) bzw.  $E$  (rechts) und  $\Gamma_c(E)$  die kompakt getragenen glatten Schnitte von  $E$ .\*

Ist  $Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u$  für  $u \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ , dann erhalten wir durch partielle Integration  $P^\dagger v = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} (\det g)^{-1/2} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} \sqrt{\det g} v)$ .

Analog definiert man auch formal adjungierte Operatoren für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Man muss dann nur  $|\det g|$  in der lokalen Definition von  $d\text{vol}_g$  verwenden. Dementsprechend muss man dann auch die Betragsstriche in der lokalen Darstellung von  $P^\dagger$  hinzufügen.

**Beispiel III.1.8.**  $d^\dagger$  bezeichnen wir mit  $\delta$ . Aus  $d^2 = 0$  folgt  $\delta^2 = 0$ .

Ähnlich wie den formal adjungierten Operatoren kann man auch weitere Operatoren definieren:

---

\*Der adjungierte Operator  $P^*$  von  $P$  als Operator auf  $L^2(E)$  (im funktionalanalytischen Sinne) stimmt auf  $\Gamma_c(F)$  mit  $P^\dagger$  überein – hat allerdings einen größeren Definitionsbereich.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

**Definition III.1.9.** Der *Laplaceoperator*  $\Delta$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist definiert durch

$$\int_M g(du, dv) d\text{vol}_g = \int_M u \Delta v d\text{vol}_g$$

für alle  $u \in C_c^\infty(M)$  und  $v \in C^\infty(M)$ . Hierbei ist das Skalarprodukt  $g$  auf der linken Seite, die durch die Riemannsche Metrik  $g$  induzierte Bündelmetrik auf  $T^*M$ , vgl. Beispiel II.2.26.

D.h. insbesondere  $\Delta = \delta d$ . In lokalen Koordinaten hat der Laplaceoperator die Darstellung

$$\Delta f = -(\det g)^{-1/2} \partial_{x^i} \left( g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_{x^j} f \right),$$

und in euklidischen Koordinaten stimmt der Laplaceoperator mit  $-\sum_i \frac{\partial^2}{\partial^2 x^i}$  aus Beispiel III.1.1 überein.

**Beispiel III.1.10.** Der *Laplaceoperator auf  $k$ -Differentialformen* wird definiert als

$$\Delta := (d + \delta)^2: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

Es gilt  $\Delta = d\delta + \delta d$  und  $\Delta^\dagger = \Delta$ . Das formal adjungierte  $\delta$  zu  $d$  ist erst einmal nur für  $k$ -Formen mit  $k \geq 1$  definiert. Man setzt  $\delta|_{C^\infty(M) = \Omega^0(M)} = 0$  und damit stimmt  $\Delta$  auf glatten Funktionen mit der obigen Definition überein.

## III.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Wir werden den Levi-Civita Zusammenhang auf  $TM$  zu Zusammenhängen auf Vektorbündeln verallgemeinern und Beispiele für Differentialoperatoren erster Ordnung auf Vektorbündeln erhalten.

**Definition III.2.1.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Sei  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\phi \in \Gamma(E)$ . Eine Abbildung  $\nabla := \nabla^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  heißt (*affiner*) *Zusammenhang*, falls gilt:

- (i)  $\nabla$  ist linear in beiden Argumenten.
- (ii) (Tensoriell in der ersten Komponente)

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s \quad (\text{also } (\nabla_{fX}s)(p) = f(p)(\nabla_X s)_p).$$

- (iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \text{also } (\nabla_X(fs))_p = d_p f(X(p))s(p) + f(p)(\nabla_X s)_p.$$

### III.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Die Menge aller affinen Zusammenhänge eines Vektorbündels  $\pi: E \rightarrow M$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}(E)$ .

Ist zusätzlich eine Bündelmetrik  $h$  auf  $E$  gegeben, so nennen wir  $\nabla^E$  *metrisch* (= kompatibel mit der Metrik), falls für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s, s' \in \Gamma(E)$

$$X.h(s, s') = h(\nabla_X s, s') + h(s, \nabla_X s')$$

wobei  $X.f := X(f) := df(X): M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto d_p f(X(p))$ , für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  im Falle eines komplexen Vektorbündels) ist.

**Bemerkung III.2.2.** (Lokale Darstellung) Seien  $x^i$  Koordinaten auf  $U \subset M$  und sei  $s_\alpha$  ein lokaler Rahmen für  $E|_U$  (insbesondere ist dann  $E|_U$  trivial). Für  $X = X^i \partial_{x^i}$ ,  $s = f^\alpha s_\alpha$  gilt

$$\nabla_X s = X^i (\partial_{x^i} f^\alpha) s_\alpha + X^i f^\alpha \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha}_{=: \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta}$$

mit  $\Gamma_{i\alpha}^\beta \in C^\infty(U, \mathbb{K})$ . Wie auch schon auf  $TM$  nennen wir die  $\Gamma$  *Christoffelsymbole*.

Ist  $\nabla$  metrisch bzgl.  $h$  und ist  $s_\alpha$  ein lokaler orthonormaler Rahmen von  $E|_U$ , so gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x^i} (h(s_\alpha, s_\beta)) = h(\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha, s_\beta) + h(s_\alpha, \nabla_{\partial_{x^i}} s_\beta) = h(\Gamma_{i\alpha}^\gamma s_\gamma, s_\beta) + h(s_\alpha, \Gamma_{i\beta}^\gamma s_\gamma) \\ &= \Gamma_{i\alpha}^\beta + \overline{\Gamma_{i\beta}^\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Zum Vergleich: Für den Levi-Civita Zusammenhang hatten wir  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Dort folgte das aus der Torsionsfreiheit. Torsionsfreiheit ist nicht als Forderung für allgemeine Vektorbündel definierbar. Außerdem entstehen die  $\Gamma_{ij}^k$  bzgl. der Basis  $\partial_{x^i}$  zu gewählten Koordinaten, welche im Allgemeinen halt keine orthonormale Basis ist und weshalb im Allgemeinen nicht  $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$  gilt.

**Bemerkung III.2.3.** Sei  $\nabla \in \mathcal{A}(E)$ .

- (i) Seien  $\nabla^1, \nabla^2 \in \mathcal{A}(E)$ . Dann ist  $\omega$  definiert durch  $\omega(X) := \nabla_X^1 - \nabla_X^2$  eine 1-Form mit Werten in  $\text{End}(E)$ , also  $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$ . Die Abbildung  $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X$  ist jedoch *kein* Element in  $\Omega^1(M, \text{End}(E))$ , da  $\nabla_X(f s) \neq f \nabla_X s$  ist. Andersherum ist für  $\nabla \in \mathcal{A}(E)$  und  $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E))$  auch  $\tilde{\nabla}_X s := \nabla_X s + \omega(X)s$  immer wieder ein affiner Zusammenhang auf  $E$ .
- (ii) Die Menge aller Zusammenhänge  $\mathcal{A}(E)$  auf einem Vektorbündel  $E$  bilden einen affinen Raum (mit unterliegendem Vektorraum  $\Omega^1(M; \text{End}(E))$ , vgl. i) – aber nicht kanonisch einen Vektorraum (Da die Nullabbildung kein Zusammenhang ist.)

**Beispiel III.2.4.**

- (i) Ein ausgezeichneteter Zusammenhang auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist der Levi-Civita Zusammenhang. Das ist der eindeutig bestimmte metrische Zusammenhang, der zusätzlich torsionsfrei ist, d.h.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]^*$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

---

\*Die Lieklammer  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  ist definiert durch  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$  für alle  $f \in C^\infty(M)$ , vgl. DGI ÜA 24.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(ii) Für zwei metrische Zusammenhänge  $\nabla^1, \nabla^2$  auf  $TM$  gilt

$$g(\omega(X)Y, Z) = g(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) \stackrel{\text{metr.}}{=} g(Y, \nabla_X^1 Z - \nabla_X^2 Z) = g(Y, \omega(X)Z)$$

für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Wir können in diesem Fall also  $\omega$  als Element in  $\Omega(M, \mathfrak{o}(TM))$  auffassen, wobei  $\mathfrak{o}(TM)$  das Unterbündel von  $\text{Hom}(TM, TM)$  ist, dessen Fasern nur aus den orthogonalen (bzgl.  $g$ ) Abbildungen besteht.

(iii) Die *Torsion* eines Zusammenhangs  $\nabla$  auf  $TM$  ist ein  $(0, 2)$  Tensor  $T \in \mathcal{T}_0^2(M)$ :  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ . Für zwei Zusammenhänge  $\nabla^1, \nabla^2$  mit der gleichen Torsion ist  $\omega(X)(Y) = \omega(Y)(X)$ .

**Satz III.2.5** (Induzierte Zusammenhänge). *Seien  $E$  und  $V$   $\mathbb{K}$ -Vektorbündel über  $M$ . Seien  $\nabla^E$  und  $\nabla^V$  affine Zusammenhänge auf  $E$  und  $V$ . Dann existieren auf  $E \oplus V, E^*, E \otimes V, \text{Hom}(E, V)$  und  $\Lambda^k E^*$  affine Zusammenhänge, so dass für  $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N), \omega \in \Gamma(E^*), s, s_i \in \Gamma(E), \tilde{s} \in \Gamma(V), \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*), \beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$  und  $f \in \Gamma(\text{Hom}(E, V))$  gilt:*

$$\begin{aligned} X(\omega(s)) &= (\nabla_X^{E^*} \omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{E \oplus V}(s \oplus \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \oplus (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^{E \otimes V}(s \otimes \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \otimes \tilde{s} + s \otimes (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^V(f(s)) &= (\nabla_X^{\text{Hom}(E, V)} f)(s) + f(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{\Lambda^{k+\ell} E^*}(\alpha \wedge \beta) &= (\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*} \beta). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha\right)(s_1, \dots, s_k) = X(\alpha(s_1, \dots, s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1, \dots, s_{j-1}, \nabla_X^E s_j, s_{j+1}, \dots, s_k).$$

Sind die Zusammenhänge  $\nabla^E$  bzw.  $\nabla^V$  metrisch bzgl. Bündelmetriken  $h^E$  bzw.  $h^V$  auf  $E$  bzw.  $V$ , so sind die obigen Zusammenhänge metrisch bzgl. der induzierten Bündelmetriken, vgl. Lemma II.2.27, auf den jeweiligen Bündeln.

*Beweisskizze.* Wir skizzieren hier nur die Argumente für den Zusammenhang auf  $E^*$ , vgl. auch ÜA 11 und 12: Man rechnet nach, dass  $(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) = X(\omega(s)) - \omega(\nabla_X^E s)$  die geforderten Eigenschaften in Definition III.2.1, z.B. gilt für  $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{E^*} (f\omega))(s) &= X((f\omega)(s)) - (f\omega)(\nabla_X^E s) = X(f\omega(s)) - f\omega(\nabla_X^E s) \\ &= fX(\omega(s)) + df(X)\omega(s) - f\omega(\nabla_X^E s) = df(X)\omega(s) + f(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) \\ &= (df(X)\omega + f\nabla_X^{E^*} \omega)(s). \quad \square \end{aligned}$$

**Woche 6** Es fehlt uns jetzt noch ein induzierter Zusammenhang auf dem Pullbackbündel. Dazu identifizieren wir zuerst Schnitte im Pullbackbündel  $f^*E$  für  $\pi: E \rightarrow M$  und  $f: M' \rightarrow M$ . Sei  $S \in \Gamma(f^*E)$ . Dann hat  $S(x)$  die Form  $(x, s(x)) \in E_{f(x)}$ . Die erste Komponente

### III.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

enthält also keine Informationen, die die zweite nicht auch enthält, und wir haben eine glatte Abbildung  $s: M' \rightarrow E$ . Andersherum definiert jede glatte Abbildung  $s: M' \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = f$  mittels  $S(x) = (x, s(x))$  einen Schnitt in  $f^*E$ . Deshalb arbeitet man oft nicht direkt mit Schnitten von  $f^*E$ , sondern mit den Abbildungen  $s: M' \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = f$  von oben. Ein solches  $s$  nennt man einen *Schnitt von  $E$  entlang  $f$* . Die Menge aller solcher Schnitte bezeichnen wir mit  $\Gamma_f(E)$ . Diese Identifikation erhält auch die Vektorraumstruktur der Schnitte. Nach obigen Überlegungen ist  $\Gamma_f(E) \cong \Gamma(f^*E)$ . Wir werden in Zukunft immer direkt  $s: M' \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = f$  als Schnitt in  $f^*E$  auffassen.

Man beachte, dass im Allgemeinen  $\Gamma_f(E) \neq \Gamma(E|_{f(M')})$  ist – z.B. sei  $f: M' \rightarrow M$  eine konstante Abbildung, dann kann ein Schnitt von  $E$  entlang  $f$  immer noch von  $x \in M'$  abhängen, wogegen Schnitte in  $\Gamma(E|_{f(M')=\{*\}})$  konstant sind. Die lokale Darstellung eines Elements in  $\Gamma_f(E)$  über  $U \subset M'$  ist  $a^i(s_i \circ f)$ , wobei  $a^i \in C^\infty(U)$  und  $s_i$  ein lokaler Rahmen von  $E$  über  $f(U) \subset M$  ist.

Um die richtige Definition für  $\nabla^{f^*E}$  zu finden, schauen wir uns erst Spezialfälle an:

- (i) Sei  $f: M' \rightarrow M$  eine Einbettung. Dann ist  $f^*E \cong E|_{f(M')}$ . Somit sollte

$$\nabla_X^{f^*E} s = \nabla_{df(X)}^E (s \circ f^{-1})$$

gelten.

- (ii) Bildet  $f: M' \rightarrow M$  nur auf einen Punkt  $p \in M$  ab. Dann ist  $f^*E \cong M' \times \pi^{-1}(p)$  und  $s \in \Gamma_f(E)$  hat lokal die Darstellung  $a^i s_i(p)$  für  $a^i \in C^\infty(U)$ . Hier sollte

$$\nabla_X^{f^*E} (s) = X(a^i) s_i(p).$$

gelten.

Zusammen ergibt sich

**Lemma III.2.6.** *Sei  $f: M' \rightarrow M$  und  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Zusammenhang  $\nabla^E$ . Sei  $s \in \Gamma_f(E)$  – lokal sei  $s = a^i(s_i \circ f)$ ,  $a^i \in C^\infty(U \subset M')$ . Dann definiert*

$$\nabla_X^{f^*E} s|_U = X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f)$$

einen Zusammenhang auf  $f^*E$ , wobei  $(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f)(p) := (\nabla_{d_p f(X(p))}^E s_i)(f(p))$ .

*Beweis.* Man muss nachrechnen, dass die Definition unabhängig von der lokalen Darstellung ist und es sich wirklich um einen Zusammenhang handelt. Wir rechnen hier nur die Unabhängigkeit der lokalen Darstellung nach: Sei  $t_j$  ein weiterer lokaler Rahmen von  $E$  auf  $f(U) \subset M$ . Dann definieren  $\phi_\alpha(t_i(y)) := (y, e_i)$  bzw.  $\phi_\beta(s_i(y)) := (y, e_i)$  lokale Trivialisierungen. Sei  $\mu_{\alpha\beta}$  die zugehörige Übergangsfunktion. Wir schreiben (für festes  $\alpha, \beta$ )  $\mu_{\alpha\beta}(y)(e_j) =: \mu_j^\alpha(y) e_j$ . Dann ist  $t_j(y) = \phi_\beta^{-1}(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(y, e_j)) = \phi_\beta^{-1}(y, \mu_{\alpha\beta}(y)(e_j)) = \mu_j^\alpha(y) s_i(y)$ . Ein Rahmen entsteht aus einem alten also genau durch punktweisen Multiplikation mit der Matrix der Übergangsfunktion.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Soll also  $b^j(t_j \circ f) = a^i(s_i \circ f)$  sein, dann muss  $a^i(x) = b^j(x)\mu_j^i(f(x))$  gelten und wir haben:

$$\begin{aligned} X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f &= X(b^j(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f) \\ &= (X(b^j)(\mu_j^i \circ f) + b^j X(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f) \\ &= X(b^j)((\mu_j^i s_i) \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E (\mu_j^i s_i) \circ f) \\ &= X(b^j)(t_j \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E t_j \circ f). \end{aligned}$$

Damit ist  $\nabla^{f^*E}$  wohldefiniert.  $\square$

**Bemerkung III.2.7.** Sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve und  $\phi$  ein Schnitt eines Vektorbündels  $E \rightarrow M$  entlang  $\gamma$ . Für den induzierten Zusammenhang auf dem Pullbackbündel  $\gamma^*E$  schreiben wir oft einfach  $\frac{\nabla}{dt} := \nabla_{\partial_t}^{\gamma^*E}$ . Ist  $\gamma$  eine reguläre Kurve (d.h.  $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$  für alle  $t \in I$ ), dann gilt  $\frac{\nabla}{dt}\phi = \nabla_{\dot{\gamma}}\phi$ , wobei  $\phi$  als ein Schnitt auf  $E|_{\gamma(I)}$  aufgefasst wird (im Sinne von  $\phi(\gamma(t)) := \phi(t)$ ). In Diffgeo I haben wir uns beim Ausdruck  $\nabla_{\dot{\gamma}}$  immer nur auf reguläre Kurven beschränkt. Wenn man z.B. die Parallelverschiebung auf allgemeine glatte Kurven verallgemeinern will, benutzt man  $\frac{\nabla}{dt}$ , siehe Abschnitt III.2.1.

In lokalen Koordinaten haben wir für einen Schnitt  $\phi \in \Gamma_{\gamma}(E)$  entlang  $\gamma$ :

Es ist  $\phi(t) = \phi^{\alpha}(t)s_{\alpha}(\gamma(t))$ . Wir kürzen  $\check{s}_{\alpha} := s_{\alpha} \circ \gamma$  und  $\check{\Gamma}_{k\alpha}^{\beta} := \Gamma_{k\alpha}^{\beta} \circ \gamma$  ab. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = \dot{\phi}^{\alpha}(t)\check{s}_{\alpha}(t) + \phi^{\alpha}(t)(\nabla_{\dot{\gamma}}s_{\alpha})|_{\gamma(t)} = (\dot{\phi}^{\beta}(t) + \phi^{\alpha}(t)\dot{\gamma}^k(t)\check{\Gamma}_{k\alpha}^{\beta}(t))\check{s}_{\beta}(t). \quad (\text{III.3})$$

**Bemerkung III.2.8.** (Intrinsische Darstellung von Differentialoperatoren) Benutzen wir den durch  $\nabla^g$  und  $\nabla$  auf dem Vektorbündel  $T^*M \otimes E$  induzierten Zusammenhang, vgl. Satz III.2.5, erhalten wir den Zusammenhang  $\nabla: \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) = \Gamma(T^2M \otimes E)$  mittels:

$$\nabla_X^{T^*M \otimes E}(\alpha \otimes s) = (\nabla_X^{T^*M}\alpha) \otimes s + \alpha \otimes (\nabla_X^E s)$$

Auch das ist wieder ein Differentialoperator erster Ordnung. Induktiv können wir das fortführen (der Einfachheit halber bezeichnen wir auch diese ganzen Zusammenhänge einfach mit  $\nabla$ ):

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M^{\otimes 3} \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

Damit können wir diese Zusammenhänge insbesondere auch hintereinanderausführen und erhalten einen Differentialoperator durch eine endliche Summe

$$Pu := \sum_k a_k \nabla^k u \quad \text{mit } a_k \in \Gamma(\text{Hom}(T^*M^{\otimes k} \otimes E, F)) \cong \Gamma(TM^{\otimes k} \otimes \text{Hom}(E, F)).$$

Hierbei wirkt der  $TM^{\otimes k}$ -Anteil von  $a_k$  mit dem  $T^*M^{\otimes k}$ -Anteil von  $\nabla^k u$  mittels der natürlichen Paarung.

### III.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Alle Differentialoperatoren zwischen Vektorbündeln  $E$  und  $F$  kann man so schreiben. Z.B. seien  $E = F = TM$  über  $(M, g)$ . Dann sollte z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = a_1 \nabla - a_0$$

für ein  $a_1 \in \Gamma(TM \otimes \text{Hom}(TM, TM))$  und ein  $a_0 \in \Gamma(\text{Hom}(TM, TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes TM)$  gelten. Wir bestimmen  $a_1$  und  $a_0$ : Für  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  ist  $\nabla Y = dx^j \otimes \left( \frac{\partial Y^\ell}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^\ell} + \Gamma_{jk}^\ell Y^k \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right)$  und damit  $a_1 = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \text{Id}_{TM}$  sowie  $a_0 = \Gamma_{1k}^\ell dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell}$ .

#### III.2.1. Horizontaler Lift – Paralleltransport

**Definition III.2.9.** Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein Vektorbündel,  $\nabla$  ein affiner Zusammenhang auf  $E$  und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Ein Lift  $\phi$  von  $\gamma$ , d.h. ein Schnitt  $\phi \in \Gamma_\gamma(E)$ , heißt *horizontal*, falls  $\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = 0$  gilt (vgl. Bemerkung III.2.7 für die Definition).

**Satz III.2.10.** In der Situation von Definition III.2.9. Sei  $t_0 \in I$ . Zu  $\phi_0 \in E_{\gamma(t_0)}$  gibt es genau einen horizontalen Lift  $\phi$  längs  $\gamma$  mit  $\phi(t_0) = \phi_0$ .

*Beweis.* Der Beweis ist komplett analog zum Beweis für den Levi-Civita Zusammenhang in [2, Satz II.3.4] und beruht darauf, dass es sich hier um ein Anfangswertproblem für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung  $\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = 0$ , vgl. (III.3) für die lokale Darstellung, handelt.  $\square$

**Definition III.2.11.** Sei  $\gamma: I \rightarrow M$  wie oben. Seien  $t_0, t_1 \in I$ . Die Abbildung

$$\parallel_{t_0, t_1}^\gamma: E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \phi_0 \mapsto \phi(t_1),$$

wobei  $\phi(t)$  der horizontale Lift von  $\gamma$  mit  $\phi(t_0) = \phi_0$  ist, heißt *Paralleltransport* längs  $\gamma$ .

**Bemerkung III.2.12.**

- (i) Der Paralleltransport stellt einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Fasern des Vektorbündels her. Beachte: Wie auch schon auf dem Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, ist der Paralleltransport abhängig von der Kurve entlang derer verschoben wird.
- (ii) Ist  $\gamma$  eine konstante Kurve, dann ist jeder horizontale Lift ein konstanter Schnitt entlang  $\gamma$ .
- (iii) Der horizontale Lift hängt glatt vom Anfangswert ab.

**Satz III.2.13.**

- (i)  $\parallel_{t_0, t_1}^\gamma$  ist eine lineare Abbildung.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(ii)  $\|\_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}$  ist ein Vektorraumisomorphismus. War der Zusammenhang metrisch, dann ist dieser Isomorphismus sogar eine Isometrie.

(iii)  $\|\_{t_0, t_2}^\gamma = \|\_{t_1, t_2}^\gamma \cdot \|\_{t_0, t_1}^\gamma$ . Insbesondere ist  $\|\_{t_0, t_0}^\gamma = \text{Id}$  und  $\|\_{t_1, t_0}^\gamma = (\|\_{t_0, t_1}^\gamma)^{-1}$ .

*Beweis.* (i) Linearität klar nach Linearität von  $\nabla$ .

(iii) Klar nach Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des AWP für horizontale Lifte.

(ii) Es ist eine lineare Abbildung zwischen gleich dimensionalen Vektorräumen. Es reicht also Injektivität zu zeigen: Sei  $v \in E_{c(t_0)}$  mit  $\|\_{t_0, t_1}^c(v) = 0$ . Dann ist  $v = \|\_{t_1, t_0}^c(0) = 0$ . Ist der Zusammenhang metrisch, dann folgt isometrisch ganz analog zum Beweis im Fall des Levi-Civita Zusammenhangs, vgl. [2, Satz II.3.6].  $\square$

**Bemerkung III.2.14.** Insbesondere folgt aus dem letzten Satz: Betrachtet man eine Basis  $(e_1, \dots, e_r)$  von  $E_{x=\gamma(t_0)}$ . Dann ist  $(e_1(t) := \|\_{t_0, t}^\gamma e_1, \dots, e_r(t) := \|\_{t_0, t}^\gamma e_r)$  wieder eine Basis von  $E_{\gamma(t_1)}$ . Wir nennen dann  $(e_1(t), \dots, e_r(t))$  einen *parallelen Rahmen von  $E$  entlang  $\gamma$* .

**Satz III.2.15.** Für  $\phi \in \Gamma_c(E)$  gilt

$$\left( \|\_{s, t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \phi(s) \right) = \|\_{s, t}^c \circ \nabla_{\partial_s}^{c*E} \phi(s) = \frac{d}{ds} \circ \|\_{s, t}^c \phi(s).$$

Man beachte, dass  $z(s) := \|\_{s, t}^c \phi(s) \in E_{c(t)}$  für alle  $s$  und deshalb  $\frac{d}{ds} \circ \|\_{s, t}^c \phi(s) = \frac{d}{ds} z(s)$  als Differentiation im festen Vektorraum  $E_{c(t)}$  sinnvoll ist.

*Beweis.* Sei  $e_1(s), \dots, e_r(s)$  eine Basis von  $E_{\gamma(s)}$ . Sei  $(e_1(t), \dots, e_r(t))$  der zugehörige parallele Rahmen längs  $\gamma$ . Sei  $\phi(s) = \phi^j(s) e_j(s)$ . Dann ist  $\|\_{s, t}^c \phi(s) = \phi^j(s) e_j(t)$  und damit  $\frac{d}{ds} \|\_{s, t}^c \phi(s) = \dot{\phi}^j(s) e_j(t)$ . Andererseits ist

$$\frac{\nabla}{ds} (\phi^j(s) e_j(s)) = \dot{\phi}^j(s) \underbrace{\frac{\nabla}{ds} e_j(s)}_{=0} + \phi^j(s) \dot{e}_j(s) = \dot{\phi}^j(s) e_j(s)$$

$$\|\_{s, t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \phi(s) = \|\_{s, t}^c (\dot{\phi}^j(s) e_j(s)) = \dot{\phi}^j(s) e_j(t). \quad \square$$

Man kann so aus dem Paralleltransport auch den Zusammenhang wieder konstruieren:

**Folgerung III.2.16.** Es gilt

$$\left( \frac{\nabla}{dt} \phi \right) (t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\_{t, t_0}^c (\phi(t)) - \phi(t_0)}{t - t_0}$$

für jeden Schnitt  $\phi$  längs  $c$ .

### III.2.2. Krümmung

**Definition III.2.17.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang  $\nabla$ . Die Abbildung  $F: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  mit

$$(X, Y, s) \mapsto F(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$$

heißt *Krümmung* von  $\nabla$ . Ist  $F = 0$ , dann nennen wir den Zusammenhang *flach*.

**Bemerkung III.2.18.** Ist  $M$  eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang. Dann ist  $R:=F$  der *Riemannsche Krümmungstensor*.

**Bemerkung III.2.19.** Man rechnet direkt nach, dass  $F$   $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten ist und  $F(X, Y)s = -F(Y, X)s$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s \in \Gamma(E)$  gilt. Damit kann  $F$  als Element in  $\Omega^2(M; \text{End}(E))$  aufgefasst werden.

Als nächstes wollen wir die Krümmung  $F$  als Quadrat einer geeigneten Abbildung definieren.

**Definition III.2.20.** Die lineare Abbildung  $D: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$  sei definiert durch

$$D(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s$$

für  $\alpha \in \Omega^k(M)$  und  $s \in \Gamma(E)$ .\*

**Bemerkung III.2.21.** (i) Wohldefiniertheit folgt, da  $D((f\alpha) \otimes s) = D(\alpha \otimes (fs))$  für  $f \in C^\infty(M)$  gilt.

(ii) Für  $k = 0$  ist  $D = \nabla: \Omega^0(M; E) \cong \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ .

(iii) Die Abbildung  $D \circ D: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M; E)$  ist die Krümmung  $F$ .

*Beweis.* Wir rechnen lokal: Sei  $e_i = \partial_{x^i}$  für lokale Koordinaten  $x^i$ . Also ist insbesondere  $[e_i, e_j] = 0$  nach Satz von Schwarz. Dann ist  $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_{e_i} s$  (denn  $\nabla_X s = X^i \nabla_{\partial_{x^i}} s = dx^i(X) \nabla_{e_i} s$ ) und damit

$$\begin{aligned} D(dx^i \otimes \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) &= (-dx^i \wedge \nabla \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) \\ &= -dx^i(e_j) \nabla_{e_k} \nabla_{e_i} s + dx^i(e_k) \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s \\ &= -\nabla_{e_k} \nabla_{e_j} s + \nabla_{e_j} \nabla_{e_k} s = F(e_j, e_k)s. \quad \square \end{aligned}$$

**Lokale Darstellung von  $\nabla$  und  $F$  mittels Differentialformen** Sei  $s_i$  ein lokaler Rahmen des Vektorbündels  $E$  vom Rang  $r$  über  $U \subset M$ . Dann ist  $\nabla_X s_k = \omega_k^i(X) s_i$ † mit  $\omega_k^i(X) \in C^\infty(U)$ . Da  $\nabla$  tensoriell in der ersten Komponente ist, ist  $\omega_k^i \in \Omega^1(U)$ . Die Menge der  $\omega_k^i$  enthalten alle Informationen über  $\nabla$  auf  $U$ . Wir fassen alle zu  $\omega = (\omega_k^i)$  zusammen und erhalten eine 1-Form mit Werten in  $r \times r$ -Matrizen, also  $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$  – die sogenannte *Zusammenhangsform von  $\nabla$  auf  $U$  bzgl. des lokalen Rahmen  $s_i$* .

\*Hier ist  $\nabla s \in \Omega^1(M; E)$  und damit

$$(\alpha \wedge \nabla s)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \alpha(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) \nabla_{X_i} s.$$

†Im Vergleich zu Christoffelsymbolen: Für Christoffelsymbole braucht man immer zusätzlich einen lokalen Rahmen auf  $TU$  - z.B. lokale Koordinaten:  $\omega_k^i(X) = X^r \Gamma_{rk}^i$  mit  $\nabla_{\partial_{x^r}} s_k = \Gamma_{rk}^i s_i$ .

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Analog haben wir  $F(X, Y)(s_k) = \Omega_k^i(X, Y)s_i$  mit  $\Omega_k^i(X, Y) \in C^\infty(U)$ . Da  $F(X, Y) = -F(Y, X)$  und  $F$  tensoriell in  $X$  und  $Y$  ist, haben wir  $\Omega_k^i \in \Omega^2(U)$ . Wir fassen diese zu  $\Omega = (\Omega_k^i) \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$  zusammen und nennen dies die *Krümmungsform von  $F$  auf  $U$  bzgl. des Rahmen  $s_i$* .

**Satz III.2.22** (Strukturgleichung (= die definierende Gleichung von  $F$  in der lokalen Darstellung)). *Es gilt  $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$ . Das ist Kurzschreibweise für*

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i.$$

*Beweis.* Vollständig analog zum Fall  $E = TM$  aus [2, Lemma II.10.33].  $\square$

Wir betrachten als nächstes die  $\omega$  und  $\Omega$  die zu verschiedenen Trivialisierungen gehören: Seien  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  und analog  $\phi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^r$  mit den natürlichen Rahmen  $s_i(x) := \phi_\beta^{-1}(x, e_i)$  und  $t_i(x) := \phi_\alpha^{-1}(x, e_i)$ , wobei  $e_i$  die Standardorthonormalbasis des  $\mathbb{R}^r$  ist. Sei  $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$  die Übergangsfunktion.

Die Zusammenhangsformen auf  $U_\alpha, U_\beta$  bzgl. der Rahmen  $t_i$  bzw.  $s_i$  bezeichnen wir mit  $\omega_\alpha$  bzw.  $\omega_\beta$ . Analog die Krümmungsformen mit  $\Omega_\alpha$  bzw.  $\Omega_\beta$ .

**Satz III.2.23.** *Es gilt*

$$\omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = \mu_{\alpha\beta} \omega_\alpha \mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^{-1} \quad (\text{III.4})$$

$$\Omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\alpha \mu_{\beta\alpha}. \quad (\text{III.5})$$

*Beweis.* Wir schreiben  $\mu_{\beta\alpha}(x)(e_j) = \mu_j^i(x)e_i$  für festes  $\alpha$  und  $\beta$ .

Es ist  $t_j(x) = \phi_\beta^{-1}(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, e_j)) = \phi_\beta^{-1}(x, \mu_{\beta\alpha}(x)(e_j)) = \mu_j^i(x)s_i(x)$ , wobei die letzte Gleichheit folgt, da  $\phi_\beta$  die Vektorraumstruktur auf den Fasern respektiert, vgl. Definition II.1.4. Damit erhalten wir für  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_X t_j & = & \nabla_X (\mu_j^\ell s_\ell) \\ \parallel & & \parallel \\ (\omega_\alpha)_j^i(X) t_i & & (d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X)) s_\ell \end{array}$$

und somit

$$(\omega_\alpha)_j^i(X) \mu_i^\ell = d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X),$$

also  $\mu_{\beta\alpha} \omega_\alpha = d\mu_{\beta\alpha} + \omega_\beta \mu_{\beta\alpha}$ . Mittels der äußeren Ableitung erhalten wir aus (III.4) zusammen mit  $\Omega_\beta = d\omega_\beta + \omega_\beta \wedge \omega_\beta$  aus Satz III.2.22:

$$\begin{aligned} \Omega_\beta &= d(\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) + (\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) \wedge (\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) \\ &= d\mu_{\beta\alpha}^{-1} \wedge \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge d\mu_{\beta\alpha} + d\mu_{\beta\alpha}^{-1} \wedge d\mu_{\beta\alpha} \\ &\quad + \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \wedge \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge d\mu_{\beta\alpha} \\ &\quad + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \wedge \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \\ &= \mu_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\alpha \mu_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad \square$$

### III.3. Hauptsymbol und Klassifikation

Wir werden spezielle Unterklassen von Differentialoperatoren kennenlernen. Diese werden durch das sogenannte Hauptsymbol identifiziert:

Woche 7

#### III.3.1. Hauptsymbol

Schon an der lokalen Darstellung des Zusammenhangs kann man sehen, dass der lokale Ausdruck je nach Wahl der Koordinaten stark variieren kann – so können z.B. niedrigere Ordnungsterme verschwinden oder auftauchen. Man kann allerdings den Termen mit den höchsten Ableitungen einen koordinatenunabhängigen Sinn geben.

**Definition III.3.1.** Sei  $P \in \text{Diff}^\ell(E, F)$ . In lokalen Koordinaten um  $x \in U$  sei  $P = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x) D^\alpha$  mit  $a_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, F)|_U)$ . Dann sei das *Hauptsymbol von P im Punkt*  $\xi = \xi_j dx^j \in T_x^* M$  definiert als

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) := i^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Hierbei ist  $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m}$  mit  $m = \dim M$ .

Bevor wir im nächsten Lemma zeigen, dass diese Definition koordinatenunabhängig ist, bemerken wir zunächst den Faktor  $i$  in der Definition. Das ist zwar eine Wahl der Definition, kommt aber daher, dass der Übergang von  $\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) D^\alpha$  zum Hauptsymbol eine Fouriertransformation ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_{x^i} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (i \xi_i) f(x) dx$$

gilt.

**Lemma III.3.2.** *Es gilt*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(x) \in \text{Hom}(E_x, F_x),^*$$

wobei  $f$  eine Funktion mit  $d_x f = \xi$  ist. Insbesondere ist damit das Hauptsymbol ein wohldefinierte glatte Funktion auf  $T^*M$ , die in jeder Faser ein homogenes Polynom in den  $\xi^i$  der Ordnung  $\ell$  ist.

*Beweis.* Wir verwenden die Leibnizregel und sehen, dass  $e^{-itf} \circ P \circ e^{itf}$  in  $t$  ein Polynom der Ordnung  $\ell$  ist. Der Term der Ordnung  $\ell$  in  $x$  hat die Form

$$(it)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \prod_{i=1}^m (\partial_{x^i} f(x))^{\alpha_i} = (it)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

\*Hierbei ist  $e^{itf}$  als Multiplikationsoperator zu verstehen. D.h. ist  $\phi \in \Gamma(E)$ , dann ist  $(P \circ e^{itf})(\phi) = P(e^{itf} \phi)$ . Insbesondere sagt das Lemma also auch, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(\phi)(x)$  wirklich nur von  $\phi(x)$  abhängt. Das ist für  $(P\phi)(x)$  natürlich falsch, sobald  $P$  nicht Ordnung Null hat.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(damit ist die rechte Seite im Lemma insbesondere unabhängig von der Wahl von  $f$ ) und damit folgt die Behauptung.  $\square$

Analog erhalten wir, vgl. ÜA 15:

**Lemma III.3.3.** *Es gilt für  $z \in E_x$*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi)z = \frac{i^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f(x) = 0$  und  $d_x f = \xi$  und  $u \in \Gamma(E)$  mit  $u(x) = z$  ist.

**Beispiel III.3.4.** Für die ersten Beispiele aus III.1.1 haben wir die Hauptsymbole

(i) Laplaceoperator:  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = |\xi|^2$

(ii) Wellenoperator:  $-\xi_0^2 + |\xi|^2$  (wobei  $\xi_0$  zu  $t = x^0$  gehört)

(iii) Wärmeoperator:  $-|\xi|^2$

(iv) Cauchy-Riemann-Operator:  $\frac{i}{2}(\xi_1 + i\xi_2)$

(v) Sturm-Liouville:  $p\xi^2$

(vi) Gradient:  $i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Divergenz:  $i(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$

Rotation:  $i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3$

Allgemein haben wir mittels Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})u &= \left(1 - itf - \frac{t^2}{2} f^2 + O(t^3)\right) \left(Pu + itP(fu) - \frac{t^2}{2} P(f^2u) + O(t^3)u\right) \\ &= Pu + it(P(fu) - fPu) - \frac{t^2}{2} (P(f^2u) - 2fP(fu) + f^2Pu) + O(t^3)u \\ &= \left(P + it[P, f] - \frac{t^2}{2} [[P, f], f] + O(t^3)\right) u. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für Differentialoperatoren der Ordnung 1 bzw. 2:

$$\sigma_1(P)(x, \xi) = i[P, f]|_x, \quad \sigma_2(P)(x, \xi) = -\frac{1}{2} [[P, f], f]|_x.$$

**Beispiel III.3.5.**

- (i) Das Hauptsymbol  $\sigma_1(d)(x, \xi) \in \text{End}(T_x^*M)$  der äußeren Ableitung  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  ist  $\sigma_1(d)(x, \xi)\alpha = i\xi \wedge \alpha$ .

- (ii) Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Zusammenhang  $\nabla$ . Wir betrachten den Zusammenhang als Abbildung  $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ . Sein Hauptsymbol ist

$$\sigma_1(\nabla)(x, \xi)v = i[\nabla, f]v|_x = i(\nabla(fv) - f\nabla v)|_x = id_x f \otimes v(x) = i\xi \otimes v(x)$$

für  $v \in \Gamma(E)$  und  $d_x f = \xi$ .

**Lemma III.3.6.** Seien  $P, P_1 \in \text{Diff}^{\ell_1}(E_1, E_2)$  und  $P_2 \in \text{Diff}^{\ell_2}(E_2, E_3)$ . Dann ist

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi).$$

Außerdem gilt  $\sigma_\ell(P^\dagger) = \sigma_\ell(P)^\dagger$ .

*Beweis.* Direktes Einsetzen. □

**Bemerkung III.3.7.** Für skalare Differentialoperatoren ( $E_i = M \times \mathbb{R}$ ) ist

$$\sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi)$$

und damit

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_1 \circ P_2)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi),$$

obwohl i.A.  $P_1 \circ P_2 \neq P_2 \circ P_1$  gilt.

### III.3.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren

Das meiste was wir über (lineare) partielle Differentialgleichungen wissen, geht auf die folgenden drei Prototypen aus der klassischen Physik zurück, die wir hier jeweils für beschränkte Gebiete des  $\mathbb{R}^n$  formulieren. Aufgrund der Beschränktheit des Gebietes brauchen wir hier im Allgemeinen Zusatzbedingungen (sogenannte Randbedingungen) am Rand des Gebietes.

- (i) *Wellengleichung:*  $(-\partial_t^2 + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$

Eine Lösung  $u(x, t)$  in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (und glattem Rand) beschreibt die Bewegung einer Membran  $\Omega$  am Punkt  $x \in \Omega$  zur Zeit  $t$ . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wellengleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} u(x, 0) = u_0 & \text{Anfängliche Position} \\ \partial_t u(x, 0) = u_1 & \text{Anfängliche Geschwindigkeit} \\ u(x, t) = v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 & \text{Randbedingung.} \end{array}$$

Das Hauptsymbol des Wellenoperators ist  $-\xi_0^2 + \sum_i \xi_i^2$ . Da dessen Niveaumengen Hyperboloide in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind, nennt man die Differentialgleichung *hyperbolische*.

- (ii) *Wärmegleichung:*  $(-\partial_t + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$  Eine Lösung  $u(x, t)$  in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (und glattem Rand) beschreibt die Temperatur in  $x \in \Omega$  zur Zeit

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

$t$ . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wärmeleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 && \text{Anfängliche Temperatur} \\ u(x, t) &= v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 && (\text{Dirichlet}) \text{ Randbedingung.} \end{aligned}$$

Alternativ treten andere Randbedingung auf, z.B. *Neumannrand-Bedingung*  $\partial_\nu u(x, t) = v$  für  $x \in \partial\Omega, t \geq 0$ , wobei  $\nu$  das Einheitsnormalfeld von  $\partial\Omega$  ist. Die Dirichletrandbedingung würde hier eine feste Temperatur am Rand modellieren, während die Neumannrandbedingung besagen würde, dass es keinen Wärmefluss durch den Rand gibt.

Das volle Symbol des Wärmeoperator (d.h. die Konstruktion wie bei Hauptsymbol nur mit der ganzen Summe  $\sum_{|\alpha| < 2}$ , also mit den Termen niedrigerer Ordnung) ist  $-\xi_0 + \sum_i \xi_i^2$ . Die Niveaumengen sind Paraboloiden in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , weshalb man die Wärmeleichung als *parabolisch* klassifiziert.

- (iii) Laplacegleichung:  $\sum_i \partial_{x_i}^2 u = 0$ . Lösungen der Laplacegleichung sind stationäre (zeitunabhängige) Lösungen der Wärmeleichung.

Das Hauptsymbol ist  $\sum_i \xi_i^2$ . Dessen Niveaumengen sind Ellipsoide in  $\mathbb{R}^{n+1} \rightsquigarrow$  *elliptische DGL*.

Auf Mannigfaltigkeiten sehen die Gleichungen analog aus (jeweils mit dem Laplaceoperator der Riemannschen Mannigfaltigkeit). Auf geschlossenen (=kompakt und ohne Rand) Mannigfaltigkeiten entfallen die Randwertbedingungen.

Die charakteristischen Eigenschaften der obigen drei Gleichungen sind sehr verschieden. Z.B. sind Lösungen der Laplacegleichung immer glatt, wogegen  $u(x, t) = f(x - t)$  die Wellengleichung in  $\mathbb{R}$  löst, sobald  $f$  zweimal differenzierbar ist.

Ein Großteil wichtiger Eigenschaften und Methoden für partielle Differentialoperatoren sind wahr oder falsch oder anwendbar je nachdem, ob das Hauptsymbol 'ähnlich' zu dem einer der obigen Gleichungen ist. Daher kommt es, dass, wenn möglich, Differentialoperatoren in die Gruppe der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren eingeteilt werden (natürlich gibt es viel mehr Differentialoperatoren):

**Definition III.3.8.** Sei  $E \rightarrow M$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $r$ . Ein Differentialoperator zweiter Ordnung  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  heißt *elliptisch/hyperbolisch/parabolisch*, wenn in jedem Punkt  $(x, \xi) \in T^*M$  das Hauptsymbol (nun punktweise eine  $r \times r$ -Matrix) positiv oder negativ definit ist/genau einen negativen und sonst nur positive Eigenwerte hat/ genau einen Null Eigenwert hat und alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben.

**Bemerkung III.3.9.** Es stellt sich heraus, dass die meisten Eigenschaften elliptischer Operatoren sich auf Differentialoperatoren  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  beliebiger Ordnung übertragen lassen, solange das Hauptsymbol invertierbar ist. Deshalb nennt man auch solche Operatoren *elliptisch*.

Auch viele (wenn auch nicht alle) der linearen partiellen Differentialgleichungen, die in der Geometrie auftauchen, sind von diesen drei Typen:

- (i) elliptisch: Laplace und Diracgleichung\* auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
- (ii) parabolisch:
  - a) Wärmegleichung
  - b) Mittlerer Krümmungsfluss: Sei  $F: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine zeitabhängige Einbettung einer Hyperfläche  $M$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit Normalenvektorfeld  $\nu$  und mittlere Krümmung  $H$ . Dann ist der mittlere Krümmungsfluss Lösungen  $F$  von

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H\nu.$$

- c) Ricci(de Turk)fluss<sup>†</sup> ist eine Evolutionsgleichung für die Metrik:

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

- (iii) hyperbolisch:<sup>‡</sup>

- a) Wellengleichung  $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$  mit  $\Delta_g$  Laplaceoperator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ .
- b) Auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit ist der zugehörige Laplaceoperator hyperbolisch und wird *D'Alembert Operator* genannt. Für den Spezialfall  $(M \times \mathbb{R}, g - dt^2)$  ist  $\partial_t^2 - \Delta_g$  der zugehörige D'Alembert Operator.
- c) Cauchyprobleme, z.B. in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

## III.4. Elliptische Diffops

In Spezialfällen, z.B. vorliegen von genügend Symmetrien kann man elliptische Differentialgleichungen explizit lösen. Im Allgemeinen hat man da keine Chance. Deshalb geht es zumeist um Fragen, wie: Gibt es überhaupt eine Lösung? Ist diese eindeutig? Welche Eigenschaften (z.B. Glattheit) hat die Lösung?

Wir listen hier zumeist ohne Beweise einige Methoden und Begriffe auf, die gerade für elliptische Operatoren oft Verwendung finden.

Es gibt verschiedene Methoden Existenz von Lösungen zu elliptischen Differentialgleichungen über geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu zeigen. Wir werden hier die Fredholmalternative kennenlernen und Beispiele sehen, wo man nutzt, dass sich die Differentialgleichung als Euler-Lagrangegleichungen eines schönen Variationsproblems

---

\*kommt noch

<sup>†</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci\\_flow](https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_flow)

<sup>‡</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic\\_partial\\_differential\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation)

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

schreiben lässt (wie wir schon die Geodätengleichung in [2] als Euler-Lagrangegleichung des Energiefunktionals verstanden haben).

Oft, und gerade im letzteren Fall der Euler-Lagrangegleichung, beweist man für eine elliptische Differentialgleichung selten direkt, dass sie eine Lösung hat, sondern man beweist zunächst, dass die Gleichung eine schwache Lösung besitzt:

**Definition III.4.1.** Seien  $E, F$  Vektorbündel mit Bündelmetriken und über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Sei  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\ell$  und  $f$  eine Schnitt von  $F$ . Dann nennen wir ein  $u \in L^1_{loc}(E)^*$  eine *schwache Lösung* von  $Pu = f$ , falls

$$\int_M \langle u, P^\dagger \phi \rangle d\text{vol}_g = \int_M \langle f, \phi \rangle d\text{vol}_g$$

für alle  $\phi \in \Gamma_c(F)$  ( $\Gamma_c(F)$  ist die Menge der kompakt getragenen glatten Schnitte in  $F$ ) gilt.

Wir nennen  $u$  eine (*starke*) *Lösung* von  $Pu = f$ , falls  $u$  mindestens  $\ell$ -mal stetig differenzierbar ist und  $Pu = f$  gilt.

Jede starke Lösung ist auch eine schwache Lösung. Umgekehrt muss, dass nicht gelten. In vielen Fällen hilft aber die Elliptische Regularitätstheorie zu zeigen, dass  $u$  genügend Regularität ( $\sim$ Differenzierbarkeit) besitzt.

Selbst wenn man diese Regularitätsaussagen hat, muss man selbstverständlich noch zeigen, dass es überhaupt eine schwache Lösung in einem geeigneten Funktionenraum gibt.

Egal ob schwache Lösung oder direkt Existenz einer Lösung zeigen, i.A. benutzt man Funktionenräume, die sich mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden, leichter verwenden lassen als  $k$ -fach differenzierbare Funktionen.

#### III.4.1. Grundlagen und erste Anwendungen

Ab sofort sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit Bündelmetrik  $h$  und Zusammenhang  $\nabla$ .

Betrachten wir aber zuerst eine zusammenhängende offene Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Der Raum  $C^k(\bar{\Omega})$  ist der Raum aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen deren Norm  $\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f|$  endlich ist. Das ist ein Banachraum (= vollständig normierter Raum).

Verallgemeinern wir das nun auf Vektorbündel:

$$\|s\|_{C^k(E)} := \max_{0 \leq \ell \leq k} \sup_{x \in M} |\nabla^\ell s|,$$

wobei  $|\nabla^\ell s|$  die Norm bzgl. der induzierten Bündelmetrik auf  $T^*M^{\otimes \ell} \otimes E$ .

---

\*Es ist  $L^1(E) := \overline{\Gamma_c(E)}^{\|\cdot\|_{L^1}}$  mit  $\|u \in \Gamma_c(E)\|_{L^1} = \int_M |u| d\text{vol}_g = \int_M \sqrt{\langle u, u \rangle} d\text{vol}_g$  und  $\Gamma_c(E)$  die kompakt getragenen glatten Schnitte von  $E$ .

Der Raum  $C^k(E)$  sind alle Schnitte mit  $\|s\|_{C^k(E)} < \infty$ . Der resultierende Raum ist wieder ein Banachraum und hängt (im Gegensatz zur Norm) bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten  $M$  nicht vom gewählten Zusammenhang  $\nabla^E$ , der gewählten Bündelmetrik und der Riemannschen Metrik ab.

Um elliptische Differentialgleichungen zu behandeln werden allerdings oft Hilfsräume eingesetzt:

Für  $s \in \Gamma_c(E)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}_{j \geq 0}$ , sei

$$\|s\|_{W^{k,p}} := \left( \int_M \sum_{j=0}^k |\nabla^j s|^p \operatorname{dvol}_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hier ist  $\nabla^j s \in \Gamma(T^*M^{\otimes j} \otimes E)$  und  $|\nabla^j s|$  steht für die durch  $g$  und  $h$  auf  $T^*M^{\otimes j} \otimes E$  induzierte Bündelmetrik.

Mit  $W_0^{k,p}(E)$  bezeichnen wir die Vervollständigung von  $\Gamma_c(E)$  in der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ -Norm. Für  $k = 0$  erhalten wir die  $L^p$ -Räume  $L^p(E) := W_0^{0,p}(E)$ .

Der *Sobolevraum*  $W^{k,p}(E)$  ist gegeben als die Vervollständigung von  $\{f \in \Gamma(E) \mid \nabla^\ell f \in L^p((T^*M)^{\otimes \ell} \otimes E), \ell \leq k\}$  in der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ -Norm. Im Falle von vollständigen Mannigfaltigkeiten ist  $W^{k,p}(E) = W_0^{k,p}(E)$ . Die  $W^{k,p}$  ( $1 \leq p < \infty$ ) sind alles Banachräume, im Falle  $p = 2$  sogar Hilberträume\* (in dem Falle schreiben wir kurz  $H^k(E) := W^{k,2}(E)$ ). Ist die Mannigfaltigkeit kompakt, dann sind die  $W^{k,p}$ -Normen zu verschiedenen Riemannschen Metriken  $g$ , Zusammenhängen  $\nabla^E$  und Bündelmetriken äquivalent. (Das ist falsch bei nichtkompakten Mannigfaltigkeiten.)<sup>†</sup>

Für  $L^p$ -Räume gilt die *Hölder-Ungleichung*<sup>‡</sup>: Ist  $f_1 \in L^p(E)$ ,  $f_2 \in L^q(E)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , folgt  $\langle f_1, f_2 \rangle \in L^1(M)$  und

$$\int_M |\langle f_1, f_2 \rangle| \operatorname{dvol}_g \leq \|f_1\|_{L^p} \|f_2\|_{L^q}.$$

\*Hilbertraum = Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt kommt. Z.B.  $s, s' \in L^2(E)$  hat das  $L^2$ -Skalarprodukt  $\langle s, s' \rangle_{L^2} := \int_M \langle s, s' \rangle_E \operatorname{dvol}_g$  – also einfach immer die polarisierte Norm.

†Es gibt alternative Definitionen in lokalen Koordinaten und lokalen Trivialisierungen. Setzt man  $\tilde{W}^{k,p}(E)$  die Vervollständigung von  $C_c^\infty(E)$  in der Norm

$$\|f\|_{\tilde{W}^{k,p}} := \left( \sum_i \|(\xi_i)_*(\rho_i f)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^m)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei  $\kappa_i: U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^m$  Koordinaten auf einer lokal endlichen Überdeckung  $U_i$  von  $M$  mit zugehöriger Zerlegung der Eins  $\rho_i$  ist,  $\theta_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$  lokale Trivialisierungen von  $E$  sind und  $\xi_i := (\kappa_i \times \operatorname{Id}) \circ \theta_i: E|_{U_i} \rightarrow V_i \times \mathbb{K}^r$ . Im Falle von geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist diese Norm äquivalent zur obigen Norm und unabhängig, ansonsten braucht man Annahmen an die Karten und Trivialisierungen.

‡Beweis mit der Youngschen Ungleichung - ganz analog zum Fall  $M = \mathbb{R}$

### III.4.2. Wichtige Begriffe der Funktionalanalysis

Seien  $X, Y$  Banachräume. Die zugehörigen Normen bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_X$  bzw.  $\|\cdot\|_Y$ . Der Dualraum  $X^* := \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear}\}$  ist zusammen mit  $\|f\|_{X^*} := \sup\{|f(x)| \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$  wieder ein Banachraum.

Ein Banachraum heißt *reflexiv*, falls  $X^{**} = X$  gilt. Z.B. sind die Sobolevräume  $W^{k,p}$  für  $1 < p < \infty$  reflexiv. Hilberträume sind immer reflexiv (Das folgt aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz).

**Bemerkung III.4.2.** (Oft genutzte Lemmata der Funktionalanalysis zu Banachräumen)

- (i) Jede nichtleere beschränkte und abgeschlossene Menge eines Hilbertraumes (oder allgemeiner eines reflexiven Banachraumes)  $X$  enthält eine schwach konvergente Teilfolge. Hierbei heißt  $v_i \rightarrow v$  *schwach konvergent* in  $X$ , wenn  $\langle u, v_i \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$  für alle  $u \in X^*$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist die duale Paarung von  $X$  und seinem Dual  $X^*$  ist, also  $\langle f \in X^*, x \in X \rangle := f(x)$ .

Im Falle eines Hilbertraumes kann jedes  $f \in X^*$  als  $\langle y, \cdot \rangle: X \rightarrow \mathbb{K}$  für ein  $y \in X$  dargestellt werden (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz). Dann ist die duale Paarung einfach das Skalarprodukt.

Konvergiert  $v_i \rightarrow v$  schwach in  $W^{k,p}(E)$ , dann konvergiert  $v_i$  auch schwach zu  $v$  in  $W^{\ell,p}(E)$  für alle  $0 \leq \ell \leq k$ . Das folgt, da  $W^{k,p}(E)^* \subset W^{\ell,p}(E)^*$  wegen  $W^{\ell,p}(E) \subset W^{k,p}(E)$  gilt.

- (ii) Konvergiert  $v_i$  schwach in  $X$  gegen  $v$ , dann gilt  $\|v\|_X \leq \liminf \|v_i\|_X$ .
- (iii) Jede in der Norm konvergente\* (= stark konvergente) Folge in  $X$ , konvergiert auch schwach und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht: Ein Beispiel ist  $H = L^2(\mathbb{R})$ . Sei  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } u \in [0, 1]$ . Setze  $v_i(x) := u(x - i)$ . Dann konvergiert  $v_i$  schwach gegen 0 (Es reicht, gegen  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ -Funktionen zu testen, da diese dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegen.) Aber die Norm von  $v_i$  ist konstant und damit kann nicht  $v_i \rightarrow 0$  in  $H$  gelten.

Sei  $A: X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Obwohl als Abbildung geschrieben bedeutet das im Allgemeinen nicht, dass  $Ax$  für alle  $x \in X$  definiert ist. Ein linearer Operator  $A: \text{dom } A \subset X \rightarrow Y$  kommt mit einem Definitionsbereich  $\text{dom } A$ . Wir betrachten hier nur *dicht definierte* Operatoren, d.h. die Vervollständigung

$$\overline{\text{dom } A}^X := \{x \in X \mid \exists x_i \in \text{dom } A : \|x_i - x\|_X \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0\}$$

des Definitionsbereich bzgl. der Norm auf  $X$  gibt ganz  $X$ .

Betrachten wir unsere Differentialoperatoren  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  als Operatoren auf  $L^2$ , d.h.  $P: \Gamma_c(E) \subset L^2(E) \rightarrow \Gamma_c(F) \subset L^2(F)$ , für  $(M, g)$  vollständig, dann ist

\*Das ist die Standardkonvergenz in  $X$ , d.h.  $\|x_i \rightarrow x\|_X \rightarrow 0$ .

$P$  ein dicht definierter Operator. Genauso könnten wir  $P$  aber auch als Operator  $P: \Gamma_c(E) \subset W^{k,p}(E) \rightarrow W^{\ell,p}(F)$  für  $1 \leq p < \infty$  betrachten und auch dieser wäre über vollständigen Mannigfaltigkeiten dicht definiert.

Ein dicht definierter Operator  $A: \text{dom } A \subset X \rightarrow Y$  heißt *stetig* oder *beschränkt*, falls es ein  $c > 0$  gibt, so dass  $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$  für alle  $x \in \text{dom } A$  gilt.

Man kann zeigen, dass für beschränkte Operatoren  $Ax$  für alle  $x \in X$  durch folgende Konstruktion wohldefiniert werden kann: Sei  $x_i \in \text{dom } A \rightarrow x$  in  $X$ . Dann konvergiert  $Ax_i$  zu einem  $y \in Y$ . Dann setzt man  $Ax = y$ .\*

**Bemerkung III.4.3.** Unsere Differentialoperatoren  $P: \Gamma_c(E) \subset L^2(E) \rightarrow \Gamma_c(F) \subset L^2(F)$  der Ordnung  $k \geq 1$  sind immer unbeschränkt als Operator von  $L^2$  nach  $L^2$ , d.h. die Operatornorm  $\|P\| = \sup_{s \in \Gamma_c(E), \|v\|_{L^2(E)}=1} \|Pv\|_{L^2(F)}$  ist  $\infty$ . Als Operatoren  $P: H^k \rightarrow L^2$  sind sie allerdings beschränkt: Z.B. für  $Pf := f'$  für  $f \in C^\infty(S^1)$  gilt

$$\|P: H^1 \rightarrow L^2\| = \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f'\|_{L^2(S^1)} \leq \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f\|_{H^1(S^1)} = 1.$$

Insbesondere sagt uns das, dass wir  $f'$  für alle  $f \in H^1$  definieren können. Das war anfangs nicht klar, da  $f$  um  $f'$  zu bilden ja differenzierbar sein muss.

Ähnlich sieht man, dass für einen Differentialoperator  $P: L^p(E) \rightarrow L^p(F)$  der Ordnung  $\ell$  über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $W^{\ell,p}(E)$  eine Teilmenge des maximal möglichen Definitionsbereich ist.

Ein Operator  $A: X \rightarrow Y$  heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge  $x_i \in \text{dom } A$  die Folge  $Ax_i$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt.

Kompakte Operatoren sind insbesondere beschränkt. Die Hintereinanderausführung eines kompakten und eines stetigen Operators ist wieder kompakt.

Kompaktheit ist eine wichtige Eigenschaft, die oft verwendet wird. In unserem Kontext werden dafür oft Soboleveinbettungssätze oder Arzela-Ascoli verwendet:

**Satz III.4.4** (Einbettungen). *Sei  $M^m$  geschlossen. Sei  $\sigma(p, k) := k - \frac{m}{p}$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ ,  $f \in W^{k,p}(E)$ . Dann gilt*

- (i) *Für  $k > \ell$  mit  $\sigma(q, \ell) \leq \sigma(p, k)$ , dann ist die Inklusion  $W^{k,p}(E) \hookrightarrow W^{\ell,q}(E)$  stetig. Gilt zusätzlich  $\sigma(q, \ell) < \sigma(p, k)$ , dann ist diese Inklusion ein kompakter Operator.*

---

\**Beweis.*  $Ax_i$  konvergiert in  $X$ : Wegen  $\|Ax_i - Ax_j\|_Y \leq c\|x_i - x_j\|_X$  ist  $Ax_i$  eine Cauchyfolge und konvergiert damit in  $Y$ .

Wohldefiniertheit: Seien  $x_i, y_i$  zwei Folgen in  $X$  mit  $x_i \rightarrow x$  und  $y_i \rightarrow x$  in  $X$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Ay_i - y\|_Y &\leq \|Ay_i - Ax_i\|_Y + \|Ax_i - y\|_Y \leq c\|y_i - x_i\|_X + \|Ax_i - y\|_Y \\ &\leq c(\|x_i - x\|_X + \|y_i - x\|_X) + \|Ax_i - y\|_Y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $A: X \rightarrow Y$  auf ganz  $X$  definiert und bleibt ein beschränkter linearer Operator.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

- (ii) Ist  $\sigma(p, k) \geq \ell$ , dann ist die Inklusion  $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$  stetig. Ist sogar  $\sigma(p, k) > \ell$ , dann ist Inklusion  $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$  kompakt.

Einige wichtige Spezialfälle:

- (i) Ist  $f \in H^k(E)$  und  $k > m$ , dann ist  $f \in C^{k-m}(E)$ .  
(ii)  $C^\infty = \bigcap_k H^k$ .

**Satz III.4.5** (Arzela-Ascoli). Sei  $M$  kompakt und  $k > \ell$ . Dann ist die Inklusion  $C^k(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$  kompakt.

#### III.4.3. Elliptische Abschätzungen

**Satz III.4.6.** Sei  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $k$  über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gibt es Konstanten  $c_i$  so dass

- (i) (Schauder Abschätzung)

$$\|u\|_{C^{k+\ell}} \leq c_1 \|Pu\|_{C^\ell} + c_2 \|u\|_{C^0} \leq c_3 \|u\|_{C^{k+\ell}}$$

für alle  $u \in C^{k+\ell}(E)$  und

- (ii) ( $L^p$ -Abschätzung)

$$\|u\|_{W^{k+\ell,p}} \leq c_4 \|Pu\|_{W^{\ell,p}} + c_5 \|u\|_{L^1} \leq c_6 \|u\|_{W^{k+\ell,p}}$$

für alle  $u \in W^{k+\ell,p}(E)$  gilt.

Insbesondere folgt für  $Pu = f$ : Ist  $f \in W^{\ell,p}(F)$  und  $u \in W^{k,p}(E)$ , dann ist  $u \in W^{k+\ell,p}(E)$ . Ist  $f \in C^\ell(F)$  und  $u \in C^0(E)$ , dann ist  $u \in C^{k+\ell}(E)$ .

**Folgerung III.4.7.** Sei  $P$  elliptisch und sei  $u$  eine schwache Lösung in  $L^2$  von  $Pu = \lambda u$ . Dann ist  $u \in C^\infty$ . Eigenwerte elliptischer Operatoren sind also immer glatt.

**Bemerkung III.4.8.** (i) Die linken Teile der Ungleichungen sind die eigentlichen elliptischen Abschätzungen. Die rechten Ungleichungen folgen direkt, da  $P$  von  $k$ -ter Ordnung ist, vgl. Bemerkung III.4.3.

- (ii) Betrachten wir einen Differentialoperator  $P$  der Ordnung  $s$  als Operator zwischen Sobolevräumen

$$P: \Gamma_c(E) \subset W^{k,p}(E) \rightarrow W^{k-s,p}(F).$$

Da  $\Gamma(E)$  nie der maximale Definitionsbereich ist, könnte es a priori sein, dass es ein  $u \in W^{k,p}(E)$  mit  $Pu = 0$  gibt, aber  $u$  nicht glatt ist. Der letzte Satz sagt uns, dass das nicht passieren kann, und  $u$  immer glatt ist. Insbesondere sagt uns das, dass für die Bestimmung von  $\ker P$  es nicht darauf ankommt, ob wir  $P$  als Operator auf  $W^{k,p}(E)$  auffassen oder dessen der Einschränkung auf  $W^{k+\ell,p}(E)$  betrachten.

### III.4.4. Existenz von Lösungen in Sobolevräumen - Fredholmalternative

Die Fredholmalternative ist eine Möglichkeit Existenz von Lösungen zu elliptischen Differentialgleichungen zu beweisen. Wir geben hier nur die Fredholmalternative für Differentialoperatoren zwischen Hilberträumen an:

**Satz III.4.9** (Fredholm-Alternative). *Seien  $E \rightarrow M$  und  $F \rightarrow M$  Vektorbündel mit Bündelmetrik über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Sei  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $\ell$ . Dann gilt*

- (i) Sowohl  $\ker P$  als auch  $\ker P^\dagger$  sind endlich dimensional.
- (ii) Ist  $0 \neq f \in H^\ell(F)$ , dann existiert genau dann eine schwache Lösung  $u$  von  $Pu = f$ , wenn  $f$  orthogonal (in  $L^2(F)$ ) zu  $\ker P^\dagger$ . Diese Lösung ist eindeutig, falls  $u$  orthogonal (in  $L^2(E)$ ) zu  $\ker P$  ist.
- (iii) Für skalare elliptische Differentialoperatoren gilt  $\dim \ker P = \dim \ker P^\dagger$ .

Ist  $E = F$ , dann sind insbesondere die Eigenräume  $\ker(P - \lambda \text{Id})$  endlich dimensional.

Um die Fredholmalternative zu beweisen, braucht man insbesondere ein Kriterium, wann der Kern vom elliptischen Operator endlich dimensional ist. Ein solches Kriterium kommt mit folgendem allgemeinem Lemma aus der Funktionalanalysis:

**Lemma III.4.10.** *Seien  $X, Y, Z$  reflexive Banachräume. Sei  $X \hookrightarrow Y$  eine kompakte Inklusion und  $L: X \rightarrow Z$  ein beschränkter Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) Das Bild  $L(X)$  ist in  $Z$  abgeschlossen und der Kern  $\ker L$  ist endlich dimensional.
- (ii) Es gibt Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so dass

$$\|x\|_X \leq c_1 \|Lx\|_Z + c_2 \|x\|_Y$$

für alle  $x \in X$  ist.

Das heißt die Hauptarbeit für die Fredholmalternative ist der Beweisen der elliptischen Abschätzungen aus dem letzten Abschnitt. Wir beweisen das hier alles nicht, sondern schauen uns ein paar Beispiele an:

**Beispiel III.4.11.** (Gewöhnliche Differentialgleichungen auf  $S^1 = [0, 2\pi]/\sim$ ) Sei  $Pu = u' + a(x)u$ ,  $u, a \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ . Dann ist  $P$  elliptisch und  $P^\dagger u = -u' + a(x)u$ . Aus  $P^\dagger u = 0$  folgt  $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}$ . Damit  $u \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$  gilt, muss für  $a$  die Bedingung  $\int_0^{2\pi} a(y)dy = 0$  gelten. Es ist also  $\dim \ker P^\dagger \leq 1$ . (Für  $a(x) = \sin x$  ist z.B.  $\ker P^\dagger = \text{span}\{e^{1-\cos x}\}$ .) Die Fredholmalternative sagt also, wir können genau dann  $Pu = f \in C^\infty(S^1)$  für  $u$  lösen, wenn  $f \perp_{L^2} \ker P^\dagger$  steht. In diesem Fall ist die Lösung, dann auch eindeutig.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

**Beispiel III.4.12.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Delta$  der Laplace auf Funktionen. Wir betrachten  $Pu = \Delta u + c(x)u$  mit  $c(x) \geq 0$ ,  $c \not\equiv 0$ , und wollen  $Pu = f$  lösen. Als erstes zeigen wir, dass  $\ker P = \{0\}$  ist. Sei dazu  $Pu = 0$ . Dann gilt

$$0 = \int_M u(\Delta u + cu) d\text{vol}_g = \int_M (|du|_g^2 + cu^2) d\text{vol}_g \geq 0.$$

Also muss  $u$  konstant und da  $c \not\equiv 0$  ist, damit  $u \equiv 0$  sein. Wegen  $P = P^\dagger$  können wir die Fredholmalternative anwenden und erhalten, dass  $\Delta u + cu = f$  für alle  $f \in C^\infty(M)$  eine eindeutige Lösung in  $H^\ell(M)$  für alle  $\ell$  hat. Damit ist die Lösung insbesondere auch glatt.

Ist  $c \equiv 0$ , ergibt obige Methode, dass  $\Delta u = f$  genau dann eine Lösung hat, falls  $\int_M f d\text{vol}_g = 0$  gilt.

Analoge Argumente funktionieren auch für vektorwertige Funktionen und  $c$  eine positiv definite Matrix oder auf Vektorbündeln mit geeigneten  $c$ , vgl. Abschnitt III.4.5.

**Beispiel III.4.13** (Hodge-Zerlegung). Sei  $(M, g)$  eine geschlossene zusammenhängende orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$  der Hodge-Laplace. Sei  $\mathcal{H}^k := \ker \Delta \subset \Omega^k(M)$  der Raum der *harmonischen*  $k$ -Formen. Nach Satz III.4.9 ist  $\mathcal{H}^k$  endlich dimensional. Wegen

$$\int_M g(h, \Delta h) d\text{vol}_g = \int_M g(h, (d\delta + \delta d)h) d\text{vol}_g = \int_M (|dh|_g^2 + |\delta h|_g^2) d\text{vol}_g$$

ist

$$\mathcal{H}^k = \{h \in \Omega^k(M) \mid dh = 0 \text{ und } \delta h = 0\}.$$

Für  $\phi \in \Omega^k(M)$  sei  $\phi = \psi + h$  die Zerlegung mit  $h \in \mathcal{H}^k$  und  $\psi \perp \mathcal{H}^k$ . Senkrecht bezieht sich hier auf die durch  $g$  auf  $\Omega^k(M)$  induzierte Bündelmetrik. Nach der Fredholmalternative gibt es damit ein  $\omega \in \Omega^k(M)$  mit  $\Delta\omega = \psi$ , und damit

$$\phi = \Delta\omega + h = d\delta\omega + \delta d\omega + h = d\alpha + \delta\beta + h$$

mit  $\alpha = \delta\omega$  und  $\beta = d\omega$ . Wegen  $d^2 = 0$  ist  $d\alpha \perp \delta\beta$ . Weiterhin ist  $d\alpha \perp h$  und  $\delta\beta \perp h$ . Wir haben also damit eine orthogonale Zerlegung einer  $p$ -Form in exakte, ko-exakte und harmonische Formen - die sogenannte *Hodge-Zerlegung*.

Sei nun  $\phi = d\alpha + \delta\beta + h$  *geschlossen*, d.h.  $d\phi = 0$ . Dann ist  $0 = d\delta\beta$  und somit  $\|\delta\beta\|_{L^2}^2 = \int_M \beta d\delta\beta d\text{vol}_g = 0$ , also  $\delta\beta = 0$ . Jede geschlossene Form hat also eine Hodge-Zerlegung der Form  $\phi = d\alpha + h$ . Also ist  $h$  die eindeutige harmonische Form in der de-Rham Kohomologiekategorie von  $\phi$ :  $[\phi] \in H_{dR}^p(M) := \frac{\ker d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)}{\text{im } d: \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)}^*$ .

Weiterhin sieht man wegen  $\Delta = d\delta + \delta d$  und  $\delta = (-1)^{mp-1} * d^*: \Omega^{p+1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ , dass der Hodge-Laplace mit dem Hodge-Stern Operator kommutiert. Also bildet  $*$

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/De\\_Rham\\_cohomology](https://en.wikipedia.org/wiki/De_Rham_cohomology) - Wegen  $d^2 = 0$  ist das Bild wirklich eine Teilmenge von des Kerns.

harmonische Formen auf harmonische Formen ab. Da  $*$  eine Isometrie (bzgl. der  $L^2$ -Norm) ist, ist  $*$ :  $\mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^{m-p}$  eine Isometrie – das entspricht der *Poincaré Dualität* auf der de-Rham Kohomologie.

### III.4.5. Laplace-artige Operatoren

Eine wichtige Klasse von elliptischen Operatoren zu denen auch der Laplaceoperator auf Funktionen gehört sind Laplace-artige Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

**Definition III.4.14.** Ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem reellen Vektorbündel  $E \rightarrow M$  über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist *Laplace-artig* (vom *Laplace-Typ*), wenn sein Hauptsymbol in  $\xi \in T_x^*M$  die skalare Multiplikation mit  $|\xi|_g^2$  ist.

**Bemerkung III.4.15.** Ist  $(M, g)$  Riemannsch, ist der Laplace-artige Operator damit automatisch elliptisch; ist  $(M, g)$  Lorentzsch, dann hyperbolisch. Nach Beispiel III.3.4 ist  $P$  genau dann Laplace-artig, wenn  $[[P, f], f] = -2|df|_g^2$  gilt.

In lokalen Koordinaten  $x \in U$  hat ein Laplace-artiger Operator die Form

$$P = -g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + a^k \partial_{x^k} + b$$

mit  $a^k, b \in \Gamma(\text{End}(E)|_U)$ .

**Beispiel III.4.16** (Der Hodge-Laplace ist Laplace-artig). Der Hodge-Laplace  $\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$  ist Laplace-artig: Nach Beispiel III.3.5 ist  $\sigma_1(d)(x, \xi)\alpha = i\xi \wedge \alpha$ . Mit  $\delta = (-1)^{m(k-1)-1} * d*$  und  $\iota_v \alpha = *(v^\flat \wedge * \alpha)$  folgt  $\sigma_1(\delta)(x, \xi)\alpha = -i_{\xi^\sharp} \alpha$  und somit

$$\sigma_2(d\delta + \delta d)(x, \xi)\alpha = \xi \wedge (\iota_{\xi^\sharp} \alpha) + \iota_{\xi^\sharp} (\xi \wedge \alpha).$$

Um zu sehen, dass die rechte Seite gleich  $|\xi|_g^2 \alpha$  ist, betrachten wir beide  $k$ -Formen für  $\alpha$  die eine Basis bilden. Dazu wählen wir lokal einen orthonormalen Rahmen  $e_i$  von  $T^*M$  mit  $e_1 = \frac{\xi}{|\xi|_g}$ . Sei  $\alpha = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ . Dann ist

$$\xi \wedge (\iota_{\xi^\sharp} \alpha) + \iota_{\xi^\sharp} (\xi \wedge \alpha) = |\xi|_g^2 \left( e_1 \wedge \iota_{e_1^\sharp} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) + \iota_{e_1^\sharp} (e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \right)$$

Ist  $1 \in \{i_1, \dots, i_k\}$  ist der zweite Summand gleich Null und der erste  $\alpha$ , sonst ist es genau anders herum. Damit ist  $\sigma_2(\Delta)(x, \xi) = |\xi|_g^2$  und der Hodge-Laplace ist Laplace-artig.

**Beispiel III.4.17.** Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über  $(M, g)$  und Zusammenhang  $\nabla^E$ . Wir definieren den *Zusammenhangs-Laplace* (*Bochner-Laplace*) durch

$$\Delta := -\text{Tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E): \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E).$$

Die Spur geht hier über die beiden Faktoren  $T^*M$  im Bild von  $\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$ . Man beachte, dass die Spur hier als Spur einer Bilinearform metrikabhängig ist.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Wir haben

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= \nabla^{T^*M \otimes E} (dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla^{T^*M} dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + dx^i \otimes \nabla^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + \delta_\ell^i \nabla_{\partial_{x^k}}^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \end{aligned}$$

Mit  $0 = \partial_{x^k}(dx^i(\partial_{x^\ell})) = (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) + dx^i(\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M}(\partial_{x^\ell}))$  folgt  $(\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) = -\Gamma_{kl}^i$  und damit

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= \nabla_{\partial_{x^k}}^E \nabla_{\partial_{x^\ell}}^E s - \Gamma_{kl}^i \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \\ \text{also } (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(X, Y) &= (\nabla_X^E \nabla_Y^E - \nabla_{\nabla_X Y}^E) s \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta s = -g^{ij} (\nabla_{\partial_{x^i}}^E \nabla_{\partial_{x^j}}^E - \Gamma_{ij}^k \nabla_{\partial_{x^k}}^E) s.$$

Insbesondere ist der Bochner-Laplace also auch vom Laplace Typ. Man kann nachrechnen, dass  $\Delta = -(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$  ist.

Als nächstes werden wir sehen, dass jeder Laplace-artige Operator bis auf einen nullten Ordnung Operator die Form eines Zusammenhangs-Laplace hat:

**Satz III.4.18.** *Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über  $(M, g)$ . Sei  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  ein Operator vom Laplace-Typ. Dann gibt es einen eindeutigen Zusammenhang  $\nabla^E$  auf  $E$  und ein eindeutiges  $Q \in \Gamma(\text{End}(E))$  mit  $P = \Delta^E + Q$ , wobei  $\Delta^E$  der Bochner-Laplace zu  $\nabla^E$  ist.*

*Beweis.* Da  $P$  vom Laplace-Typ ist, ist  $P - \Delta^E$  für alle Zusammenhänge  $\nabla^E$  ein Differential erster Ordnung und damit gibt  $[P - \Delta^E, f]$  das Hauptsymbol dieses Operators. Es reicht also ein  $\nabla^E$  zu finden, so dass  $[P - \Delta^E, f] = 0$  für alle  $f \in C^\infty(M)$  ist, denn dann ist  $P - \Delta^E$  nach Beispiel III.3.4 ein Operator 0-ter Ordnung. Allgemein ist

$$\begin{aligned} [\Delta^E, f]s &= (\Delta f)s + 2df(\partial_{x^i}) \nabla_{\partial_{x^i}}^E s =: (\Delta f)s + 2\langle df, \nabla^E s \rangle \\ [P - \Delta^E, f]s &= [P, f]s - (\Delta f)s - 2\langle df, \nabla^E s \rangle. \end{aligned}$$

Wir suchen also  $\nabla^E$ , so dass  $2\langle df, \nabla^E s \rangle = [P, f]s - (\Delta f)s$  gilt. Diese Gleichung definiert einen eindeutigen Zusammenhang  $\nabla^E$  und zeigt damit die Behauptung: Eindeutigkeit folgt direkt durch Subtraktion dieser Gleichheit für zwei Zusammenhänge. Da  $[P - \Delta^E, f]$  das Hauptsymbol von  $P - \Delta^E$  als erster Ordnung Differentialoperator eindeutig bestimmt, reicht es  $f(x) = x^i$  einzusetzen und so  $\nabla_{\partial_{x^i}}^E s$  zu bestimmen. Dass wir damit wirklich einen Zusammenhang definieren, folgt durch Berechnung von  $\langle df, \nabla^E(hs) - h\nabla^E s \rangle$ .  $\square$

**Beispiel III.4.19.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla$  der induzierte Zusammenhang auf  $\Lambda^k M$ . Sei  $\Delta = d\delta + \delta d$  der Hodge-Laplace auf  $\Omega^k(M)$ . Dann ist

$$\Delta = -(\nabla)^\dagger \nabla + Q$$

mit  $Q = -e_i^b \wedge \iota(e_j)R(e_i, e_j)$ , wobei  $e_i$  ein lokaler Orthonormalrahmen auf  $TM$  ist, vgl. Übungsaufgabe 17.\* Mehr solcher Identitäten in Satz III.4.31.

**Spektrum des Laplaceoperators auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.** Es gibt allgemeine abstrakte Sätze mit denen man einen Spektralsatz für den Laplaceoperator zeigen kann, siehe Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren in der Funktionalanalysis [11]. Um zu sehen was passiert und weil es einige oft auftretende Methoden verwendet, beweisen wir hier den Spektralsatz für den Laplaceoperator von Funktionen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu Fuß:

**Satz III.4.20.** *Der Laplaceoperator  $\Delta: C^\infty(M) \subset L^2(M) \rightarrow C^\infty(M) \subset L^2(M)$  auf einer zusammenhängenden geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  besitzt eine unendliche Folge von Eigenwerten  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  mit zugehörigen  $L^2$ -orthonormalen glatten Eigenfunktionen  $\phi_j$ :*

$$\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j. \tag{III.6}$$

Weiterhin ist der einzige Häufungspunkt der Eigenwerte  $+\infty$ . Insbesondere sind die Eigenräume endlich dimensional, und die Eigenfunktionen bilden eine Basis in  $L^2$ †. Ist  $f$  glatt, dann konvergiert seine Zerlegung in Eigenfunktionen uniform in  $C^k$  für alle  $k$ .

*Beweis.*

(i) Wir bemerken zunächst, dass aufgrund der Sätze zur elliptischen Regularität aus  $\phi_j \in L^2$  erfüllt schwach  $(\Delta - \lambda_j)\phi_j = 0$ , folgt dass  $\phi_j$  glatt ist.

(ii) ( $\lambda_j \geq 0$ ) Wir multiplizieren (III.6) mit  $\phi_j$  und integrieren:

$$0 \leq \int_M |d\phi_j|_g^2 d\text{vol}_g = \int_M \phi_j \Delta\phi_j d\text{vol}_g = \lambda_j \int_M |\phi_j|^2 d\text{vol}_g = \lambda_j.$$

(iii) ( $\lambda_0 = 0$ ) Wähle  $\phi_0 = \text{vol}(M, g)^{-1/2}$ .

(iv) (Endlich-dimensionale Eigenräume und keinen endlichen Häufungspunkt) Sei

$$E_m := \{\phi \mid \exists \lambda_j \leq m: (\Delta - \lambda_j)\phi = 0\}.$$

Es reicht zu zeigen, dass  $E_m$  endlich dimensional ist. Wie in (ii) erhalten wir  $\int_M |d\phi|_g^2 d\text{vol}_g \leq m$  für  $\phi \in E_m$  und somit  $\|\phi\|_{H^1}^2 \leq m+1$ . Damit ist  $E_m$  in  $H^1(M)$  beschränkt. Nehmen wir an, dass  $E_m$  unendlich dimensional wäre, dann gibt es

\*Hier ist  $R$  der Krümmungstensor zu  $\nabla$  auf  $\Lambda^k M$ , d.h.  $R(e_i, e_j): \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ .

†Zum Begriff der Basis eines Banachraumes: In LinAlg lernt man als Basisbegriff für (unendlich dimensionale) Vektorräume den Begriff der Hamelbasis, d.h. jedes Element des Vektorraumes muss eindeutig als endliche Linearkombination von Basiselementen darstellbar sein. Das ist nicht der Basisbegriff, den man in der Funktionalanalysis braucht. Dort ist es der Begriff der Schauderbasis, der benötigt wird. Das heißt jeder Vektor hat eine eindeutige Darstellung als unendliche Linearkombination, im Sinne, dass die Reihe in der Norm des Banachraumes zu dem Vektor konvergieren muss.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Schauder\\_basis](https://en.wikipedia.org/wiki/Schauder_basis)

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

eine Orthonormalfolge  $u_i \in E_m$ . Diese in  $H^1$  beschränkte Folge, hat nach dem Soboleveinbettungssatz für  $H^1 \hookrightarrow L^2$  eine in  $L^2$  konvergente Teilfolge  $u_{i_{j_k}}$ . Der Limes sei  $\phi \in L^2$ . Damit muss auch  $\|\phi\|_{L^2}=1$  sein. Da die  $u_i$  aber alle orthonormal sind, gilt  $\|u_i - u_j\|_{L^2}^2=2$ . Keine Teilfolge von  $u_i$  kann also eine  $L^2$ -Cauchyfolge sein, was den Widerspruch gibt.

- (v) (Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal) Der Beweis ist wie bei symmetrischen Matrizen und benutzt die formale Selbstadjungiertheit von  $\Delta$ :

$$\lambda_j \int_M \phi_k \phi_j \, d\text{vol}_g = \int_M \phi_k \Delta \phi_j \, d\text{vol}_g = \int_M (\Delta \phi_k) \phi_j \, d\text{vol}_g = \lambda_k \int_M \phi_k \phi_j \, d\text{vol}_g.$$

- (vi) (Existenz der Eigenfunktionen und Häufungspunkt bei unendlich.) Wir haben schon gesehen, dass  $\phi_0$  existiert. Nehmen wir nun an wir haben die Existenz von  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  gezeigt (die zugehörigen ortho-normalisierten Eigenfunktionen heißen  $\phi_j$ ) und das sind insbesondere alle Eigenwerte (jeweils gezählt mit Multiplizität)  $< \lambda_k$  und ein paar  $= \lambda_k$  (Das müssen noch nicht alle sein – kann sein, dass wir da noch nicht alle gefunden haben).

Sei  $E_k := \text{span}\{\phi_j \mid j \leq k\}$  und  $E_k^{\perp L^2}$  das zu  $E_k$  orthogonale Komplement in  $L^2$ . Wir setzen  $E_k^{\perp} := H^1 \cap (E_k^{\perp L^2})$ . Sei  $v \in E_k^{\perp}$ . Wegen  $\int_M \phi_j \Delta v = \lambda_j \int_M \phi_j v$  ist  $\Delta v \in E_k^{\perp L^2}$ . Sei nun

$$\lambda := \inf_{v \in E_k^{\perp}} \frac{\|dv\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \quad (\text{III.7})$$

Der Quotient rechts heißt *Rayleigh-Ritz-Quotient* und ist im Fall  $v \in H^2$  gleich  $\inf_{v \in E_k^{\perp}} \frac{\int_M v \Delta v \, d\text{vol}_g}{\|v\|_{L^2(g)}^2}$ . Analog zur min-max Charakterisierung von Eigenwerten von Matrizen (Satz von Courant-Fischer) erwarten wir, dass  $\lambda$  der  $(k+1)$ -te Eigenwert ist:

Sei nun  $u_j \in E_k^{\perp}$  eine minimierende Folge für  $\lambda$ , also  $\|u_j\|_{L^2(g)} = 1$  und  $\|du_j\|_{L^2(g)}^2 \rightarrow \lambda$ . Damit ist  $u_j$  in  $H^1$  beschränkt und damit enthält  $u_j$  eine schwach konvergente Teilfolge in  $H^1$  (die wir im Folgenden auch wieder mit  $u_j$  bezeichnen). D.h. es gibt ein  $u \in H^1$  mit  $(z, u_j - u)_{H^1} \rightarrow 0$  für alle  $z \in H^1$ . Auch konvergiert  $u_j$  schwach in  $L^2$  zu  $u$ , und damit gilt  $\|u\|_{L^2} \leq 1$ . Daraus folgt, dass auch  $du_j$  schwach in  $L^2$  zu  $du$  konvergiert und dass  $\|du\|_{L^2} \leq \liminf \|du_j\|_{L^2} = \sqrt{\lambda}$ .

Wir überlegen uns als nächstes, dass  $u \in E_k^{\perp}$ : Da  $u \in L^2$  ist, hat  $u$  insbesondere die Form  $u = \sum_{j \leq k} a_j \phi_j + \bar{u}$  mit  $\bar{u} \in E_k^{\perp}$  und  $a_j \in \mathbb{R}$ . Damit gilt  $(\phi_\ell, u_j - u)_{L^2} = -(\phi_\ell, u)_{L^2} = -a_\ell$  und wegen  $(\phi_\ell, u_j - u)_{L^2} \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  folgt damit  $a_\ell = 0$  und somit  $u \in E_k^{\perp}$ .

Des Weiteren sagt der Soboleveinbettungssatz, dass  $u_j$  in  $L^2$  gegen  $u$  schon in der Norm konvergiert. Damit ist auch  $\|u\|_{L^2} = 1$  und damit sagt die Definition von  $\lambda$ , dass  $\|du\|_{L^2(g)} \geq \sqrt{\lambda}$  ist. Also gilt schon Gleichheit und  $u \in E_k^\perp$  minimiert (III.7). D.h. wie bei den kritischen Punkten aus der endlich dimensionalen Analysis, gilt für alle  $v \in E_k^\perp$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\|d(u + \epsilon v)\|_{L^2}^2}{\|u + \epsilon v\|_{L^2}^2} = \frac{\int_M g(du, dv) d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^2} - \frac{\|du\|_{L^2}^2 \int_M uv d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^4} \\ &= \int_M (g(du, dv) - \lambda uv) d\text{vol}_g. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Da  $u \in E_k^\perp$  ist, gilt die letzte Gleichung auch für alle  $v \in E_k$  und damit insgesamt für alle  $v \in H^1$ . Also auch insbesondere für  $v \in C^\infty(M)$  und damit ist  $u$  eine schwache Lösung von  $\Delta u = \lambda u$ . Somit ist  $u \in C^\infty$  mittels elliptischer Regularität.

Insbesondere ist  $\lambda \geq \lambda_k$  und wir haben gesehen, dass es immer noch einen weiteren Eigenwert gibt. Da die Eigenräume endlich-dimensional sind, bedeutet das auch, dass unendlich ein Häufungspunkt der Eigenwerte ist.

(vii) ( $L^2$ -Vollständigkeit und  $L^2$ -uniforme Konvergenz der Eigenfunktionen)

Sei  $\Pi_N : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf den Raum, der durch die ersten  $N$  Eigenfunktionen von  $\Delta$  aufgespannt wird:

$$\Pi_N \phi := \sum_{j \leq N} (\phi, \phi_j)_{L^2} \phi_j.$$

Wir werden zeigen, dass  $\phi - \Pi_N \phi \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  und  $\phi \in L^2(M)$ . Damit bilden dann die  $\phi_j$  eine Orthonormalbasis in  $L^2$ . Dazu schränken wir uns zuerst auf den Fall  $\phi \in C^\infty(M)$  ein. Es gilt, vgl. (v),

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} &\leq \frac{\int_M (\phi - \Pi_N \phi) \Delta (\phi - \Pi_N \phi) d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \\ &= \frac{\int_M (\phi - \Pi_N \phi) \Delta \phi - (\phi - \Pi_N \phi) \Pi_N \Delta \phi d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \\ &= \frac{\int_M |d\phi|^2 + |d\Pi_N \phi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \leq \frac{2 \int_M |d\phi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\begin{aligned} \|d\phi\|_{L^2}^2 &= \|d\Pi_N \phi\|_{L^2}^2 + \|d(1 - \Pi_N)\phi\|_{L^2}^2 + \underbrace{(d\Pi_N \phi, d(1 - \Pi_N)\phi)_{L^2}}_{=(\Pi_N \Delta \phi, (1 - \Pi_N)\phi)_{L^2} = 0} \\ &\geq \|d\Pi_N \phi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

verwendet haben. Da  $\lambda_{N+1} \rightarrow \infty$ , folgt  $\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$ .

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Sei nun  $\phi \in L^2$ . Wir wissen, dass glatte Funktionen in  $L^2$  dicht sind. D.h. es gibt  $\phi^i \in C^\infty$  mit  $\phi^i \rightarrow \phi$  in  $L^2$  und wir haben

$$\begin{aligned} \|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2} &\leq \|\phi - \phi^i\|_{L^2} + \|\phi^i - \Pi_N \phi^i\|_{L^2} + \|\Pi_N(\phi^i - \phi)\|_{L^2} \\ &\leq 2\|\phi - \phi^i\|_{L^2} + \|\phi^i - \Pi_N \phi^i\|_{L^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(viii) (Ist  $f$  glatt, dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in  $C^k$ .)

Wir zeigen die allgemeinere Aussage: Ist  $f \in H^{2k}$ , dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in  $H^{2k}$ . Daraus folgt mit der Soboleveinbettung dann die Behauptung in  $C^k$ .

Den Fall  $k = 0$  haben wir schon in (vii) abgehandelt.

Wir definieren  $|u|_{H^{2k}} := \|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2}$  für  $u \in C^\infty(M)$ . Es gilt

$$\|u\|_{L^2} \|(\Delta + \text{Id})u\|_{L^2} \geq \int_M u(\Delta + \text{Id})u \, d\text{vol}_g = \int_M |du|^2 \, d\text{vol}_g + \int_M u^2 \, d\text{vol}_g \geq \|u\|_{L^2}^2$$

und damit  $\|(\Delta + \text{Id})^\ell u\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Da  $(\Delta + \text{Id})^\ell$  als Hintereinanderausführung des elliptischen Operators  $\Delta + \text{Id}$  noch immer ein elliptischer Operator ist, folgt:

$$\|u\|_{H^{2k}} \leq c(\|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq c'|u|_{H^{2k}} \leq c''\|u\|_{H^{2k}}.$$

Damit sind  $\|\cdot\|_{H^{2k}}$  und  $|\cdot|_{H^{2k}}$  äquivalente Normen.

Sei nun  $u \in H^{2k}$ , dann ist  $v := (\Delta + \text{Id})^k u \in L^2$ . Dann ist

$$\|u - \Pi_N u\|_{H^{2k}} \leq C \|(\Delta + \text{Id})^k (u - \Pi_N u)\|_{L^2} \stackrel{\Pi_N \Delta \equiv \Delta \Pi_N}{=} C \|v - \Pi_N v\|_{L^2} \stackrel{(vii)}{\rightarrow} 0.$$

(ix) Es fehlt noch, dass  $\lambda_1 > 0$  ist. Da  $\phi_1 \perp \phi_0$  und damit  $\int_M \phi_1 \, d\text{vol}_g = 0$ , folgt das aus der folgenden Poincaré-Ungleichung.  $\square$

**Satz III.4.21** (Poincaré-Ungleichung). [5, Thm. 2.10] Sei  $(M^m, g)$  eine geschlossene zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $q \in [1, m)$ . Dann gibt es ein  $c > 0$  mit

$$\|u - \bar{u}\|_{L^q} \leq c \|du\|_{L^q}$$

für alle  $u \in H^q(M)$ , wobei  $\bar{u} := \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \int_M u \, d\text{vol}_g$  ist.

**Bemerkung III.4.22.** Im Beweis des letzten Satzes haben wir Eigenwerte als kritische Punkte eines Variationsproblems dargestellt - dem Rayleigh-Ritz-Funktional:

$$R: v \in H^1(M) \mapsto \frac{\int_M |dv|_g^2 \, d\text{vol}_g}{\int_M v^2 \, d\text{vol}_g}$$

dargestellt.

Der Vorteil ist, dass man sich kritischen Punkten (insbesondere Infima oder Suprema) durch eine approximative Folge annähern kann und durch funktionalanalytische Methoden ggf. Konvergenz und damit die Existenz eines solchen kritischen Punktes zeigen kann.

In Übungsblatt 7/8 sehen wir ein anderes Beispiel für die Verwendung eines Variationsproblems, wenn wir beweisen, dass auf einer geschlossenen zusammenhängenden zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik Null jede glatte Funktion auf  $M$ , die irgendwo das Vorzeichen wechselt, Gaußkrümmung einer geeigneten Riemannschen Metrik auf  $M$  ist.

**Bemerkung III.4.23.** Wir überlegen als nächstes, was vom Beweis von Satz III.4.20 auch für den Zusammenhangslaplace  $-(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$  eines Vektorbündels mit Bündelmetrik auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten gilt bzw. angepasst werden kann:

(i) ✓ (ii) ✓, weil

$$0 \leq \int_M |\nabla^E \phi_j|^2 d\text{vol}_g = \int_M \langle \phi_j, \Delta^E \phi_j \rangle d\text{vol}_g = \lambda_j \int_M |\phi_j|^2 d\text{vol}_g = \lambda_j.$$

(iii) 0 muss im Allgemeinen kein Eigenwert sein - Bsp. in ÜA 23.ii

(iv) ✓ (v) ✓, da auch  $\Delta^E = -(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$ .

(vi) ✓ ganz analog, wenn man statt  $\|dv\|_{L^2}$  im Rayleigh-Ritz-Quotient  $\|\nabla^E v\|_{L^2}$  benutzt.\*

(vii+viii) ✓

(ix) Es kann sein, dass  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  ist. Beispiel später

Insgesamt hat also auch der Zusammenhangslaplace auf geschlossenen Mannigfaltigkeit ein Basis von  $L^2$  aus  $L^2$ -orthonormalen Eigenschnitten  $\phi_j$  von  $\Delta^E$ , also  $\Delta^E \phi_j = \lambda_j \phi_j$ , für  $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$

### III.4.6. Dirac-artige Operatoren

Eine sehr wichtige Klasse von elliptischen Differentialoperatoren erster Ordnung sind Dirac-artige Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

**Woche 9**

**Definition III.4.24.** Seien  $E \rightarrow M$  und  $F \rightarrow M$  Vektorbündel über einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Ein Differentialoperator  $D \in \text{Diff}^1(E, F)$  ist *Dirac-artig* (vom *Dirac-Typ*), wenn  $D^\dagger D$  und  $DD^\dagger$  Laplace-artige Operatoren sind.

---

\*Bei  $v \in C^\infty(M)$  macht das keinen Unterschied, da  $g(\nabla f, \nabla f) = g(df, df)$ .

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

#### Beispiel III.4.25.

- (i) Für den Diracoperator aus Beispiel III.1.1(vii) gilt  $D = D^\dagger$  und  $D^2$  wirkt komponentenweise als Wellenoperator. Damit ist der Diracoperator auf Minkowski Dirac-artig. Wir werden sehen, dass er nicht elliptisch ist. Aber ganz analog kann man mit der Forderung  $D^2 = \Delta: C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)^*$  einen Diracoperator erhalten, der dann elliptisch ist.
- (ii) Ist  $D \in \text{Diff}^1(E, F)$  vom Dirac-Typ, dann ist auch

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix} \in \text{Diff}^1(E \oplus F)$$

Dirac-artig, und es gilt  $\tilde{D} = \tilde{D}^\dagger$ .

- (iii) *De Rham Operator:*  $d + \delta \in \text{Diff}^1(\Omega^*M := \bigoplus_k \Omega^k(M))$  ist Dirac-artig: Denn  $(d + \delta)^\dagger = \delta + d$  und  $(d + \delta)^2 = d\delta + \delta d = \Delta$  ist der Hodge-Laplace.

**Bemerkung III.4.26.** Sei  $D$  ein symmetrischer (d.h.  $D = D^\dagger$ ) Dirac-artiger Operator auf  $E \rightarrow M$  zur (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Sei  $\sigma_1(D)(x, \xi): E_x \rightarrow E_x$  sein Symbol. Für festes  $x$  setzen wir  $\text{cl}(\xi \in T_x^*M) := i\sigma_1(D)(x, \xi)$ . Aus  $D = D^\dagger$  folgt  $\text{cl}(\xi) = -\text{cl}(\xi)^\dagger$ . Da  $D$  Dirac-artig ist, gilt weiterhin  $\text{cl}(\xi)\text{cl}(\xi) = -|\xi|_g^2 \text{Id}_{E_x}$ . Insbesondere sehen wir hier, dass für  $g$  Riemannsch  $D$  elliptisch ist. Polarisieren ergibt für  $\xi, \eta \in T_x^*M$

$$\text{cl}(\xi)\text{cl}(\eta) + \text{cl}(\eta)\text{cl}(\xi) = -2g(\xi, \eta)\text{Id}_{E_x}.$$

Diese lineare Abbildung  $\text{cl}: T_x^*M \rightarrow \text{End}(E_x)$  nennen wir *Cliffordmultiplikation* und definieren  $\text{cl}(v \in T_xM) := \text{cl}(v^\flat \in T_x^*M)$ .

**Definition III.4.27.** Ein Vektorbündel  $E$  über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  zusammen mit einer Cliffordmultiplikation

$$\text{cl}: \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(\text{End}(E))$$

zur quadratischen Form  $q = g$  heißt *Cliffordmodul*.

Ein Zusammenhang  $\nabla^E$  heißt *kompatibel mit der Cliffordmultiplikation* bzw. *Cliffordzusammenhang*, falls für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X).$$

Das ist kurz für  $\nabla_Y^E(\text{cl}(X)s) - \text{cl}(X)(\nabla_Y^E s) = \text{cl}(\nabla_Y X)s$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , wobei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Eine Bündelmetrik  $h_E$  ist *kompatibel* mit der Cliffordmultiplikation, falls

$$h_E(\text{cl}(\theta)s_1, s_2) = -h_E(s_1, \text{cl}(\theta)s_2)$$

für alle  $s_i \in \Gamma(E)$  und  $\theta \in \Omega^1(M)$  gilt.

Ein *Diracbündel* ist ein Cliffordmodul  $E \rightarrow M$  mit Bündelmetrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ , die mit der Cliffordmultiplikation kompatibel ist, und metrischem Cliffordzusammenhang  $\nabla^E$ .

\* $\Delta$  wirkt hier komponentenweise als Laplace auf Funktionen.

**Bemerkung III.4.28.** Jedes Diracbündel besitzt einen Operator vom Dirac-typ  $D \in \text{Diff}^1(E)$ :

$$D: \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\text{cl}} \Gamma(E).$$

In lokalen Koordinaten  $x \in U$  ist

$$D = \text{cl}(dx^i) \nabla_{\partial_{x^i}} = g^{ij} \text{cl}(\partial_{x^j}) \nabla_{\partial_{x^i}}.$$

Bzw. bzgl eines lokalen orthonormalen Rahmens gilt  $D = \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i}$ .

Wir berechnen  $D^\dagger$  – es reicht, das lokal mittels geodätischer Normalkoordinaten um  $x \in U$  zu tun. Sei  $e_i := \partial_{x^i}$ ,  $s_i \in \Gamma_c(E|_U)$ . Dann ist  $\nabla_{e_i} e_j|_x = 0$ . Dann gilt in  $x$ :

$$\begin{aligned} \langle Ds_1, s_2 \rangle &= \langle \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i} s_1, s_2 \rangle \stackrel{\text{cl und } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ kompatibel}}{=} -\langle \nabla_{e_i} s_1, \text{cl}(e_i) s_2 \rangle \\ &\stackrel{\text{metr.}}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i) s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_{e_i} (\text{cl}(e_i) s_2) \rangle \\ &\stackrel{[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X)}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i) s_2 \rangle + \langle s_1, \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i} s_2 \rangle = -\text{div} V + \langle s_1, Ds_2 \rangle \end{aligned}$$

mit  $V = V^i e_i$  und  $V^i = \langle s_1, \text{cl}(e_i) s_2 \rangle$ . Man rechnet nach das  $V \in \mathcal{X}(U)$  unabhängig von der Wahl der  $e_i$  ist (Also erhält man insbesondere, wenn man das in allen  $x \in M$  macht ein  $V \in \mathcal{X}(M)$ ). Damit ist für  $s_i \in \Gamma_c(E)$

$$\int_M \langle Ds_1, s_2 \rangle \text{dvol}_g = \int_M \langle s_1, Ds_2 \rangle \text{dvol}_g, \text{ also } D = D^\dagger.$$

Weiterhin ist  $\sigma_1(D)(x, \xi) = i[D, f] = \text{icl}(\xi)$ . Also ist  $\sigma_2(D^2)(x, \xi) = |\xi|_g^2$ .

**Beispiel III.4.29.** Für den de-Rham Operator aus Beispiel III.4.25 ist die Cliffordmultiplikation mit einer 1-Form  $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$  durch  $\text{cl}(\omega) = \omega \wedge \cdot - \iota_{\omega^\#}$  gegeben. Wir haben somit, s. auch Beispiel III.3.5 und III.4.16,  $\text{cl} \circ \nabla = d + \delta$ .

In Satz III.4.18 haben wir gesehen, dass sich jeder Laplace-artige Operator  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  als  $\Delta^E + Q$  für einen geeigneten Zusammenhang  $\nabla^E$  plus einen nullte Ordnungoperator  $Q$  schreiben lässt. Im Falle des Hodge-Laplace haben wir in Beispiel III.4.19 gesehen, dass  $Q$  aus dem Krümmungstensor bestimmt wird.

Wir wollen im Folgenden ähnliches für Diracoperatoren eines Diracbündels finden.

**Bemerkung III.4.30.** Ein  $K \in \Omega^2(M, \text{End}(E))$  definiert eine Abbildung  $K: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  durch

$$(Ks)(p) := \sum_{i,j} \text{cl}(e_i) \text{cl}(e_j) K(e_i, e_j) s$$

für eine lokale Orthonormalbasis  $e_i$  von  $T_p M$ . Man überprüft, dass die Definition unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis ist. Dann gilt

**Lemma III.4.31.** (Weitzenböck-Formel) Sei  $E \rightarrow M$  ein Diracbündel. Der Zusammenhang sei  $\nabla^E$ . Dann gilt  $D^2 = \Delta^E + R^E$ , wobei  $R^E$  die Krümmung von  $\nabla^E$  ist.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

*Beweis.* Sei  $e_i$  ein Orthonormalrahmen in einer Umgebung von  $p$  mit  $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$ . Wir haben in  $p$ :

$$\begin{aligned} D^2 s &= \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i}^E (\text{cl}(e_j) \nabla_{e_j}^E s) = \text{cl}(e_i) \text{cl}(e_j) \nabla_{e_i}^E \nabla_{e_j}^E s \\ &= -\nabla_{e_i}^E \nabla_{e_i}^E s + \sum_{i < j} \text{cl}(e_i) \text{cl}(e_j) (\nabla_{e_i}^E \nabla_{e_j}^E - \nabla_{e_j}^E \nabla_{e_i}^E) s \\ &\stackrel{\text{Bsp. III.4.17}}{=} \Delta^E s + \sum_{i < j} \text{cl}(e_i) \text{cl}(e_j) R^E(e_i, e_j) s = (\Delta^E + R^E) s. \quad \square \end{aligned}$$

#### III.4.7. Etwas Funktionalkalkül

Sei  $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $\ell$  auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit für den es eine Basis aus orthonormalen Eigenfunktionen mit endlich-dimensionalen Eigenräumen gibt (z.B.  $P$  ist ein Zusammenhangs-Laplace).

Sei  $\sigma(P) \subset \mathbb{R}$  die Menge der Eigenwerte von  $P$ . Ein  $s \in L^2(E)$  hat dann eine Zerlegung  $s = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} s_\lambda$  mit  $s_\lambda$  der Anteil von  $s$  im Eigenraum zu  $\lambda$ . Da die Zerlegung orthogonal ist, ist insbesondere  $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} \leq \|s\|_{L^2(g)}$ .

**Satz III.4.32.** *Ein Schnitt  $s \in L^2(E)$  ist genau dann glatt, wenn  $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} = O(|\lambda|^{-k})$  für alle  $k$  gilt (Man sagt, die Zerlegung ist schnell abfallend (rapidly decreasing)).*

*Beweis.* Sei  $s$  glatt, dann ist auch  $P^r s$  glatt für alle  $r \in \mathbb{N}$ , also insbesondere  $P^r s \in L^2$ . Aus  $\|P^r s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} \lambda^r \|s_\lambda\|_{L^2}^2$  folgt direkt, dass die Zerlegung schnell abfallend ist.

Sei die Zerlegung nun schnell abfallend. Da  $s_\lambda$  eine Eigenfunktion von  $P$  ist, folgt mittels elliptischer Abschätzung:  $\|s_\lambda\|_{H^{k+\ell}} \leq C_k (\|P s_\lambda\|_{H^k} + \|s_\lambda\|_{L^2}) \leq C_k (1 + |\lambda|) \|s_\lambda\|_{H^k}$ . Mehrfaches Anwenden liefert  $\|s_\lambda\|_{H^{k\ell}} \leq \tilde{C}_k (1 + |\lambda|)^k \|s_\lambda\|_{L^2}$ . Damit ist

$$\|s\|_{H^{k\ell}} \leq \sum_{\lambda} \|s_\lambda\|_{H^{k\ell}} \leq \tilde{C}_k \sum_{\lambda} (1 + |\lambda|)^k \|s_\lambda\|_{L^2}.$$

Die Abfallbedingung zeigt somit, dass  $s \in H^r$  für alle  $r$  ist. Mittels der Soboleveinbettung ist dann  $s$  glatt.  $\square$

Sei nun  $f$  eine beschränkte Funktion auf  $\sigma(P)$ . Wir definieren  $f(P)$  durch

$$f(P)s := \sum_{\lambda \in \sigma(P)} f(\lambda) s_\lambda,$$

wobei  $s = \sum_{\lambda} s_\lambda$  die Zerlegung von  $s$  in Eigenfunktionen ist. Achtung:  $f(P)$  ist i.A. kein Differentialoperator mehr, nicht mal ein lokaler Operator\*.

**Satz III.4.33.** *Die Abbildung  $f \mapsto f(P)$  ist ein unitärer Ringhomomorphismus vom Ring der beschränkten Funktionen auf  $\sigma(P)$  in die beschränkten Operatoren auf  $L^2(E)$ . Es gilt  $\|f(P)\| := \sup_{v \in \Gamma(E), \|v\|_{L^2} = 1} \|f(P)v\|_{L^2} \leq \sup |f|$ . Weiterhin bildet  $f(P)$  glatte Schnitte von  $E$  auf glatte Schnitte ab.*

\*Ein Operator  $D$  ist lokal, wenn  $Ds(x)$  nur von  $s$  auf einer Umgebung von  $x$  abhängt.

### III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

*Beweis.* Sei  $s \in L^2(E)$ , also  $\|s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} \|s_{\lambda}\|_{L^2}^2 < \infty$ . Dann ist

$$\|f(P)s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} |f(\lambda)|^2 \|s_{\lambda}\|_{L^2}^2 \leq \sup |f| \|s\|_{L^2}^2.$$

Damit ist  $f(P)$  ein beschränkter Operator auf  $L^2(E)$  mit  $\|f(P)\| \leq \sup |f|$ . Dass  $f(P)$  glatte Schnitte auf glatte Schnitte abbildet, folgt aus Satz III.4.32 und  $f$  beschränkt.  $\square$

**Bemerkung III.4.34.** Ist  $f$  selbst schnell abfallend, d.h.  $|f(\lambda)| = O(|\lambda|^{-k})$  für alle  $k$ , dann ist  $f(P)(L^2(E)) \subset \Gamma(E)$ . Insbesondere hat  $f(P)$  einen glatten Kern\*, d.h. es gibt ein  $k \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$  mit

$$f(P)s(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy.$$

Das Integral wird immer noch mit dem Volumenelement  $d\text{vol}_g$  ausgeführt, aber wir schreiben  $dy$  um zu zeigen, dass über  $y$  integriert wird. Weiterhin ist  $E \boxtimes E^* := \pi_1^* E \otimes \pi_2^* E^*$  mit  $\pi_i: M \times M \rightarrow M$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente ein Vektorbündel über  $M \times M$ . Operatoren mit glattem Kern werden *Glättungsoperatoren* genannt.

## III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Wärmeleitungsgleichung als Beispiel einer parabolischen Differentialgleichung betrachten:

Im ganzen Abschnitt gelte: Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  und sei  $P$  ein Laplace-artiger Operator auf  $E$  mit  $\sigma(P) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  und einer Basis von  $L^2$ -orthonormalen Eigenschnitten (z.B. der Hodge-Laplace).

**Satz III.5.1.** *Die Wärmeleitungsgleichung  $\frac{\partial}{\partial t} s + Ps = 0$  mit Anfangswert  $s(\cdot, 0) = s_0 \in \Gamma(E)$  hat eine eindeutige Lösung, die glatt in  $M$  und differenzierbar in  $t$  ist. Sei  $s_t := s(\cdot, t)$  für alle  $t \geq 0$ . Dann gilt weiterhin  $\|s_t\|_{L^2(g)} \leq \|s_0\|_{L^2(g)}$ .*

\*Die Existenz eines Kernes an sich, kommt häufig vor: [https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz\\_kernel\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_kernel_theorem). Ob der bzw. oft der differenzierbar ist, ist eine andere Frage. Aber Glättungsoperatoren haben einen glatten Kern:

Sei  $\mathcal{D}'(E)$  der Raum der Distributionen auf  $E$ , also allen linearen Funktionalen  $T: \Gamma_c(E) \rightarrow \mathbb{K}$  für die für alle Kompakta  $K \subset M$  es ein  $C > 0$  und ein  $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  mit  $|Ts| \leq C\|s\|_{C^k}$  gibt. Auf  $\mathcal{D}'(E)$  wählen wir die schwache Topologie, d.h.  $T_i \rightarrow T$ , falls  $T_i(s) \rightarrow T(s)$  für alle  $s \in \Gamma_c(E)$  gilt.

**Satz III.4.35.** *Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit. Sei  $A: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  ein stetiger Operator. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $A$  erweitert sich zu einem stetigen Operator  $A: \mathcal{D}'(E) \rightarrow \Gamma(E)$ .
- (ii)  $A$  erweitert sich zu einem stetigen Operator  $A: H^s(E) \rightarrow H^t(E)$  für alle  $s, t \in \mathbb{Z}$  (Hierbei ist  $H^{-s}(E)$  für  $s > 0$  dual zu  $H^s(E)$ .)
- (iii)  $A$  hat einen glatten Kern  $K_A \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$ .

Der Satz gilt im Prinzip auch auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten, man muss nur auf den Support der Funktionen aufpassen.

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

*Beweis.* Angenommen es gibt eine glatte Lösung  $s_t$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|s_t\|_{L^2}^2 &= \int_M \left\langle \frac{\partial}{\partial t} s_t, s_t \right\rangle d\text{vol}_g + \int_M \left\langle s_t, \frac{\partial}{\partial t} s_t \right\rangle d\text{vol}_g \\ &= - \int_M \langle P s_t, s_t \rangle d\text{vol}_g - \int_M \langle s_t, P s_t \rangle d\text{vol}_g \stackrel{\sigma(P) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}}{\leq} 0, \end{aligned}$$

und damit  $\|s_t\|_{L^2} \leq \|s_0\|_{L^2}$ . Weiterhin ergibt sich damit die Eindeutigkeit.

Um die Existenz zu zeigen, setzen wir  $s_t = e^{-tP} s_0$ , wobei  $e^{-tP}$  mittels des Funktionalkalküls aus Abschnitt III.4.7 definiert ist. Dann ist  $s(x, t) = s_t(x)$  glatt, und es gilt  $\frac{\partial}{\partial t} s_t = -P s_t$ , denn für die Eigenzerlegung  $s_0 = \sum_{\lambda} s_{\lambda}$  haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} s_t = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-tP} s_0) = \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t\lambda} s_{\lambda}) = \sum_{\lambda} -\lambda e^{-t\lambda} s_{\lambda} = -P e^{-tP} s_0 = -P s_t. \quad \square$$

Vom Funktionalkalkül wissen wir sogar, dass  $e^{-tP}$  für alle  $t > 0$  ein Glättungsoperator ist, also einen zeitabhängigen Schnitt  $k_t \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$  für  $t > 0$  besitzt, den *Wärmeleitungskern*, so dass für alle  $u \in \Gamma(E)$  und  $t > 0$  gilt:

$$e^{-tP} u(x) = \int_M k_t(x, y) u(y) dy.$$

**Beispiel III.5.2.** (Wärmeleitungskern für den Laplaceoperator auf Funktionen des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$ )  $\mathbb{R}^n$  ist nichtkompakt und  $\Delta$  besitzt dort keine  $L^2$ -Eigenwerte. Trotzdem kann man  $e^{-t\Delta}$  definieren. Das ist wieder ein Glättungsoperator mit glattem Kern

$$k_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}.$$

**Satz III.5.3.** *Der Wärmeleitungskern hat die folgenden Eigenschaften:*

(i)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) k_t(x, y) = 0,$$

wobei der Index  $x$  an  $P$  bedeutet, dass  $P$  nur auf die  $x$ -Variable wirkt. D.h für jedes  $y$  erfüllt  $k_t(\cdot, y) \in \Gamma(E \otimes E_y^* \rightarrow M)$  die Wärmegleichung.

(ii) Für  $u \in \Gamma(E)$  konvergiert  $\int_M k_t(x, y) u(y) dy \rightarrow u(x)$  für  $t \rightarrow 0$  uniform in  $x$ .

Insbesondere ist der Wärmeleitungskern der eindeutige zeitabhängige Schnitt in  $E \boxtimes E^*$ , der  $C^2$  in  $(x, y)$  und  $C^1$  in  $t$  ist sowie die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

---

\*Man kann andersherum auch dieses  $k_t$  nutzen, um  $e^{-t\Delta}$  zu definieren und dann sehen, dass dieser Operator die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

### III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

*Beweis.* Dass (i) und (ii) gilt, folgt direkt aus den Eigenschaften von  $e^{-tP}$  von oben.

Habe nun  $k_t$  die Eigenschaften (i) und (ii), dann betrachten wir die zugehörigen Operatoren  $u_t(x) := (K_t u)(x) := \int_M k_t(x, y) u(y) dy$  für  $t > 0$ . Es ist  $K_t: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$  ein beschränkter Operator, da  $k_t$  stetig ist, ÜA 21(ii). Wegen (i) gilt  $(\partial_t + P)u = 0$  für  $t > 0$  und  $u(x, t) := u_t(x)$ . Wegen Eindeutigkeit, vgl. Satz III.5.1, muss  $K_t u = e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} u$  für alle  $t > t_0 > 0$  gelten. Für  $t_0 \rightarrow 0$  folgt aus (ii)  $K_{t_0} u \rightarrow u$  uniform in  $x$ . Weiterhin gilt

$$\|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})u\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} |e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}|^2 \|u_{\lambda}\|_{L^2}^2 \leq C_{t,t_0}^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

wobei  $C_{t,t_0}$  das Maximum von  $\lambda \mapsto e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}$  ist. Dieses wird bei  $\lambda = -t_0^{-1} \ln(1 - t_0/t)$  angenommen, ist durch  $C_{t,t_0} = (1 - t_0/t)^{t/t_0} ((1 - t_0/t)^{-1} - 1)$  gegeben und geht gegen Null für  $t_0 \rightarrow 0$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \|K_t s - e^{-tP} s\|_{L^2} &= \|e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} s - e^{-tP} s\|_{L^2} \\ &\leq \|e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} s - e^{-(t-t_0)P} s\|_{L^2} + \|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})s\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{ÜA 21(i)}}{\leq} \|K_{t_0} s - s\|_{L^2} + \|(e^{t_0 P} - 1)s\|_{L^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit  $t_0 \rightarrow 0$ . Also ist  $K_t s = e^{-tP} s$  für alle  $s$ . □

#### III.5.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns

Bedingung (ii) aus dem letzten Satz sagt, dass für  $t$  gegen Null, der Wärmeleitungskern zu einer  $\delta$ -Distribution\* wird. Ziel dieses Abschnitts ist es eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns für  $t \rightarrow 0$  zu finden. Was ist das?

**Definition III.5.4.** Sei  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$  eine Funktion mit Werten im Banachraum  $B$  (bei uns wird  $f(t) = k_t$  und damit  $B = C^r(E \boxtimes E^*)$  sein). Eine formale Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$  heißt *asymptotische Entwicklung* von  $f$  nahe  $t = 0$ , falls für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  es ein  $\ell_n$  gibt, so dass für alle  $\ell \geq \ell_n$

$$\|f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k(t)\|_B \leq C_{\ell,n} |t|^n$$

für geeignete Konstanten  $C_{\ell,n}$  und genügend kleine  $t$  gilt.

**Bemerkung III.5.5.** Jede Taylorreihe ist eine asymptotische Entwicklung. Asymptotische Entwicklungen müssen also nicht konvergieren und wenn sie konvergieren, müssen sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.

Um eine Asymptotik des Wärmeleitungskerns zu erhalten, betrachtet man nicht den echten Wärmeleitungskern sondern einen *approximativen Wärmeleitungskern*:

---

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac\\_delta\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function)

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

**Definition III.5.6.** Sei  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ . Ein *approximativer Wärmeleitungskern* der Ordnung  $m$  ist ein zeitabhängiger Schnitt  $\tilde{k}_t(x, y)$  in  $E \boxtimes E^*$ , der  $C^1$  in  $t$  und  $C^2$  in  $(x, y)$  ist, Bedingung (ii) aus Satz III.5.3 erfüllt und für den es einen  $C^m$ -Schnitt  $r_t(x, y)$  in  $E \boxtimes E^*$  gibt, der

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) \tilde{k}_t(x, y) = t^m r_t(x, y),$$

für alle  $t > 0$  erfüllt und der für  $t \geq 0$  stetig in  $t$  ist.

Die Asymptotik von solchen approximativen Wärmeleitungskernen wird leichter zugänglich sein, weil sie lokal berechenbar ist, und wir werden sehen, dass approximative Wärmeleitungskerne im folgendem Sinne die gleiche Asymptotik wie der echte Wärmeleitungskern besitzen:

**Satz III.5.7.** Sei  $k_t$  der echte Wärmeleitungskern. Dann gibt es für jedes  $m$  ein  $m' \geq m$ , so dass für jeden approximativen Wärmeleitungskern  $\tilde{k}_t$  der Ordnung  $m'$

$$k_t(x, y) - \tilde{k}_t(x, y) = t^m \tilde{r}_t(x, y)$$

für alle  $t > 0$  und für einen geeigneten zeitstetigen ( $t \geq 0$ )  $C^m$ -Schnitt  $\tilde{r}_t$  von  $E \boxtimes E^*$  gilt.

Direkt von der Definition einer asymptotischen Entwicklung folgt:

**Folgerung III.5.8.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  eine formale Reihe in  $C^r(E \boxtimes E^*)$ , für die  $\tilde{k}_t$  mit  $\tilde{k}_t := \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$  ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung  $m$  ist. Dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns.

Um Satz III.5.7 zu zeigen, benötigen wir:

**Lemma III.5.9** (Duhamelsche Prinzip). Sei  $s_t$  eine in  $t$  stetige Familie von  $C^2$ -Schnitten von  $E$ . Dann ist  $\tilde{s}_t = \int_0^t e^{-(t-u)P} s_u du$  die eindeutige Familie von glatten Schnitten von  $E$ , die in  $t$  differenzierbar ist, für die  $\tilde{s}_0 = 0$  gilt und die die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + P \right) \tilde{s}_t = s_t$$

für alle  $t > 0$  erfüllt. Insbesondere gilt  $\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t C_k \sup\{\|s_u\|_{H^{2k}} \mid 0 \leq u \leq t\}$  für alle  $k \geq 0$ .

*Beweis.* Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung, vgl. Satz III.5.1. Dass  $\tilde{s}_t$  glatt ist, folgt, da  $e^{-(t-u)P}$  ein Glättungsoperator ist. Der Rest folgt mit

$$\frac{\partial \tilde{s}_t}{\partial t} = s_t + \int_0^t -P e^{-(t-u)P} s_u du = s_t - P \tilde{s}_t.$$

Um die Sobolevnorm abzuschätzen, überlegen wir uns zunächst, dass  $e^{-tP}$  ist auch als Operator von  $H^{2k} \rightarrow H^{2k}$  für alle  $k \leq 0$  beschränkt ist:

$$\|e^{-tP} s\|_{H^{2k}} \leq C(\|P^k(e^{-tP} s)\|_{L^2} + \|e^{-tP} s\|_{L^2}) \leq C(\|P^k s\|_{L^2} + \|s\|_{L^2}) \leq \|s\|_{H^{2k}},$$

### III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

wobei die erste Ungleichung eine elliptische Abschätzung ist, die zweite Gleichung verwendet, dass  $P$  und  $e^{-tP}$  kommutieren und letzter beschränkt ist und die letzte Ungleichung folgt, da  $P^k$  ein Differentialoperator der Ordnung  $2k$  ist. Wir haben also

$$\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t \sup_{0 \leq u \leq t} \|e^{-(t-u)P} s_u\|_{H^{2k}} \leq tC_k \sup_{0 \leq u \leq t} \|s_u\|_{H^{2k}}. \quad \square$$

*Beweis von Satz III.5.7.* Sei  $m > 0$  und sei  $\tilde{k}_t$  ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung  $m' \geq m$ . Nach Definition gilt

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) \tilde{k}_t(x, y) = t^{m'} r_t(x, y)$$

für einen  $C^{m'}$ -Schnitt  $r_t$  in  $E \boxtimes E^*$ . Nach dem Duhamelschen Prinzip gibt es eine eindeutige Lösung  $\hat{s}_t(x, y)$  ( $y$  hier als Parameter behandelt) von

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) \hat{s}_t(x, y) = -t^{m'} r_t(x, y)$$

mit  $\hat{s}_0 = 0$  und

$$\|\hat{s}_t\|_{H^{m'}} \leq C_{m'} t^{m'+1} \sup\{\|r_u\|_{H^{m'}} \mid 0 \leq u \leq t\} \leq \hat{C}_{m'} t^{m'+1}.$$

Ist nun  $m' > m + \dim M$ , so folgt aus der Soboleveinbettung, dass  $t^{-m'-1} \hat{s}_t$  in  $C^m$  ist. Wegen Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung folgt  $\tilde{k}_t(x, y) + \hat{s}_t(x, y) = k_t(x, y)$  und damit die Behauptung.  $\square$

Als nächstes bauen wir uns einen approximativen Wärmeleitungskern. Während der Wärmeleitungskern ein globales Objekt ist, werden lokale Daten der Mannigfaltigkeit reichen, um einen approximativen Wärmeleitungskern zu konstruieren.

Sei  $(M^m, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion  $d$ . Wir setzen (in Anlehnung an den Wärmeleitungskern vom Laplace im Euklidischen)

$$h_t(x, y) = (4\pi t)^{-m/2} \exp(-d(x, y)^2/4t).$$

und betrachten geodätische Normalkoordinaten  $x^i$  um  $y$  mit  $r^2 = g_{ij}x^i x^j$ . Direktes (längeres) Nachrechnen, [12, Lemma 7.12] ergibt:

**Lemma III.5.10.** Sei  $h(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp(-r^2/4t)$  mit  $r = d(x, y)$ . Dann gilt

(i)  $\text{grad } h = -\frac{h}{2t} r \partial_r$

(ii)  $\frac{\partial h}{\partial t} + \Delta h = \frac{r h}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r}$  wobei  $g = \det g_{ij}$  ist.

**Satz III.5.11.** Sei  $M$  eine geschlossene Mannigfaltigkeit und  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Sei  $P$  ein Laplace-artiger Operator auf  $E$  und  $k_t$  der zugehörige Wärmeleitungskern.

(i) Die asymptotische Entwicklung von  $k_t$  ist von der Form  $h_t(x, y) \sum_j t^j \Theta_j(x, y)$  für glatte Schnitte  $\Theta_j$  von  $E \boxtimes E^*$ .

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(ii) Diese Entwicklung gilt im Banachraum  $C^r(E \boxtimes E^*)$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  und kann formal differenziert werden um die asymptotische Entwicklung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen des Wärmeleitungskerns zu erhalten.

(iii) Für  $P = \Delta^E + Q$  mit  $Q = R^E$  oder  $Q = 0$  sind die  $\Theta_j(x, x)$  algebraische Ausdrücke in der Metrik und den Zusammenhangskoeffizienten von  $\nabla^E$  und deren Ableitungen.

**Woche 10** *Beweisskizze für (i).* Weiß man, dass  $\tilde{k}_t^n(x, y) := h_t(x, y) \sum_{j=0}^{n-1} t^j \Theta_j(x, y)$  ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung  $n$  ist, dann folgt aus Folgerung III.5.8, dass es sich hier um eine asymptotische Entwicklung von  $k_t$  handelt. Die Frage ist also, ob man glatte Schnitte  $\Theta_j$  so finden kann, dass  $\tilde{k}_t(x, y)^k$  ein solcher approximativer Wärmeleitungskern für alle  $k$  groß genug ist.

Um für  $t \rightarrow 0$  die Delta-Distribution zu erhalten, also Bedingung (ii) aus Satz III.5.3 zu erfüllen, reicht es wenn  $\Theta_j(x, y)$  nahe der Diagonalen glatt sind und  $\Theta_0(x, x) = 1$  ist. Um approximativ die Wärmeleitungsgleichung zu lösen, schauen wir uns das Problem zunächst nur in der Umgebung eines festen  $y \in M$  an:  $s(x) := \Theta_t(x, y)$  in geodätischen Normalkoordinaten um  $y$  und  $h(x) = h_t(x, y)$  wie im letzten Lemma. Einen Schnitt in  $E$  betrachten wir dann als Schnitt in  $E \otimes E_y^*$ . Dann ist

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = h^{-1} (\partial_t h) s + \partial_t s + P s + h^{-1} [P, h] s = h^{-1} (\partial_t h) s + \partial_t s + P s + h^{-1} [\Delta^E, h] s.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass  $P = \Delta^E + Q$  für einen geeigneten Zusammenhangs-Laplace und einen nullten Ordnung-Operator  $Q$  ist (und damit  $Q$  mit Multiplikation mit  $h$  kommutiert). Weiterhin ist mit letztem Lemma  $[\Delta^E, h] s = (\Delta h) s - 2 \nabla_{\nabla h}^E s = -\frac{\partial h}{\partial t} s + \frac{r h}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{h}{t} \nabla_{r \partial_r}^E s$  und damit

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = \partial_t s + P s + \frac{r}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r} s + \frac{1}{t} \nabla_{r \partial_r}^E s. \quad (\text{III.9})$$

Wir setzen eine asymptotische Entwicklung  $s \sim u_0 + t u_1 + t^2 u_2 + \dots$  an und wollen  $(\partial_t + P)(hs) = 0$  lösen – dann wäre bei Abbruch der Entwicklung bei  $t^{n-1}$  dies eine Lösung zur Inhomogenität  $\sim t^n$ . Setzen wir die Entwicklung ein und vergleichen Potenzen in  $t$ , erhalten wir

$$\nabla_{r \partial_r}^E u_j + \left( j + \frac{r}{4g} \frac{\partial g}{\partial r} \right) u_j = -P u_{j-1} \quad (\text{bzw. äquivalent } \nabla_{r \partial_r}^E (r^j g^{\frac{1}{4}} u_j) = -r^{j-1} g^{\frac{1}{4}} P u_{j-1})$$

mit  $u_{-1} = 0$ . Wenn man  $u_{j-1}$  kennt, ist das nur noch eine gewöhnliche DGL für  $u_j$ . Man kann das induktiv lösen, und die Lösung ist bis auf ein Vielfaches von  $r^{-j} g^{-\frac{1}{4}}$  eindeutig lösbar. Da die Lösung glatt, also auch insbesondere glatt in  $r = 0$ , sein soll, muss dieses Vielfaches für verschwinden und  $u_0(r = 0) = 1$  sein. Damit sind die  $u_j$  eindeutig.

Sei  $\epsilon$  der Injektivitätsradius von  $M$  und sei  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine glatte Funktion mit  $\psi(r \leq \epsilon/2) = 1$  und  $\psi(r \geq \epsilon) = 0$ . Wir definieren  $\theta_j(x, y)$  als die  $E \boxtimes E^*$ -wertige Funktion für

### III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

alle  $d(x, y) < \epsilon$ , die in geodätischen Normalkoordinaten nahe  $y$  durch  $u_j(x)$  gegeben ist, und setzen  $\Theta_j(x, y) = \psi(d(x, y)^2)\theta_j(x, y)$ . Wegen glatter Abhängigkeit der Lösungen der Differentialgleichungen an den Anfangswerten, ist  $\Theta_j \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$ . Dann ist  $\Theta_0(y, y) = \text{Id}$  und  $\tilde{k}_t^{k+1}(x, y) = h_t(x, y) \sum_{j=0}^k t^j \Theta_j(x, y)$  konvergiert zu einer  $\delta$ -Distribution für  $t \rightarrow 0$ . Für  $d(x, y) > \epsilon/2$  ist  $\tilde{k}_t^n(x, y)$  glatt und es kann  $|(\partial_t + P_x)\tilde{k}_t(x, y)|$  durch  $\sum_i t^i C_i$  abgeschätzt werden. Damit ist  $\tilde{k}_t^n(x, y)$  ein approximativer Wärmeleitungskern.  $\square$

**Beispiel III.5.12.** Wir haben gesehen, dass  $u_0(r=0) = 1$  und damit  $u_0 = g^{-\frac{1}{4}}$ . Man kann die Rekursionsformeln nutzen, um alle  $\Theta_j(y, y) = u_j(r=0)$  zu berechnen. Es wird nur aufwändiger je höher  $j$  wird. Wir berechnen hier noch  $\Theta_1(y, y)$  - mit (III.9) folgt:

$$u_1(r=0) = -(Pu_0)(0) = ((\Delta^E + Q)u_0)(0) = (\Delta^E u_0)(0) + Qu_0.$$

Für  $P = D^2$ ,  $D$  der Diracoperator zu einem Diracbündel  $E \rightarrow M$ , ist nach der Weitzenböck-Formel, vgl. Lemma III.4.31,  $Q = R^E$ . Aus der Darstellung der Metrik in geodätischen Normalkoordinaten [2, Satz II.7.7] kann man  $(\Delta^E u_0)(0) = (\sum_i \partial_i^2 g^{-1/4})(0)$  und damit  $u_1(0) = \frac{1}{6}\text{scal} + R^E$  berechnen.

#### III.5.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz

Mit Hilfe der asymptotischen Expansion des Wärmeleitungskerns kann man Aussagen zum Wachstum der Eigenwerte des Laplaceoperators und damit zu geometrischen Größen der unterliegenden Mannigfaltigkeit machen. Wir werden hier die folgenden zwei Beispiele betrachten:

**Satz III.5.13.** \* *Das Spektrum des Laplaceoperators  $\Delta$  auf Funktionen einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit bestimmt deren Dimensionen, Volumen und totale Skalarkrümmung  $\int_M \text{scal}_g d\text{vol}_g$ . In Dimension zwei bestimmt es damit außerdem die Topologie von  $M$ .*

**Satz III.5.14** (Weylsches Gesetz). *Sei  $(M^m, g)$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten den Laplace auf Funktionen. Sei  $N(\lambda)$  die Anzahl der Eigenwerte  $\leq \lambda$  (mit Vielfachheiten gezählt). Dann gilt*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(4\pi)^{m/2} \Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) \lambda^{m/2}$$

für  $\lambda \rightarrow \infty$ .<sup>†</sup> (bzw. äquivalent zur obigen Aussage: Sind  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$  die durchnummerierten Eigenwerte mit Vielfachheiten, dann gilt

$$\lambda_j \sim 4\pi \left( \frac{1}{\Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) j \right)^{2/m} .)$$

\*Can you hear the shape of a drum? [https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing\\_the\\_shape\\_of\\_a\\_drum](https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_the_shape_of_a_drum)

<sup>†</sup> $\Gamma$  ist die Gammafunktion  $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ , vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion>. Es gilt insbesondere  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ .

### III. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Um diese Sätze zu beweisen, brauchen wir die Spur von Operatoren: Für eine Matrix  $A$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Spur einfach  $\text{Tr } A = \sum_i \langle Ae_i, e_i \rangle$  für eine Orthonormalbasis  $e_i$ . Für einen Operator  $A: H \rightarrow H$  ( $H$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  - bei uns  $H = L^2(E)$ ) wollen wir die Spur analog definieren:  $e_i$  sei eine Orthonormalbasis von  $H$  und  $\text{Tr } A = \sum_i \langle Ae_i, e_i \rangle_H$ . Da es sich um eine unendliche Summe handelt, muss diese nicht konvergieren. Solche beschränkten Operatoren für welche  $\text{Tr}$  existiert, nennt man *Spurklasseoperatoren*. Wir werden hier zeigen, dass Glättungsoperatoren dazu gehören:

**Lemma III.5.15.** *Sei  $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$  ein beschränkter Operator mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $e_i$  zu Eigenwerten  $\lambda_i$ .  $A$  haben einen Kern  $k$ , der ein stetiger Schnitt in  $E \boxtimes E^*$  ist - also  $(As)(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy$ . Dann ist  $k(x, y) = \sum_j \lambda_j e_j(x) \otimes e_j(y)^*$  und  $\text{Tr} A = \int_M k(x, x)dx = \sum_i \lambda_i$*

*Beweis.* Die Darstellung von  $k$  folgt direkt aus

$$\int_M \sum_j \lambda_j (e_j(x) \otimes e_j(y)^*) e_k(y) dy = \sum_j e_j(x) \int_M \langle e_j(y), e_k(y) \rangle dy = \lambda_k e_k(x)$$

und der Eindeutigkeit des Kerns. Die Spur wird in Übungsaufgabe 18(iii) berechnet.  $\square$

Für  $t > 0$  ist  $e^{-tP}$  ein Glättungsoperator und passt in das letzte Lemma und wir haben

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta}) = \sum_i e^{-t\lambda_i} \sim (4\pi t)^{-m/2} (a_0 + ta_1 + \dots) \quad (\text{III.10})$$

mit  $a_j = \int_M \Theta_j(x, x)dx$ . Mit Beispiel III.5.12 haben wir somit Satz III.5.13.

*Beweis von Satz III.5.14.* Um  $N(\lambda) = \sum_{j: \lambda_j \leq \lambda} 1$  abzuschätzen, definieren wir uns eine Hilfsfunktion. Für  $r < 1$  sei  $f_r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f|_{[0, r/e]} = 0$ ,  $f(x \in [1/e, 1]) = 1/x$  und linear auf  $[r/e, 1/e]$ . Weiterhin sei  $\phi_{j,r}(t) := f_r(e^{-t\lambda_j})e^{-t\lambda_j}$  und  $\phi_r(t) := \sum_j \phi_{j,r}(t)$ . Dann ist  $0 \leq \phi_{j,r} \leq 1$  und

$$\phi_{j,r}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda_j \geq t^{-1}(1 - \ln r) \\ 1 & \text{für } \lambda_j \leq t^{-1}. \end{cases}$$

Somit haben wir

$$\phi_r\left(\frac{1}{r\lambda}\right) \leq \sum_{j: (1-\ln r)r\lambda \geq \lambda_j} 1 = N((1-\ln r)r\lambda) \text{ und } \phi_r\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq \sum_{j: \lambda_j < \lambda} 1 = N(\lambda).$$

Es bleibt  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{m}{2}} \phi_r(t)$  zu bestimmen. Dazu sei  $\phi_f(t) = \sum_j f(e^{-t\lambda_j})e^{-t\lambda_j}$  für eine stetige Funktion  $f$  auf  $[0, 1]$ . Wir zeigen, dass  $t^{\frac{m}{2}} \phi_f(t) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f(e^{-r}) r^{\frac{m}{2}-1} e^{-r} dr$  gilt: Wegen der Linearität in  $f$  reicht es nach Stone-Weierstrass dies für  $f(x) = x^n$  zu überprüfen. Dann ist  $t^{\frac{m}{2}} \phi_f(t) = t^{\frac{m}{2}} \sum_j e^{-(n+1)t\lambda_j}$ , was nach (III.10) für  $t \rightarrow 0$  gegen  $A(n+1)^{-\frac{m}{2}}$  mit  $A := (4\pi)^{-m/2} \text{vol}(M)$  konvergiert. Das rechnet man auch für die rechte Seite nach:  $\frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty r^{\frac{m}{2}-1} e^{-(n+1)r} dr = \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} (n+1)^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt = A(n+1)^{-\frac{m}{2}}$ .

III.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

Damit haben wir

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N((1 - \ln r)r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{m}{2}}} \geq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt \geq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} dt = \frac{A}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})}$$

und

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{m}{2}}} \leq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt \leq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{1-\ln r} t^{\frac{m}{2}-1} dt = \frac{A(1 - \ln r)^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

Für  $r \rightarrow 1$  erhalten wir somit  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\frac{m}{2}} N(\lambda) = \frac{A}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ . □



# IV. Hauptfaserbündel

## IV.1. Vom Tangential- zum Repèrebündel

Sei  $M^m$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei

$$\mathrm{Gl}(M, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) \mid \nu_x \text{ ist Basis in } T_x M\} \text{ und } \mathrm{Gl}(M) := \sqcup_{x \in M} \mathrm{Gl}(M, x).$$

Wir setzen  $\pi: \mathrm{Gl}(M) \rightarrow M$ ,  $\nu_x \in \mathrm{Gl}(M, x) \mapsto x$ , und überlegen uns, dass das ein Faserbündel (Strukturgruppe  $\mathrm{Gl}_m(\mathbb{R})$ ) ist – das *Repèrebündel* (*Rahmenbündel*) von  $M$ : Seien  $\phi_\alpha$  lokale Trivialisierungen von  $TM$  und  $\mu_{\alpha\beta}$  die zugehörigen Übergangsfunktionen. Da  $\phi_\alpha|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$  ein Vektorraumisomorphismus ist, gibt es einen Vektorraumisomorphismus  $A_\alpha(x): T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\phi_\alpha(v) = (x, A_\alpha(x)v)$ . Dann ist  $\mu_{\alpha\beta}(x) = A_\beta(x)A_\alpha(x)^{-1} \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R})$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} \mathrm{Gl}(M, x) \rightarrow U_\alpha \times \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R}) \\ \nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) &\mapsto (x, A_\alpha(x)(\nu_1, \dots, \nu_m)). \end{aligned}$$

Damit ist  $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1}(x \in U_\alpha \cap U_\beta, B \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R})) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)B)$ . Dies bestimmt nach Satz II.1.15 die Topologie und glatte Struktur von  $\mathrm{Gl}(M)$  und macht es zu einem Faserbündel. Aber wir haben hier sogar mehr: Da die Übergangsfunktionen die gleichen wie von  $TM$  sind, gilt  $\mu_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}(\mathrm{Gl}_m(\mathbb{R}))$ .

Beachte:  $\mathrm{Gl}(M)$  ist kein Vektorbündel. Auch gibt es i.A. keine globalen Rahmen auf  $M$  und damit überhaupt keine globalen Schnitte gibt.

Ganz analog können wir aus einem Vektorbündel  $E$  vom Rang  $r$  mittels

$$\mathrm{Gl}(E, x) := \{\nu_x \mid \nu_x \text{ ist Basis von } E_x\} \text{ und } \mathrm{Gl}(E) := \sqcup_{x \in M} \mathrm{Gl}(E, x)$$

und die analogen Definitionen für  $\pi$  und  $\phi_\alpha$  das Faserbündel  $\mathrm{Gl}(E)$  mit Faser und Strukturgruppe  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ .

Haben wir allerdings eine Bündelmetrik  $h$  auf einem reellen/komplexen  $E$  (im Falle von  $TM$  z.B. eine Riemannsche Metrik) können wir sogar folgendes Faserbündel definieren:

$$\mathrm{O}(E, x) := \{\nu_x \mid \nu_x \text{ ist orthonormale Basis von } E_x\} \text{ und } \mathrm{O}(E) := \sqcup_{x \in M} \mathrm{O}(E, x),$$

da wir aus einer lokalen Trivialisierung  $\phi_\alpha$  von  $E$  auch immer eine erhalten, für die eine Orthonormalbasis  $f_i$  bzgl.  $h$  auf die Standardbasis  $e_i$  des  $\mathbb{R}^r$  bzw.  $\mathbb{C}^r$  abgebildet wird. Für eine solche Trivialisierung haben die Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}(x)$  sogar Werte in  $O(r)$  (für reelle Vektorbündel) bzw.  $U(r)$  (für komplexe Vektorbündel), da Orthonormalbasen wieder auf Orthonormalbasen abgebildet werden müssen. D.h. ganz analog wie oben erhalten wir, dass  $\mathrm{O}(E) \rightarrow M$  bzw.  $U(E) \rightarrow M$  ein Faserbündel mit Fasertyp und Strukturgruppe  $O(r)$  bzw.  $U(r)$  ist.

## IV.2. Definition

**Definition IV.2.1.** Ein  $(G-)$ Hauptfaserbündel ( $G$ -principal bundle) ist ein Faserbündel  $\pi: E \rightarrow M$ , dessen Fasertyp eine Liegruppe  $G$  ist und für welches es lokale Trivialisierungen gibt, deren Übergangsfunktionen Werte in  $G$  annehmen. Dabei wird  $G$  mittels  $g \mapsto (L_g: h \mapsto g \cdot h)$  als Teilmenge von  $\text{Diff}(G)$  verstanden. Solche Übergangsfunktionen nennen wir dann  $G$ -Kozykel.

**Bemerkung IV.2.2.** Achtung: Es wird nicht gefordert, dass für jede Wahl von lokalen Trivialisierungen, die Übergangsfunktionen Werte in  $G$  annehmen.

**Bemerkung IV.2.3** ( $G$  wirkt auf den Fasern). Seien  $\phi_\alpha$  lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels, deren Übergangsfunktionen Werte in  $G$  annehmen. Wir definieren  $\Psi: G \times E \rightarrow E$ ,  $(g, e) \mapsto \Psi(g, e) =: e \cdot g$  durch

$$(g \in G, e \in \pi^{-1}(\{x\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)) \xrightarrow{\text{Id}_G \times \phi_\alpha} (g, (x, h)) \mapsto (x, h \cdot g) \mapsto \phi_\alpha^{-1}(x, hg). \quad (\text{IV.1})$$

Wohldefiniertheit folgt, da dies als Rechtswirkung mit der Linkswirkung von  $\mu_{\alpha\beta}(x)$  kommutiert.

Mit letzter Bemerkung findet man äquivalente Definitionen eines  $G$ -Hauptfaserbündels:

**Satz IV.2.4.** Sei  $G$  eine Liegruppe und  $\pi: E \rightarrow M$  eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1)  $\pi: E \rightarrow M$  ist ein  $G$ -Hauptfaserbündel.
- (2) Es gibt eine Rechtswirkung  $G \times E \rightarrow E$ ,  $(g, e) \mapsto e \cdot g$  und  $G$ -äquivalente lokale Trivialisierungen (d.h. es gibt eine offene Überdeckung  $U_\alpha$  von  $M$  und Diffeomorphismen  $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  mit  $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$  und  $\phi_\alpha(e \cdot g) = \phi_\alpha(e) \cdot g$  für alle  $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  und  $g \in G$ , wobei  $G$  auf  $U_\alpha \times G$  mittels  $(x, h) \cdot g = (x, hg)$  wirkt.)
- (3) Es gibt eine Rechtswirkung  $G \times E \rightarrow E$ ,  $(g, e) \mapsto e \cdot g$ , die fasertreu\* und einfach-transitiv auf den Fasern † ist, und eine offene Überdeckung  $U_\alpha$  von  $M$ , so dass es für alle  $\alpha$  einen lokalen Schnitte  $U_\alpha \rightarrow E$  gibt.

*Beweis.* (1)  $\rightarrow$  (2) Mit der Rechtswirkung aus (IV.1) sind die  $\phi_\alpha$  direkt  $G$ -äquivalent. (2)  $\rightarrow$  (1) Die  $\phi_\alpha$  aus (2) ergeben schon die richtigen Übergangsfunktionen: Es ist  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, h) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(h))$  mit  $\mu_{\alpha\beta}(x): G \rightarrow G$ . Wegen der  $G$ -Äquivarianz folgt  $\mu_{\alpha\beta}(x)(hg) = \mu_{\alpha\beta}(x)(h) \cdot g$  und damit  $\mu_{\alpha\beta}(x) = L_{\mu_{\alpha\beta}(x)(e)}$ .

(2)  $\rightarrow$  (3) Fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt, da diese Eigenschaften für die Wirkung auf  $U_\alpha \times G$  gelten, und aus der  $G$ -Äquivarianz der lokalen Trivialisierungen. Lokale Schnitte erhält man z.B. durch  $x \in U_\alpha \mapsto \phi_\alpha^{-1}(x, 1 \in G)$ .

(3)  $\rightarrow$  (2) Aus den lokalen Schnitten  $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow E$  wollen wir uns geeignete lokale Trivialisierungen bauen - wir definieren die Inversen  $\psi_\alpha: (x, g) \in U_\alpha \times G \mapsto s_\alpha(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ . Die  $\psi_\alpha$  sind glatt. Aus fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt insbesondere, dass  $\pi^{-1}(\pi(e)) = \{e \cdot g \mid g \in G\}$  und  $\psi_\alpha$  ein  $G$ -äquivarianter Diffeomorphismus ist. Damit sind  $\phi_\alpha := \psi_\alpha^{-1}$  die gesuchte lokalen Trivialisierungen.  $\square$

\* = bildet Fasern auf Fasern ab

† = Für alle  $x \in M$  und alle  $e, e' \in \pi^{-1}(x)$  gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $e \cdot g = e'$ .

**Beispiel IV.2.5.** Sei  $G$  eine Liegruppe und  $M$  eine Mannigfaltigkeit.

- (i) Ist  $\pi: E \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $f: M' \rightarrow M$  glatt. Dann ist  $f^*E$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel über  $M'$ .
- (ii) Ist  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe  $G$ , dann ist  $\pi: G \rightarrow G/H$  nach Satz A.2.4 und Folgerung A.2.6 ein Faserbündel mit Fasertyp  $H$ , lokale Schnitte  $s: U_{[g]} \rightarrow G$  und lokalen Trivialisierungen  $\phi(g \in U_{[g]}) = (gH, s(gH)^{-1}g) \in U_{[g]} \times H$ . Weiterhin wirkt  $H$  von rechts auf  $G$ , diese Wirkung respektiert die Fasern von  $\pi: G \rightarrow G/H$  und auf jeder Faser  $\pi^{-1}(gH)$  diese Wirkung ist einfach-transitiv (dafür  $h \in H$ ,  $gh_1, gh_2 \in \pi^{-1}(gH)$  ist  $gh_1h = gh_2$  genau dann, wenn  $h = h_1^{-1}h_2$  ist). Zusammen mit Satz IV.2.4 ist  $\pi: G \rightarrow G/H$  damit ein  $H$ -Hauptfaserbündel. Alternativ kann man auch direkt überprüfen, dass die Übergangsfunktionen zu obigen Trivialisierungen in  $H$  landen.
- (iii) Sei  $G \times E \rightarrow E$  eine freie und eigentliche Rechtswirkung, vgl. Definition A.2.8. Dann ist  $M := E/G$  versehen mit der glatten Struktur aus Satz A.2.9 eine Mannigfaltigkeit, die kanonische Projektion  $\pi: E \rightarrow M$  eine Submersion und  $\pi: E \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel.

Andererseits sind alle  $G$ -Hauptfaserbündel von dieser Form: Freiheit der Wirkung ist klar. Es bleibt also zu zeigen, dass die Wirkung auch eigentlich ist. Betrachten wir dafür die Abbildung  $\iota: G \times E \rightarrow E \times E$ ,  $(g, e) \mapsto (e \cdot g, e)$ . Sei  $K$  ein Kompaktum von  $E \times E$ . Sei  $(g_i, e_i) \in \iota^{-1}(K)$ . Dann ist  $(e_i \cdot g_i, e_i) \in K$  und es gibt Teilfolgen  $e_{i_j}$  bzw.  $e_{i_j} \cdot g_{i_j}$ , die wegen der Kompaktheit von  $K$  in  $E \times E$  gegen ein  $e$  bzw.  $f$  konvergieren. Sei  $x = \pi(e)$  und damit  $\pi(f) = x$ . Sei  $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  eine  $G$ -äquivalente lokale Trivialisierung von  $E$  mit  $x \in U$ . Dann ist für  $j$  groß genug  $e_{i_j}, e_{i_j} \cdot g_{i_j} \in \pi^{-1}(U)$ , d.h.  $\phi(e_{i_j}) = (x_{i_j}, h_{i_j})$  und  $\phi(e_{i_j} \cdot g_{i_j}) = (x_{i_j}, h'_{i_j})$ . Da  $e_{i_j} \rightarrow e = \phi(x, h)$ , geht  $x_{i_j} \rightarrow x$  in  $M$  und  $h_{i_j} \rightarrow h$  in  $G$ . Analog  $h'_{i_j} \rightarrow h'$  mit  $f = \phi(x, h')$ . Wegen der  $G$ -Äquivarianz von  $\phi$  ist  $h'_{i_j} = h_{i_j} \cdot g_{i_j}$  und damit konvergiert  $g_{i_j}$  gegen  $h^{-1}h'$  in  $G$  und  $\iota^{-1}(K)$  ist kompakt.

**Definition IV.2.6.** Zwei  $G$ -Hauptfaserbündel  $\pi: E \rightarrow M$  und  $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$  heißen *isomorph*, falls es einen  $G$ -äquivalenten\* Diffeomorphismus  $f: E \rightarrow \tilde{E}$  mit  $\tilde{\pi} \circ f = \pi$  gibt. Die Menge der Isomorphieklassen von  $G$ -Hauptfaserbündel über  $M$  bezeichnen wir mit  $\text{Prin}_G(M)$ .

Sind  $E = \tilde{E}$  und  $\pi = \tilde{\pi}$  mit zwei verschiedenen  $G$ -Wirkungen isomorph, so nennt man den Isomorphismus einen *vertikalen Automorphismus*† Die Menge der vertikalen Automorphismen bezeichnen wir mit  $\text{Aut}_M(E)$ .

\* $G$ -äquivalent bezieht sich auf die Rechtswirkung aus (IV.1), also  $f(e \cdot g) = f(e) \cdot g$  für alle  $g \in G$ ,  $e \in E$ .

†Das 'vertikal' steht hier nur dabei, da viele Quellen bei Isomorphismen von Bündeln auch Diffeomorphismen auf  $M$  zulassen und nicht nur die Identität wie bei uns. Deshalb sind bei uns Automorphismen automatisch vertikal (auf  $M$  die Identität), wogegen es sonst extra gefordert werden muss.

#### IV. Hauptfaserbündel

Sind zwei  $G$ -Hauptfaserbündel isomorph (als  $G$ -Hauptfaserbündel), dann sind sie auch als Faserbündel isomorph. Andererseits können zwei  $G$ -Hauptfaserbündel als Faserbündel isomorph sein, aber nicht als  $G$ -Hauptfaserbündel.

**Satz IV.2.7.** *Ein Hauptfaserbündel ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.*

*Beweis.* Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel. Ist  $E$  trivial, dann gibt es einen Hauptfaserbündelisomorphismus  $f: G \times M \rightarrow E$  und mit  $s(x) = f(1, x)$  einen globalen Schnitt in  $E$ . Gibt es umgekehrt einen globalen Schnitt in  $E$ . Dann definiert  $f: G \times M \rightarrow E, (x, g) \mapsto s(x) \cdot g$  einen Hauptfaserbündelisomorphismus.

**Beispiel IV.2.8.** (i) Das Hopfbündel ist nicht trivial, da sonst  $S^3$  diffeomorph zu  $S^1 \times S^2$  sein müsste.\*

(ii) Sei  $\pi: E \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel. Dann ist  $\pi^*E \rightarrow E$  trivial: Es ist  $e \in E \mapsto (e, e) \in \pi^*E = \{(e, e') \in E \times E \mid \pi(e) = \pi(e')\}$  ein globaler Schnitt.

Wir wollen als nächstes vertikale Automorphismen charakterisieren: Wir betrachten dazu  $G$  als rechte  $G$ -Mannigfaltigkeit mit der Konjugationswirkung:  $(g, h) \mapsto h^{-1}gh$ . Sei  $\text{Hom}^G(E, G)$  die Menge der  $G$ -äquivarianten Abbildungen  $u: E \rightarrow G$ , also alle Abbildungen  $u$  mit  $u(e \cdot h) = h^{-1}u(e)h$  für  $h \in G$  und  $e \in E$ . Mit der punktweisen Multiplikation ist  $\text{Hom}^G(E, G)$  eine Gruppe:

$$\text{abgeschlossen: } (uv)(e \cdot h) = h^{-1}u(e)hh^{-1}v(e)h = h^{-1}(uv)(e)h$$

$$\text{Einselement: } e \in E \mapsto 1 \in G \quad \text{Inverses zu } u: \quad u^{-1}: e \in E \mapsto u(e)^{-1} \in G$$

**Lemma IV.2.9.**

(i) Für  $u \in \text{Hom}^G(E, G)$  definiert  $f_u(e) := e \cdot u(e)$  einen vertikalen Automorphismus von  $E$ .

(ii) Die Abbildung  $u \in \text{Hom}^G(E, G) \mapsto f_u \in \text{Aut}_M(E)$  ist ein Gruppenisomorphismus.

*Beweis.* (i) Das Inverse zu  $f_u$  ist  $f_{u^{-1}}$ . Damit ist  $f_u$  ein Diffeomorphismus. Es bleibt die  $G$ -Äquivarianz:

$$f_u(e \cdot h) = e \cdot h \cdot u(e \cdot h) = e \cdot u(e) \cdot h \stackrel{\text{Rechtsw.}}{=} f_u(e) \cdot h.$$

(ii) Gruppenmorphismus klar. Injektivität folgt, da die Gruppenwirkung  $\Psi$  frei ist. Surjektivität: Sei  $f \in \text{Aut}_M(E)$  und  $e \in E$ . Dann liegen  $f(e)$  und  $e$  in der gleichen Faser und es gibt ein  $u(e) \in G$  mit  $f(e) = \Psi(u(e), e)$ . Dies definiert eine Abbildung  $u: E \rightarrow G$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $u \in \text{Hom}^G(E, G)$  gilt, dann folgt Surjektivität mit  $e \cdot u(e) \cdot h = f(e) \cdot h = f(e \cdot h) = e \cdot h \cdot u(e \cdot h)$ . Damit ist  $u(e)h = hu(e \cdot h)$ , da die Wirkung frei ist.  $\square$

Wir erinnern uns, dass sowohl Faserbündel als auch Vektorbündel aus ihren Übergangsfunktionen wieder rekonstruiert werden konnten. Das gleiche gilt für Hauptfaserbündel:

\*Das sieht man z.B. daran, dass beide Mannigfaltigkeiten verschiedene Fundamentalgruppen haben.

**Satz IV.2.10.** (Hauptfaserbündelversion von Satz II.1.8) Sei  $\{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Seien  $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges  $G$ -Hauptfaserbündel, welches diese  $\mu_{\alpha\beta}$  als Übergangsfunktionen hat.

**Satz IV.2.11.** (Hauptfaserbündelversion von Folgerung II.1.13) Seien  $E_i \rightarrow M$ ,  $i = 0, 1$ ,  $G$ -Hauptfaserbündel, lokalen Trivialisierungen  $\phi_\alpha^i$  und Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ . Für alle  $\alpha, \beta$  seien die  $\mu_{\alpha\beta}^0$  und  $\mu_{\alpha\beta}^1$  homotope Abbildungen mit Homotopie  $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ , so dass zu jeder Zeit  $t \in [0, 1]$  die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind  $E_0$  und  $E_1$  isomorph.

**Folgerung IV.2.12.** Sei  $H$  eine Lieuntergruppe von  $G$ , so dass es eine Homotopieäquivalenz  $F: G \times [0, 1] \ni (g, t) \mapsto F_t(g) := F(g, t) \in G$  von  $H$  nach  $G$  gibt. Dann ist  $\text{Prin}_G(M) \cong \text{Prin}_H(M)$ .

*Beweisskizze.* Seien nun  $\mu_{\alpha\beta}$  die Übergangsfunktionen eines  $G$ -Hauptfaserbündels  $E$  über  $M$ . Wir setzen  $\mu_{\alpha\beta}^t = F_t \circ \mu_{\alpha\beta}$ . Dann ist nach letztem Satz  $E$  isomorph zum  $G$ -Hauptfaserbündel mit Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}^1 = F_1 \circ \mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H \subset G$ . Zu diesen gehört aber auch ein eindeutig bestimmtes  $H$ -Hauptfaserbündel.  $\square$

**Beispiel IV.2.13.**  $H = O(n) \subset G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ . Dann gibt es mittels Gram-Schmidt eine Abbildung  $s: \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n)$  und es definiert  $F_t(g \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})) = (1-t)g + s(g) \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$  eine Abbildung wie in der letzten Folgerung. Somit gilt  $\text{Prin}_{\text{Gl}_n(\mathbb{R})}(M) \cong \text{Prin}_{O(n)}(M)$ .

### IV.2.1. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel

In Abschnitt IV.1 haben wir aus dem  $TM$  bzw. einem Vektorbündel vom Rang  $r$ , die  $\text{Gl}_m(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel  $\text{Gl}(M)$  bzw.  $\text{Gl}(E)$  konstruiert. Nun wollen wir sehen, wie man zurückkommt: Sei  $\text{Gl}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  die definierende Darstellung von  $\text{Gl}_m(\mathbb{R})$ :  $\rho = \text{id}: \text{Gl}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}_m(\mathbb{R})$ . Auf der Menge  $\text{Gl}(M) \times \mathbb{R}^m$  betrachten wir die  $\text{Gl}_m(\mathbb{R})$ -Wirkung

$$((s_1, \dots, s_m) \in \text{Gl}(M, x), y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m) \cdot g := ((s_1, \dots, s_m) \cdot g, \rho(g^{-1})y)$$

und setzen  $E := (\text{Gl}(M) \times \mathbb{R}^m) / \text{Gl}_m(\mathbb{R})$  mit  $\hat{\pi}: E \rightarrow M$ ,  $[(s, y)] \mapsto \pi(s)$ . Die Abbildung

$$f: (\text{Gl}(M) \times \mathbb{R}^m) / \text{Gl}_m(\mathbb{R}) \rightarrow TM, [(s_1, \dots, s_m), y = (y^1, \dots, y^m)] \mapsto y^i s_i$$

erfüllt  $\pi \circ f = \hat{\pi}$  und ist bijektiv. Wir werden später noch sehen, dass  $f$  sogar ein Vektorbündelisomorphismus ist. Dies ist ein allgemeines Konstruktionsprinzip:

Sei  $\pi: P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und sei  $\rho: G \times F \rightarrow F$  eine Linkswirkung auf einer Mannigfaltigkeit  $F$ . Auf dem Produkt  $P \times F$  haben wir mittels

$$(p, v) \cdot g := (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

#### IV. Hauptfaserbündel

eine freie  $G$ -Rechtswirkung, da die  $G$ -Wirkung auf  $P$  schon frei ist. Es bezeichne

$$E := (P \times F)/G =: P \times_{\rho} F$$

den zugehörigen Quotientenraum (versehen mit der Quotiententopologie),  $[(p, v)]$  die Äquivalenzklasse von  $(p, v)$  und  $\hat{\pi}: E \rightarrow M$ ,  $[(p, v)] \mapsto \pi(p)$  die zugehörige Projektion.

**Satz IV.2.14.**  $\hat{\pi}: E \rightarrow M$  ist ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$  – das zu  $P$  und  $\rho$  assoziierte Faserbündel.

*Beweisskizze.* Da  $P$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist, gibt es  $G$ -äquivalente lokale Trivialisierungen

$$\phi_{\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), \psi_{\alpha}(p)).$$

Seien  $\mu_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow G$  die zugehörigen Übergangsfunktionen. Wir setzen

$$\hat{\phi}_{\alpha}: \hat{\pi}^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times F, \quad [(p, v)] \mapsto (\pi(p), \psi_{\alpha}(p) \cdot v).$$

Es ist  $\hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow F$ ,  $[p, v] \mapsto \psi_{\alpha}(p) \cdot v$ , eine Bijektion und macht damit  $\hat{\pi}^{-1}(x)$  zu einer Mannigfaltigkeit (man überprüft, dass die glatte Struktur unabhängig von der Wahl von  $\alpha$  ist). Damit ist  $\hat{\phi}_{\alpha}|_{\hat{\pi}^{-1}(x)}: [(p, v)] \in \hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$  glatt. Die Übergangsfunktionen sind  $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \text{Diff}(F)$ ,  $x \mapsto L_{\mu_{\alpha\beta}(x)}$ , und erfüllen damit die Kozykelbedingung. Nach dem Bündeltrivialisierungslemma II.1.15 folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz IV.2.15.** In obiger Situation, sei weiterhin  $V := F$  ein Vektorraum ( $\dim V = r$ ) und  $\rho: G \times V \rightarrow V$  eine Darstellung. Dann ist das assoziierte Bündel  $P \times_{\rho} V$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$ .

*Beweisskizze.* Wir versehen die Fasern von  $P \times_{\rho} V$  mit einer Vektorraumstruktur, indem wir fordern, dass für  $p \in P$  die Abbildungen  $\iota_p: V \rightarrow P \times_{\rho} V$ ,  $v \mapsto [(p, v)]$ , linear und damit Vektorraumisomorphismen sind. Damit dies wohldefinierte Vektorraumstrukturen auf den Fasern  $E_p$  gibt, ist zu zeigen, dass für  $E_p = E_{p'}$  die Abbildung  $\iota_p$  genau dann linear ist, wenn  $\iota_{p'}$  linear ist: Wegen  $E_p = E_{p'}$  gibt es ein  $g \in G$  mit  $p \cdot g = p'$ . Es gilt

$$\iota_{p'=p \cdot g}(v) = [(p \cdot g, v)] = [(p, \rho(g)v)] = \iota_p \circ \rho(g)v.$$

Da die  $\rho(g)$  Vektorraumisomorphismen sind, folgt die obige Behauptung.

Man zeigt dann noch, dass die Abbildungen  $\text{pr}_2 \circ \phi_{\alpha}|_{E_p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow V$  für alle  $\alpha$  und  $p \in \pi^{-1}(U_{\alpha})$  linear sind.  $\square$

**Folgerung IV.2.16.** Die Isomorphieklassen von  $\text{Gl}_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln über einer Mannigfaltigkeit  $M$  stehen in 1 : 1 Beziehung zu Isomorphieklassen von  $\text{Gl}_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln und  $\rho: \text{Gl}_r(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$  assoziierten Vektorbündeln über  $M$  von Rang  $r$  (hier isomorph als Vektorbündel) und damit ins 1 : 1 Beziehung zu den Isomorphieklassen von Vektorbündeln über  $M$  vom Rang  $r$ .

*Beweis.* Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$ . Dann haben wir  $E \mapsto \text{Gl}(E) \mapsto \text{Gl}(E) \times_{\rho} \mathbb{K}^r$ . Da  $E$  und  $\text{Gl}(E) \times_{\rho} \mathbb{K}^r$  die gleichen Übergangsfunktionen haben, sind sie isomorph.  $\square$

### IV.2.2. Exkurs: Čech-Kohomologie

Wir betrachten die Hauptfaserbündelversion von Satz II.1.9:

**Satz IV.2.17.** Gegeben zwei  $G$ -Hauptfaserbündel  $E, E'$  über  $M$ . Zu einer gegebenen Überdeckung  $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$  seien die Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  bzw.  $\mu'_{\alpha\beta}$ \*. Dann sind die  $G$ -Hauptfaserbündel genau dann isomorph (als  $G$ -Hauptfaserbündel), falls es glatte Funktionen  $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, G)$  mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{IV.2}$$

Insbesondere ist das Hauptfaserbündel  $E$  trivial, wenn  $\mu_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$  für geeignete  $h_\alpha$  gilt.

Wir betrachten eine Familie von  $h = \{h_\alpha\}_\alpha$  als 'Čech' 0-Kokette mit Koeffizienten in  $G$  und eine Familie  $\mu = \{\mu_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha\beta}$  als 'Čech' 1-Kokette mit Koeffizienten in  $G$ . Das heißt Übergangsfunktionen  $\mu_{\alpha\beta}$  bilden eine 1-Kokette, die die Kozykelbedingung erfüllt. Wir sagen zwei 1-Koketten  $\mu_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha\beta}$  sind genau dann äquivalent oder kohomolog, wenn es eine 0-Kokette gibt, so dass (IV.2) erfüllt ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen von Übergangsfunktionen bezeichnen wir mit  $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$ . Nach Konstruktion repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von Vektorbündeln über  $M$  vom Rang  $r$ , welche über den offenen Mengen von  $\mathfrak{U}$  trivialisiert werden können.

Sei  $(\mathfrak{V}, \iota)$  eine Verfeinerung von  $\mathfrak{U}$ , d.h.  $\mathfrak{V}$  ist eine offene Überdeckung von  $M$  und  $\iota : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$  mit  $V \subset \iota(V)$  für alle  $V \in \mathfrak{V}$ . Durch Einschränkung der Kozyklen erhalten wir eine Abbildung  $r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} : \check{H}^1(\mathfrak{U}; G) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{V}; G)$ . Man kann zeigen, dass diese Abbildung unabhängig von der Wahl von  $\iota$  ist und dass  $r_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} = r_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}} r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$  für eine Folge von Verfeinerungen  $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$  gilt.

Nun können wir den direkten Limes nehmen

$$\check{H}^1(M; G) := \varinjlim \check{H}^1(\mathfrak{U}; G).$$

Nun repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von  $G$ -Hauptfaserbündeln über  $M$ . Sind alle  $U_\alpha \in \mathfrak{U}$  zusammenziehbar. Dann ist  $\check{H}^1(M; G) = \check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$ .

Ganz analog kann man sehen, dass  $\check{H}^1(M; \text{Gl}_r(\mathbb{K}))$  bijektiv zur Menge der  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel über  $M$  vom Rang  $r$  ist.

Aus einer 0-Kokette  $h$  kann man durch  $(d_1 h)_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$  eine 1-Kokette machen. 1-Kokette  $\mu$  für die es einen 0-Kokette  $h$  mit  $\mu = d_1 h$  gibt, nennt man Korand.

Man kann die Definitionen zu 2-Koketten  $\xi = (\xi_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow G)_{\alpha\beta\gamma}$  mit  $(d_2 \mu)_{\alpha\beta\gamma} := \mu_{\gamma\beta} \mu_{\gamma\alpha}^{-1} \mu_{\beta\alpha}$  erweitern. D.h.  $d_2 \mu = 0$  ist äquivalent zu unserer Kozykelbedingung.

Insgesamt erhalten wir so aber keine exakte Sequenz  $0 \xrightarrow{d_0=0} \{h\} \xrightarrow{d_1} \{\mu\} \xrightarrow{d_2} \{\xi\} \dots$ , denn ist  $G$  nicht abelsch, ist der Randoperator  $d$  von oben i.A. kein Gruppenhomomorphismus

---

\*Wir nehmen bei Hauptfaserbündel immer implizit an, dass wir die lokalen Trivialisierungen immer schon so gewählt haben, dass die Übergangsfunktionen in  $G$  abbilden.

#### IV. Hauptfaserbündel

und damit  $\ker d_k$  bzw. im  $d_k$  keine Untergruppen. Insbesondere kann  $d^2 h = d_{k+1} d_k h = 0$  nur für abelsche Gruppen (0 als neutrales Element von  $G$ ) garantiert werden.

Ist  $G$  abelsch, gibt die Definition  $\check{H}^k(\mathfrak{U}; G) := \ker d_{k+1} / \text{im } d_k$  Gruppen, die  $k$ -te Čech-Kohomologiegruppe von  $M$  mit Koeffizienten in  $G$ .

Im Allgemeinen? Da  $d_0 = 0$  ist, spielt das für  $\check{H}^0$  keine Rolle und wir haben  $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G) = \ker d_1$  und sehen  $h \in \ker d_1$  genau dann, wenn  $h_\alpha = h_\beta$  auf  $U_\alpha \cap U_\beta$  gilt. Damit können wir  $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G)$  mit  $C^\infty(M, G)$  identifizieren.

Passt auch unser  $\check{H}^1$  von oben in diesen Rahmen? Ist  $G$  nicht abelsch, ist weder  $\ker d_2$  noch im  $d_1$  eine Gruppe. Aber die 0-Koketten wirken auf den 1-Koketten

$$(h \cdot \mu)_{\alpha\beta} = h_\alpha \mu_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}.$$

Man rechnet nach, dass diese Wirkung die Kozykelbedingung erhält, damit ist  $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G) = \ker d_2 / \sim$ , wobei  $\sim$  obige Wirkung ist. Ist  $G$  nicht abelsch, dann ist  $\check{H}^1(M; G)$  jedoch keine Gruppe. Es ist nur eine Menge, die aber ein ausgezeichnetes Element besitzt (ist also eine punktierte Menge) – das triviale Vektorbündel vom Rang  $r$ .

Zusammenhang zur singulären Kohomologie: Ist  $G$  abelsch\* und diskret, dann ist  $\check{H}^1(M; G)$  einfach die erste Čech-Kohomologie von  $M$  mit Koeffizienten in  $G$ . Insbesondere ist  $\check{H}^1(M; G)$  dann eine Gruppe und stimmt mit der singulären Kohomologiegruppe  $H_{\text{sing}}^1(M, G)$  überein. Nur abelsch reicht nicht: Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (mit der kontinuierlichen Topologie†) ist  $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = 0$  für alle  $M$  und  $i > 0$  ([6, Thm. 2.11.1 und Thm. 2.11.2] für garbentheoretische Argumente - folgt im Prinzip, da  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  eine Zerlegung der Eins erlauben.)

#### Beispiel IV.2.18.

$$\begin{aligned} \text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(M) &\stackrel{\text{Folg IV.2.16}}{\cong} \text{Prin}_{G_1(\mathbb{R})}(M) \stackrel{\text{Bsp IV.2.13}}{\cong} \text{Prin}_{O(1) \cong \mathbb{Z}_2}(M) \\ &\cong \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong H_{\text{sing}}^1(M, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

(Die  $\mathbb{Z}_2$ -Hauptfaserbündel über  $M$  entsprechen den zweifachen Überlagerungen von  $M$ .) Insbesondere ist  $\text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong H_{\text{sing}}^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  – das sind die Isomorphieklassen des trivialen Bündels und des Möbiusbandes. In diesem Falle kann man auch  $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  auch direkt ausrechnen, haben wir sogar schon in Beispiel II.1.14.

Was aber immer noch gilt (mit dem gleichen Beweis wie in der standard Čech-Kohomologietheorie [6, Chapter I.§2]): Ist  $1 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G' \rightarrow 1$  eine exakte Folge von topologischen Gruppen, dann gibt es eine exakte Folge von punktierten Mengen

$$\{*\} \rightarrow \check{H}^0(M; K) \xrightarrow{i_*} \check{H}^0(M; G) \xrightarrow{j_*} \check{H}^0(M; G') \rightarrow \check{H}^1(M; K) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(M; G) \xrightarrow{j_*} \check{H}^1(M; G').$$

\*Jede kompakte zusammenhängende abelsche Liegruppe ist ein Torus. Fordert man nur kompakt und abelsch, erhält man auch noch Produkte von Tori mit diskreten abelschen Gruppen. Bei fehlender Kompaktheit kann man noch Produkte mit  $\mathbb{R}^n$  bilden.

†Versehen mit der diskreten Topologie erhält man  $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = H_{\text{deRham}}^i(M, \mathbb{K})$ . Der Unterschied liegt in der Menge der erlaubten Abbildungen  $U \subset M \rightarrow \mathbb{K}$ . Bei der diskreten Topologie sind stetige Abbildungen automatisch lokal konstant.

**Beispiel IV.2.19.** Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit  $\check{H}^i(M, \mathbb{C}) = 0$  folgt, dass  $\check{H}^1(M; \mathbb{C}^* = \text{Gl}_1(\mathbb{C})) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus ist. Damit ist die Menge der Isomorphieklassen von komplexen Geradenbündeln (bzw. der Isomorphieklassen von  $\text{Gl}_1(\mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel) über  $M$ , zu  $H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$  isomorph.

Ist  $M = S^1$ , dann ist  $H_{\text{sing}}^2(S^1; \mathbb{Z}) = 0$  und alle komplexen Geradenbündel über  $S^1$  sind trivial (Es gibt also insbesondere keine 'komplexe Variante' des Möbiusbandes).

Ist  $M = S^2$ , dann ist  $H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Ist  $M = S^n$  für  $n > 2$ , dann ist  $H_{\text{sing}}^2(S^n; \mathbb{Z}) = 0$ . D.h. alle komplexen Geradenbündel über  $S^n$ ,  $n > 2$ , sind trivial. Das kann man auch direkt mit dem Kriterium für die Clutchingfunktionen ( $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(S^m) \cong [S^{m-1}, \text{Gl}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*]$ ) in ÜA 8 ablesen.

**Beispiel IV.2.20.** Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit  $\check{H}^i(M, \mathbb{R}) = 0$  folgt, dass  $c_1: \check{H}^1(M; S^1) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus ist - die sogenannte *erste Chern Klasse*. Insbesondere sehen wir, dass  $\text{Prin}_{S^1}(M) \cong H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$  ist.

Ist  $M = S^2$ , dann ist  $\text{Prin}_{S^1}(S^2) \cong H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Man kann zeigen, dass der Erzeuger das Hopfbündel ist, [13, Kapitel 3.5].

### IV.2.3. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln

**Definition IV.2.21.** Sei  $\pi_P: P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $\lambda: H \rightarrow G$  ein Liegruppenmorphismus. Eine  $\lambda$ -Transformation von  $P$  besteht aus einem  $H$ -Hauptfaserbündel  $\pi_Q: Q \rightarrow M$  und einer glatten Abbildung  $f: Q \rightarrow P$  mit  $\pi_P \circ f = \pi_Q$  und  $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$ . Für eine Lieuntergruppe  $H \subset G$  und  $\lambda$  die Inklusion, nennt man  $Q$  auch  $H$ -Reduktion von  $P$ . Für  $\lambda$  surjektiv nennt man  $Q$  eher einen  $(H)$ -Lift von  $P$ .

Wir nennen zwei  $\lambda$ -Transformationen  $(Q, f)$ , bzw.  $(Q', f')$  von  $P$  äquivalent, wenn es einen  $H$ -Hauptfaserbündel-isomorphismus  $\phi: Q \rightarrow Q'$  mit  $f' \circ \phi = f$ .

**Beispiel IV.2.22** (Reduktionen des Repèrebündels  $\text{Gl}(M)$ ). Für die Wahl einer Riemannschen Metrik auf  $M^m$  haben wir in Abschnitt IV.1 das  $O(m)$ -Hauptfaserbündel  $O(M) := O(TM)$  konstruiert. Für die Inklusionen  $O(m) \subset \text{Gl}_m(\mathbb{R})$  und  $f: O(M) \rightarrow \text{Gl}(M)$  ist  $O(M)$  eine  $O(m)$ -Reduktion von  $\text{Gl}(M)$ . Die  $O(m)$ -Hauptfaserbündel  $O(M)_i$  zu zwei verschiedenen Riemannschen Metriken  $g_i$  auf  $M$  sind äquivalente Reduktionen (Wähle  $\phi: O(M)_1 \rightarrow O(M)_2$  faserweise die Gram-Schmidt Orthonormalisierung bzgl.  $g_2$ .)

#### IV. Hauptfaserbündel

Ist  $M$  orientierbar, dann können wir  $\text{Gl}_+(M) = \sqcup_{x \in M} \{\text{pos. or. Basen von } T_x M\}$  definieren und analog wie in Abschnitt IV.1 ist das dann ein  $\text{Gl}_+(\mathbb{R}^m)$ -Hauptfaserbündel. Es  $\text{Gl}_+(M)$  eine  $\text{Gl}_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion von  $\text{Gl}(M)$ . Weiß man andererseits, dass für eine Mannigfaltigkeit  $M$  eine  $\text{Gl}_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion  $(Q, f)$  von  $\text{Gl}(M)$  gibt, dann ist  $M$  schon orientierbar: Als erstes sehen wir, dass aus  $f(q \cdot h) = f(q) \cdot h$  folgt, dass  $f$  injektiv ist. D.h. wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $f: Q \rightarrow \text{Gl}(M)$  die Inklusion ist. Wir nennen eine Basis  $\nu$  von  $T_x M$  positiv orientiert, falls  $\nu \in f(Q)$  gilt. Das definiert eine Orientierung auf  $M$ .

Im Allgemeinen führt eine Zusatzstruktur auf  $M$  oder dem Vektorbündel  $E$ , wie Bündelmetrik und Orientierung, zu einer Reduktion von  $\text{Gl}(M)$ . Nicht alle Zusatzstrukturen existieren auf allen Mannigfaltigkeiten oder Bündeln (z.B. Orientierung). Dann wird diese Bündelreduktionen nicht immer existieren. Untersuchungen der Existenz der Bündelreduktion führen (falls solche Strukturen nicht immer existieren) dann zu topologischen Obstruktionen für die jeweilige Struktur. Ähnlich ist es bei der Existenz von Liften:

**Beispiel IV.2.23.** Für  $n \geq 3$  hat  $SO(n)$  immer Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}_2$  (Beweis siehe [9, Lem. 1.4]). Die universelle Überlagerung\* nennen wir  $\text{Spin}(n)$ . Das ist nach Konstruktion erst einmal nur eine Mannigfaltigkeit, besitzt aber auch eine Gruppenstruktur, die die Projektion  $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$  zu einem Liegruppenmorphismus macht.<sup>†</sup>

Am Beispiel  $n = 3$ : Wir identifizieren die Standardsphäre  $S^3$  mit der Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1, und  $SO(3)$  sei die spezielle orthogonale Gruppe, die auf  $\text{span}\{i, j, k\} \cong \mathbb{R}^3$  wirkt. Sei  $\rho: S^3 \times \text{span}\{i, j, k\} \rightarrow \text{span}\{i, j, k\}$ ,  $\rho(p)q = pqp^{-1}$  (Multiplikation als Quaternionen). Dann kann man nachrechnen, dass  $\rho(p)$  ein Element in  $SO(3)$  und  $\rho: S^3 \rightarrow SO(3)$  ein surjektiver Gruppenmorphismus und damit eine zweifache Überlagerung ist. Also ist  $\text{Spin}(3) = SU(2)$ .

Hat man eine orientierte Mannigfaltigkeit  $M^m$ , dann gibt es dazu ein  $SO(m)$ -Hauptfaserbündel  $SO(M) := SO(TM) := \{\text{pos. or. ONB von } T_x M\}$ . Gibt es einen Lift von  $SO(M)$  bzgl. der zweifachen Überlagerung  $\lambda: \text{Spin}(m) \rightarrow SO(m)$ , so nennt man die Mannigfaltigkeit *spin* und die Wahl eines solchen Liftes nennt man *Spinstruktur* von  $M$ .

Beispiele:  $S^n, \mathbb{T}^n$  sind immer spin,  $\mathbb{R}P^n$  ist spin für  $n = 4k + 3$  (für  $n$  gerade ist es noch nicht mal orientierbar),  $\mathbb{C}P^n$  ist spin für ungerade  $n$ . Die Spinstruktur muss, selbst wenn sie existiert, nicht eindeutig sein, z.B. besitzt  $\mathbb{T}^n$   $2^n$ -Spinstrukturen,  $S^n$  für  $n \geq 2$  aber nur eine.

---

\*Eine Überlagerung  $\pi: X \rightarrow Y$  heißt *universell*, falls  $X$  zusammenhängend und einfach-zusammenhängend (d.h.  $\pi_1(X) = \{e\}$ ) ist.

<sup>†</sup>Das folgt aus:

**Satz IV.2.24.** Sei  $G$  eine Liegruppe und  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  die universelle Überlagerung. Wählt man  $e \in p^{-1}(1 \in G)$ , dann besitzt  $L$  eine eindeutige Gruppenstruktur mit  $e$  als neutrales Element, die  $L$  zu einer Liegruppe macht und  $p$  zu einem Liegruppenmorphismus.

*Beweisskizze.* Sei  $m: G \times G \rightarrow G$  die Gruppenmultiplikation in  $G$ . Sei  $f: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$  definiert durch  $f = m \circ (p \times p)$ . Da  $\tilde{G} \times \tilde{G}$  einfach zusammenhängend ist, gibt es einen eindeutigen Lift  $\tilde{f}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  von  $f$ , d.h.  $p \circ \tilde{f} = f$  mit  $\tilde{f}(e, e) = e$ . Dieses  $\tilde{f}$  definiert die gesuchte Gruppenstruktur auf  $\tilde{G}$ .  $\square$

**Satz IV.2.25.** Sei  $\lambda: H \rightarrow G$  ein Liegruppenmorphismus und  $\rho: G \times V \rightarrow V$  eine Darstellung. Sei  $\pi: P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $(Q, f)$  ein  $\lambda$ -Transformation von  $P$ . Dann sind die assoziierten Vektorbündel  $P \times_{\rho} V$  und  $Q \times_{\rho\lambda} V$  isomorph.

*Beweis.* Wir setzen  $\Psi: Q \times_{\rho\lambda} V \rightarrow P \times_{\rho} V$ ,  $[(q, v)] \mapsto [(f(q), v)]$ . Wohldefiniertheit folgt aus:

$$\begin{aligned} \Psi([(qh, (\rho\lambda)(h^{-1})v)]) &= [(f(qh), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] \\ &= [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q), v)] = \Psi([(q, v)]). \end{aligned}$$

Linear und faserreu ist klar.

Injektivität: Sei  $\Psi([(q, v)]) = \Psi([(q', v')])$  für  $q, q' \in Q$  und  $v, v' \in V$ . Dann ist  $\pi_Q(q) = \pi_Q(q')$  und es gibt ein  $h \in H$  mit  $q' = q \cdot h$ . Damit ist  $f(q') = f(q) \cdot \lambda(h)$  und

$$[(f(q'), v')] = [(f(q), v)] = [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q'), \rho(\lambda(h)^{-1})v)].$$

Da die  $G$ -Wirkung frei auf den Fasern von  $P$  ist, muss  $v' = \rho(\lambda(h)^{-1})v$  und damit  $[(q', v')] = [(q \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(q, v)]$  gelten.

Surjektivität: Sei  $[(p, v)] \in P \times_{\rho} V$  mit  $p \in P_x$ . Wir wählen  $q \in Q_x$ . Da die  $G$ -Wirkung auf  $P$  einfach transitiv ist, gibt es ein  $g \in G$  mit  $f(q) = p \cdot g$ . Damit ist

$$\Psi([(q, \rho(g^{-1})v)]) = [(f(q), \rho(g^{-1})v)] = [(p \cdot g, \rho(g^{-1})v)] = [(p, v)].$$

Glattheit von  $\Psi$  und  $\Psi^{-1}$  sieht man direkt in den Bündelkarten aus Satz IV.2.14.  $\square$

**Beispiel IV.2.26.** Sei  $E \rightarrow M$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $r$  und  $\rho$  die definierende Darstellung von  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ . Sei  $\iota: O(r) \rightarrow \mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$  die Inklusion. Nach Abschnitt IV.1 haben wir das  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel  $\mathrm{Gl}(E)$  und zu einer Bündelmetrik ein  $O(r)$ -Hauptfaserbündel  $O(E)$  konstruiert. Nun ist  $\mathrm{Gl}(E) \times_{\rho} \mathbb{R}^r \cong E \cong O(E) \times_{\rho\iota} \mathbb{R}^r$ .

## IV.2.4. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

### IV.2.4.1. Motivation

In Abschnitt IV.1 haben wir aus einem reellem Vektorbündel  $\pi: E \rightarrow M$  vom Rang  $r$  das  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel  $\mathrm{Gl}(E)$  konstruiert. Wir nehmen nun einen affinen Zusammenhang  $\nabla^E$  auf  $E$ . Gibt es einen natürlichen Weg dazu einen 'Zusammenhang' auf  $\mathrm{Gl}(E)$  zu konstruieren bzw. gibt es eine gute Zusammenhangsdefinition auf  $\mathrm{Gl}(E)$ ? Ganz naiv – auf einem formalen Level – könnte man sagen der Zusammenhang auf  $E$  ist eine Abbildung  $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ . Aber  $\Gamma(\mathrm{Gl}(E))$  ist oft leer, z.B. ist  $\Gamma(\mathrm{Gl}(M))$  nur dann nicht leer, wenn das Tangentialbündel trivial ist. Aber das bildet nur ein formales Level des Zusammenhangs ab. Andererseits kommt der Zusammenhang auf  $E$  immer mit einem Paralleltransport, vgl. Abschnitt III.2.1.

Da es lokal auch in  $\mathrm{Gl}(E)$  Schnitte gibt und die einfach aus einem (lokalen) Rahmen von Schnitten auf  $E$  bestehen. Können wir einfach einen (lokalen) Paralleltransport auf  $P := \mathrm{Gl}(E)$  definieren, in dem wir jedes Basiselement einzeln mittels des Zusammenhangs auf  $E$  transportieren:

#### IV. Hauptfaserbündel

Sei  $p \in P_x$ . Dann ist  $p = (p_1, \dots, p_m)$  mit  $p_i \in E_x$ . Sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x$ . Dann haben wir auf  $E$  einen Paralleltransport  $\parallel_{0,t}^\gamma$ , womit wir jedes  $p_i$  entlang  $\gamma$  transportieren können. Wir definieren

$$p(t) := \parallel_{0,t}^\gamma p := (\parallel_{0,t}^\gamma p_1, \dots, \parallel_{0,t}^\gamma p_m).$$

Da  $\parallel_{0,t}^\gamma: E_{x=\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(t)}$  ein Vektorraumisomorphismus ist, vgl. Satz III.2.13 und  $p$  eine Basis von  $E_x$  ist, ist  $\parallel_{0,t}^\gamma p \in P_{\gamma(t)}$  und damit  $\parallel_{0,t}^\gamma p$  ein Paralleltransport auf  $P$ .

Nach Folgerung III.2.16 und darüber ist  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(p_i(t)) := \parallel_{0,t}^\gamma p_i \in T_{p_i}E$  nur von  $\dot{\gamma}(0) \in T_xM$  aber nicht der konkreten Wahl von  $\gamma$  abhängig. Damit gilt das auch für  $\frac{d}{dt}|_{t=0}p(t)$  und wie in ÜA 23 erhalten wir den entsprechenden *horizontalen Lift*  $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$  für unser Hauptfaserbündel. Die Linearität des horizontalen Lifts und  $d_p\pi(X^*(p)) = X(\pi(p))$  erhält man wie in ÜA 23. Das reicht aber noch nicht, um damit einen Zusammenhang auf  $\text{Gl}(M)$  zu definieren: (Zur Unterscheidung bezeichnen wir den horizontalen Lift auf  $E$  mit  $\hat{X}$  und den auf  $P$  noch immer mit  $X^*$ )

$$\begin{aligned} X^*(p \cdot g) &= X^*((p_1 \cdot g, \dots, p_r \cdot g)) = (\hat{X}(p_1 \cdot g), \dots, \hat{X}(p_r \cdot g)) \\ &\stackrel{\text{Lin. von } \nabla^E}{=} (\hat{X}(p_1) \cdot g, \dots, \hat{X}(p_r) \cdot g) = X^*(p) \cdot g \stackrel{\text{Bsp. A.1.9.i}}{=} d_p R_g(X^*(p)) \end{aligned}$$

Hierbei wird die Linearität des Zusammenhangs  $\nabla^E$  genutzt um die Kompatibilität des Liftes mit der Rechtswirkung der  $\text{Gl}_r(\mathbb{K})$  zu folgern.

Analog erhält man auch die horizontalen Tangentialräume  $Q_p P := \{X^*(p) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\} \subset T_p P$  mit der vertikalen und horizontalen Projektionsabbildung und aus die Kompatibilität mit der Rechtswirkung kann man  $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$  folgern.

Da  $\nabla_X(s = (s_1, \dots, s_m)) := (\nabla_X s_1, \dots, \nabla_X s_m)$  zumindest lokal noch sinnvoll ist, haben wir die gleichen lokalen Zusammenhangseinsformen  $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$  mit den gleichen Transformationsformeln wie in (III.4) (da die Übergangsfunktionen von  $E$  und  $P = \text{Gl}(E)$  übereinstimmen).

Wir werden noch sehen, dass man auf dem Hauptfaserbündel aus den lokalen Zusammenhangseinsformen immer eine globale *Zusammenhangseinsform*  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  definieren kann.

#### IV.2.4.2. (Äquivalente) Definitionen für Zusammenhänge

**Definition IV.2.27.** Ein *Zusammenhang* auf dem  $G$ -Hauptfaserbündel  $\pi: P \rightarrow M^m$  ist ein glatter Schnitt  $Q$  in  $\text{Gr}_m(TP)$  (dem Grassmannbündel zu  $TP \rightarrow P$ , vgl. II.2.2.7)  $Q: p \in P \mapsto Q_p P \in \text{Gr}_m(T_p P)$ , so dass  $T_p P = Q_p P \oplus T_p(P_{\pi(p)})$  gilt und so dass  $Q$  rechtsinvariant ist, d.h., für alle  $g \in G$  und  $p \in P$  gilt  $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$ . Wir nennen  $Q_p P$  einen *horizontalen Tangentialraum an  $P$  in  $p \in P$*  und  $T_p(P_{\pi(p)}) \subset T_p P$  den *vertikalen Tangentialraum an  $P$  in  $u \in P$* . Die Projektionen auf die einzelnen Komponenten von  $T_p P$  bezeichnen wir mit  $\text{ver}: T_p P \rightarrow T_p(P_{\pi(p)})$  und  $\text{hor}: T_p P \rightarrow Q_p P$ .

**Woche 12 Lemma IV.2.28.**

$$(i) \quad T_p(P_{\pi(p)}) = \ker d_p \pi$$

(ii) Für  $X \in \mathfrak{g}$  sei  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$  definiert durch  $\tilde{X}(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \exp(tX)) \in T_p(P_{\pi(p)})$   
 ( $\tilde{X}$  heißt von  $X$  erzeugtes fundamentales Vektorfeld.) Es gilt

$$d_g \Psi_p(X(g)) = \tilde{X}(\Psi_p(g)),$$

wobei  $\Psi: G \times P \rightarrow P$  die Rechtswirkung auf  $P$  und  $\Psi_p(\cdot) = \Psi(\cdot, p) = p \cdot \cdot$  ist.

(iii)  $\mathfrak{g} \rightarrow \{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\}$ ,  $X \mapsto \tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ , ist ein linearer Isomorphismus\* (insbesondere ist  $\{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\} \subset \mathfrak{X}(P)$  ein Untervektorraum).

(iv)  $T_p(P_{\pi(p)}) = \{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\}$

*Beweis.* (i) Es ist  $\pi^{-1}(x) = P_x$ , und die Behauptung folgt aus dem Satz vom regulären Wert, vgl. auch [2, I.1].

(ii)

$$\begin{aligned} d_g \Psi_p(X(g)) &\stackrel{\text{lin. inv.}}{=} d_g \Psi_p d_1 L_g(X(1)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Psi_p \circ L_g(\exp tX) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot g) \cdot \exp(tX) = \tilde{X}(p \cdot g) \end{aligned}$$

(iii) Linearität folgt aus (ii) und der Linearität von  $d_g \Psi_p$ . Surjektivität ist klar nach Konstruktion. Es ist noch die Injektivität zu zeigen: Sei  $\tilde{X} = 0$ . Nach Definition von  $\tilde{X}$  ist  $\gamma(t) = p \cdot \exp(tX)$  Lösung von  $\dot{\gamma}(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$  mit Anfangswert  $\gamma(0) = p$ . Wegen Eindeutigkeit der Lösung dieses Anfangswertproblems ist  $\gamma(t)$  wegen  $\tilde{X} = 0$  konstant gleich  $p$  und damit ist  $p \cdot \exp(tX)$  konstant in  $t$ . Da die Wirkung von  $G$  frei ist und  $\exp$  in einer Umgebung der Null ein Diffeomorphismus aufs Bild ist, folgt  $X = 0$ .

(iv) Mit (i) und

$$d_p \pi(\tilde{X}(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \pi(p \cdot \exp(tX)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \pi(p) = 0$$

folgt  $\{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\} \subset T_p(P_{\pi(p)})$ . Da beides Vektorräume von gleicher Dimension sind, folgt die Gleichheit.  $\square$

Haben wir einen Zusammenhang  $Q$  auf  $P$  gegeben, definieren wir  $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$  für  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in Q_p P$ . Das definiert ein  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  und man rechnet nach, dass

(i)  $R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$  für alle  $g \in G$ , d.h.  $\omega_{p \cdot g}(d_p R_g(Z)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$  für alle  $p \in P$  und  $Z \in T_p P$ .

(ii)  $\omega(\tilde{X}) = X$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$  (Erst einmal ist  $\omega(\tilde{X}) \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ , d.h. die rechte Seite der Gleichung ist als konstante Funktion mit Wert  $X$  aufzufassen.)

---

\*sogar ein Liealgebrenisomorphismus, dazu muss man nur  $\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$  nachrechnen (dabei benutzt man wieder (ii))

#### IV. Hauptfaserbündel

gilt, vgl. ÜA 26.

Wie muss man die Wirkung von  $\text{Ad}(g^{-1})$  hier verstehen? Nach Definition A.1.17 ist  $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ ,  $g \mapsto (R_{g^{-1}} \circ L_g)_*$ . Haben wir eine Basis  $a_i$  von  $\mathfrak{g}$ , dann ist  $\omega = \omega^i \otimes a_i$  für  $\omega^i \in \Omega^1(P)$ . D.h. wir verstehen die Wirkung von  $\text{Ad}(g^{-1})$  auf  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  (und analog für alle anderen Operationen auf  $\mathfrak{g}$ ) hier immer so, dass er nur auf den Liealgebraanteil wirkt – also  $\text{Ad}(g^{-1})\omega(X) = \omega^i(X)\text{Ad}(g^{-1})(a_i)$ . Analog wirken Operationen, die standardmäßig auf Differentialformen definiert sind, auf liealgebrawertigen Differentialformen, in dem Sie nur auf die  $\omega^i$  wirken.

**Definition IV.2.29.** Ein Element  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ , für welches die beiden obigen Bedingungen (i) und (ii) gelten, nennt man *Zusammenhangseinsform* dem  $G$ -Hauptfaserbündel  $\pi: P \rightarrow M$ . Die Menge der Zusammenhangseinsformen auf  $P$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}(P)$ .

Die Bedingungen (i) und (ii) bleiben unter Addition und skalarer Multiplikation erhalten, damit ist  $\mathcal{A}(P)$  ein affiner Raum (aber kein Vektorraum, da  $\omega = 0$  keine Zusammenhangseinsform ist). Andersherum gehört zu einer Zusammenhangseinsform auch wieder ein Zusammenhang – in ÜA 26(i) zeigen wir:

**Satz IV.2.30.** Sei  $\pi: P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel. Sei  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  eine Zusammenhangseinsform auf  $P$ . Dann definiert

$$u \in P \mapsto Q_u P := \ker \omega_u$$

einen Zusammenhang auf  $P$ . Insbesondere ist die Abbildung invers zur obigen Zuordnung  $Q \mapsto \omega$ .

**Beispiel IV.2.31.** Wir betrachten das Hopfbündel  $S^3 \rightarrow S^2$ . Das ist ein  $S^1 = U(1)$ -Hauptfaserbündel und damit  $\mathfrak{g} \cong i\mathbb{R}$ . Sei  $p \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$  und sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das reelle Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ . Dann ist  $\omega_p(Y \in T_p S^3 \subset \mathbb{R}^4) := i\langle Y, ip \rangle$  ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel.

Die Zusammenhangseinsform  $\omega$  steht in engem Zusammenhang zu den Zusammenhangseinsformen von Vektorbündeln, die wir schon kennen.

**Satz IV.2.32.** Seien  $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$  lokale Schnitte von  $P$  zu einer offenen Überdeckung  $U_\alpha$ . Das definiert mit  $\phi_\alpha^{-1}(x, g) := s_\alpha(x) \cdot g$  lokale Trivialisierungen. Wir setzen  $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ . Dann ist

$$\omega_\alpha = \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\beta + dL_{\mu_{\alpha\beta}^{-1}} d\mu_{\alpha\beta}^*$$

Sind umgekehrt zu einer offenen Überdeckung  $U_\alpha$  und lokalen Schnitten  $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$  Einsformen  $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ , die obige Transformationsformel erfüllen, gegeben. Dann gibt es eine Zusammenhangseinsform  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  mit  $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$ .

---

\*Im Fall von Matrixgruppen, also  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$  ist das genau die Formel (III.4), die wir für die lokalen Zusammenhangsformen von Vektorbündeln gesehen haben.

*Beweisskizze.* Für die Berechnung der Transformation von  $\omega_\alpha$ , benutzen wir

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x(t) \cdot g(t)) = d_x R_g(\dot{x}(0)) + \widetilde{d_g L_{g^{-1}}(\dot{g}(0))}(x \cdot g) \quad (\text{IV.3})$$

für Kurven  $x(t)$  in  $P$  mit  $x(0) = x$  und  $g(t)$  in  $G$  mit  $g(0) = g$ , vgl. ÜA 26.ii. Sei  $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ ,  $v \in T_u M$  und  $\gamma$  eine Kurve durch  $\gamma(0) = u$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dann gilt (mit  $s_\alpha(u) = \phi_\alpha^{-1}(u, 1) = \phi_\beta^{-1} \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(u, 1) = \phi_\beta^{-1}(u, \mu_{\alpha\beta}(u)) = \phi_\beta^{-1}(u, 1)\mu_{\alpha\beta}(u) = s_\beta(u)\mu_{\alpha\beta}(u)$ )

$$\begin{aligned} d_u s_\alpha(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} s_\alpha(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (s_\beta(\gamma(t)) \cdot \mu_{\alpha\beta}(\gamma(t))) \\ &\stackrel{(\text{IV.3})}{=} d_{s_\beta(u)} R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(v)) + \widetilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)) \end{aligned}$$

mit  $Y = d_{\mu_{\alpha\beta}(u)} L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u \mu_{\alpha\beta}(v))$  und damit

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(v) &= (s_\alpha^* \omega)(v) = \omega_{s_\alpha(u)}(d_u s_\alpha(v)) \\ &= \omega_{s_\alpha(u)} \left( d_{s_\beta(u)} R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(v)) + \underbrace{\widetilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u))}_{=s_\alpha(u)} \right) \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}) \omega_{s_\alpha(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)^{-1} = s_\beta(u)}(d_u s_\beta(v)) + Y \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}) \omega_\beta(v) + d_{\mu_{\alpha\beta}(u)} L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u \mu_{\alpha\beta}(v)). \end{aligned}$$

Seien nun andersherum die  $\omega_\alpha$  gegeben und erfüllen die Transformationsformel. Für  $u \in U_\alpha$  haben wir  $T_p P = T_p(P_u) \oplus ds_\alpha(T_u M)$  für  $p = s_\alpha(u)$ , d.h. ein Vektor in  $T_p P$  setzt sich eindeutig zusammen als  $\widetilde{Y}(p) + ds_\alpha(v)$  für ein  $Y \in \mathfrak{g}$  und  $v \in T_u M$ . Wir definieren  $\omega_p: T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$  durch  $\omega_p(\widetilde{Y}(p) + ds_\alpha(v)) = \omega_\alpha(v) + Y$  und  $\omega_{p,g} := \text{Ad}(g^{-1})\omega_p$ . Damit ist  $\omega$  für alle  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  definiert. Man rechnet nach, dass  $\omega$  eine Zusammenhangsform auf  $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$  definiert und diese unabhängig von  $\alpha$  ist.  $\square$

Ganz analog erhält man:

**Satz IV.2.33.** Sei  $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$ . Dann gibt es nach Lemma IV.2.9.ii gibt es ein  $g \in \text{Hom}^G(P; G)$  mit  $\vartheta(u) = u \cdot g(u)$  für alle  $u \in P$ . Dann ist

$$(\vartheta^* \omega)_u = \text{Ad}(g(u)^{-1}) \omega_u + d_{g(u)} L_{g(u)^{-1}} d_u g.$$

**Bemerkung IV.2.34.** Insbesondere zeigen die letzten beiden Sätze, dass die Rückrichtung ' $\{\omega_\alpha\}_\alpha$  mit den Transformationsformeln wird wieder zu  $\omega$  zusammengesetzt' nur eindeutig ist, wenn die lokalen Schnitte  $s_\alpha$  vorgegeben sind und dann ist  $s_\alpha^* \omega = \omega_\alpha$ . Hat man  $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$ , so sind auch  $\vartheta \circ s_\alpha$  lokale Schnitte und obige Konstruktion würde die  $\omega_\alpha$  zu  $\vartheta^* \omega$  zusammenbauen. Das ist nicht verwunderlich, da die  $\mu_{\alpha\beta}$  das Hauptfaserbündel und damit auch die Zusammenhangsform nur bis auf vertikale Isomorphismen eindeutig bestimmt.

#### IV. Hauptfaserbündel

Seien nun  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  zwei Zusammenhangsformen und  $\omega_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha$  die zugehörigen lokalen Zusammenhangsformen zu lokalen Schnitten  $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$ . Dann gilt

$$\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} \circ (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha).$$

Wir betrachten das assoziierte Bündel  $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$  (das sogenannte *adjungierte Bündel*). Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann ist  $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$  ein lokaler Schnitt in  $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ . Auf  $U_\alpha \cap U_\beta$  gilt nun

$$[(s_\beta, (\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta)(X))] = [(s_\alpha \mu_{\beta\alpha}, \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}}(\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] = [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))].$$

Also definieren die  $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$  einen wohldefinierten globalen Schnitt von  $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ . Setzen wir  $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] := [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$  haben wir eine wohldefinierte Einsform mit Werten in  $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ , also ein Element in  $\Gamma(T^*M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$ . Wir haben also gesehen, dass  $\omega - \tilde{\omega}$  als Element in  $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}) = \Gamma(T^*M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$  aufgefasst werden kann. Andersherum liefert diese Konstruktion zu jedem Element  $\eta \in \Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$  aus einer Zusammenhangsform  $\omega$  ein neue Zusammenhangsform  $\tilde{\omega}$ : Lokal haben wir  $\eta_\alpha(X) = [(s_\alpha, z_\alpha^X)]$  für  $z_\alpha^X: U_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$ . Definieren wir  $z_\alpha(X) := z_\alpha^X$  haben wir  $z_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ . Wir setzen  $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + z_\alpha$ . Die analogen Transformationsformeln wie oben (insbesondere ist  $z_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} z_\alpha$ ) zeigen, dass die  $\tilde{\omega}_\alpha$  einen wohldefinierten Zusammenhang  $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  definieren.

Wir haben also gesehen:

**Lemma IV.2.35.** *Die Menge  $\mathcal{A}(P)$  der Zusammenhangsformen auf  $P \rightarrow M$  steht in 1:1 Beziehung mit  $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ . Insbesondere erhält diese Abbildung die affine Struktur auf  $\mathcal{A}(P)$  und  $\mathcal{A}(P)$  ist damit ein affiner Raum über dem Vektorraum  $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$  (und damit insbesondere unendlich-dimensional).*

**Bemerkung IV.2.36.** (Induzierter Zusammenhang auf dem assoziierten Vektorbündel) Sei  $E := P \times_\rho V$  ein zu  $G$ -Hauptfaserbündel  $P$  und zu  $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$  assoziiertes Vektorbündel. Sei  $\omega$  eine Zusammenhangsform auf  $P$ . Dann definiert

$$\nabla_X[(s(u), v(u))] := [s(u), X(v)(u) + \rho_*(s^*\omega(X))v(u)]$$

einen Zusammenhang auf  $E$  (muss man nachrechnen).

#### IV.2.5. Krümmung

Da die lokalen Zusammenhangsformen eines Hauptfaserbündels sich wie die eines Vektorbündels, vgl. (III.4), verhalten, können wir die lokalen Krümmungsformen  $\Omega_\alpha$  mittels der Strukturgleichung aus Satz III.2.22 definieren:

$$\Omega_\alpha := d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha,$$

wobei wir für  $\eta = \eta^i \otimes a_i \in \Omega^k(U; \mathfrak{g})$ ,  $\kappa = \kappa^i \otimes a_i \in \Omega^\ell(U; \mathfrak{g})$  mit  $a_i$  Basis von  $\mathfrak{g}$ ,  $\eta^i \in \Omega^k(U)$ ,  $\kappa^j \in \Omega^\ell(U)$

$$\eta \wedge \kappa := \frac{1}{2} \eta^i \wedge \kappa^j [a_i, a_j] \tag{IV.4}$$

und  $d\eta := d\eta^i \otimes a_i$  setzen.\*

Dann ist insbesondere für  $\eta \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$

$$d\eta(X, Y) := X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \quad (\text{IV.5})$$

(dabei ist  $\eta(Y) \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$  und  $X(\eta(Y)) = X(\eta^i(Y) \otimes a_i) = X(\eta^i(Y)) \otimes a_i$ ), weil diese Formel schon auf dem Level der Differentialformen richtig ist, vgl. Tabelle B.2, und

$$\begin{aligned} \eta \wedge \eta(X, Y) &= (\eta^i(X)\eta^j(Y) - \eta^j(X)\eta^i(Y))a_i a_j \\ &\stackrel{2.\text{Summe: } i \leftrightarrow j}{=} \eta^i(X)\eta^j(Y)[a_i, a_j] \\ &= [\eta^i(X)a_i, \eta^j(Y)a_j] = [\eta(X), \eta(Y)]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit analogem Beweis wie für (III.5) die Transformationsformel

$$\Omega_\beta = \text{Ad}(\mu_{\beta\alpha}^{-1})\Omega_\alpha.$$

Für Hauptfaserbündel kommen die  $\omega_\alpha$  aber sogar von einer globalen Zusammenhangsform  $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$ . Damit ist

$$\Omega_\alpha = d(s_\alpha^* \omega) + (s_\alpha^* \omega) \wedge (s_\alpha^* \omega) = s_\alpha^*(d\omega + \omega \wedge \omega)$$

(vgl. Tabelle B.2 für die Eigenschaften des Pullbacks) und wir können auch eine globale Krümmungsform  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$  definieren. Dann erhält man ganz analog zur Transformationsformel der lokalen Krümmungsformen, dass für ein  $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$  und eine Zusammenhangsform  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  die Krümmungsform  $\Omega^{\vartheta^* \omega}$  zu  $\vartheta^* \omega$  gleich  $\text{Ad}(g^{-1})\Omega^\omega$  ist, wobei  $g \in \text{Hom}^G(P; G)$  mit  $\vartheta(p) = p \cdot g(p)$  ist.

**Satz IV.2.37.** *Es ist  $\Omega(X, Y) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y))$ . †*

*Beweis.* Es ist  $X = \text{ver}(X) + \text{hor}(X)$  und nach Satz IV.2.30  $\omega(\text{hor}(X)) = 0$ . Für  $\text{ver}(X)(p)$  gibt es für ein  $Z \in \mathfrak{g}$  ein fundamentales Vektorfeld  $\tilde{Z}$  mit  $\text{ver}(X)(p) = \tilde{Z}(p)$ . Wir zeigen, dass  $\Omega(\tilde{Z}, \cdot) = 0$  ist:

Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} d\omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) &\stackrel{(\text{IV.5})}{=} \tilde{Z}(\omega(\tilde{U})) - \tilde{U}(\omega(\tilde{Z})) - \omega([\tilde{Z}, \tilde{U}]) \\ &= \tilde{Z}(U) - \tilde{U}(Z) - [Z, U] = -[Z, U] \\ &= -\omega \wedge \omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{Z}, \tilde{U}) = 0 = \Omega(\tilde{Z}, \tilde{U}). \end{aligned}$$

---

\*Für  $\omega_\alpha \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$  haben wir der Strukturgleichung erst mal Sinn gegeben, in dem wir es erst einmal nur als Kurzschreibweise für die jeweilige Gleichung in den einzelnen Einträgen von  $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$  gegeben haben, vgl. Satz III.2.22. Für  $\eta, \kappa \in \Omega^1(U)$  und damit jedem Eintrag von  $\Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$  ist (IV.4) richtig. Deshalb nehmen wir (IV.4) hier als Definition und man muss noch zusätzlich nachrechnen, dass es unabhängig der Basiswahl von  $\mathfrak{g}$  ist.

† Oft wird so die Krümmung auf Hauptfaserbündel ad-hoc definiert und daraus die Strukturgleichung abgeleitet.

#### IV. Hauptfaserbündel

Hier haben wir verwendet, dass  $U \in \mathfrak{g}$  als Funktion  $M \rightarrow \mathfrak{g}$  konstant und deshalb  $\widetilde{Z}(U) = 0$  gilt. Außerdem haben wir für die vorletzte Zeile verwendet, dass  $[\widetilde{Z}, \widetilde{U}] = [\widetilde{Z}, U]$  gilt – das folgt aus  $\widetilde{Z} = (\Psi_p)_*(Z)$ , vgl. Lemma IV.2.28.ii, und das  $(\Psi_p)_*$  mit der Lieklammer kommutiert.

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} d\omega(\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)) &\stackrel{\text{(IV.5)}}{=} \widetilde{Z}(\omega(\text{hor}(Y))) - \text{hor}(Y)\omega(\widetilde{Z}) - \omega([\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &= -\text{hor}(Y)(Z) - \omega([\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)) = 0 = \Omega(\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)) \end{aligned}$$

Für die Gleichheit (\*) haben wir benutzt, dass  $[\widetilde{Z}, \text{hor}(Y)]$  wieder ein horizontales Vektorfeld ist, vgl. ÜA 25.ii.  $\square$

**Definition IV.2.38.** Sei  $P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel mit gegebenen Zusammenhang. Wir definieren  $D: \Omega^k(P; \mathfrak{g}) \mapsto \Omega^{k+1}(P; \mathfrak{g})$  durch  $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\eta(\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{k+1}))$ , wobei  $d\eta$  wie in (IV.5) auch mittels der Formel für reellwertige Differentialformen aus Tabelle B.2 definiert ist.

In dieser Notation ist z.B.  $\Omega = D\omega$ .

**Lemma IV.2.39.** (*Bianchi-Identität*)  $D\Omega = 0$

*Beweis.* Folgt aus der Definition von  $D$ , der Ableitung der Strukturgleichung und  $\omega(\text{hor}(X)) = 0$ .  $\square$

Auch für die Krümmung für Vektorbündel und dem  $D$  aus Definition III.2.20 gilt  $DF = 0$ .

**Definition IV.2.40.** Sei ein Zusammenhang  $\omega$  auf dem  $G$ -Hauptfaserbündel  $P \rightarrow M$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$  die Menge der *horizontalen  $k$ -Formen auf  $P$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$* . Dies sei die Menge aller  $\eta \in \Omega^k(P; \mathfrak{g})$  für die gilt:

- (i) Für  $p \in P$ ,  $X_i \in T_p P$  und mindestens ein  $X_i \in T_p P_{\pi(p)}$  gilt  $\eta_p(X_1, \dots, X_k) = 0$ .
- (ii)  $R_g^* \eta = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta$ .

**Beispiel IV.2.41.**  $\omega \notin \Omega_{\text{hor}}^1(P; \mathfrak{g})$ , da zwar (ii) aber nicht (i) erfüllt ist. Aber es ist  $\Omega \in \Omega_{\text{hor}}^2(P; \mathfrak{g})$ : (i) ist erfüllt nach Satz IV.2.37. (ii) folgt mit den Rechnungen aus folgendem Satz.

**Satz IV.2.42.** Die Einschränkung des Differentials  $D$  aus Definition IV.2.38 ergibt die Abbildung

$$D: \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$$

und für  $\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$  gilt

$$D\eta = d\eta + \text{ad}(\omega) \wedge \eta, \tag{IV.6}$$

wobei  $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i+1} \text{ad}(\omega(X_i)) \eta(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1})$  ist.

Hier ist  $\text{ad}$  die adjungierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$ , siehe Lemma A.1.19. Insbesondere liefert (IV.6) eine explizitere Formel für  $D\Omega$  auf horizontalen Formen.

*Beweis.* Als erstes wollen wir nachrechnen, dass  $D(\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})) \in \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$  gilt. Die Bedingung (i) aus der Definition von  $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$  ist direkt nach Konstruktion erfüllt. Es bleibt (ii) zu zeigen: Es gilt  $d_p R_g(\tilde{X}(p)) = \text{Ad}(g^{-1})X(p \cdot g)$ , vgl. ÜA 26.i. D.h. insbesondere, dass  $dR_g$  eines vertikalen Vektors wieder ein vertikaler Vektor ist. Zusammen mit  $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$  ergibt sich  $\text{hor } dR_g(X) = dR_g(\text{hor } X)$  und damit

$$\begin{aligned}
 (R_g^* D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= D\eta(dR_g(X_1), \dots, dR_g(X_{k+1})) \\
 &= d\eta(\text{hor } dR_g(X_1), \dots, \text{hor } dR_g(X_{k+1})) \\
 &= d\eta(dR_g(\text{hor } X_1), \dots, dR_g(\text{hor } X_{k+1})) \\
 &= (R_g^* d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
 &= d(R_g^* \eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
 &= (d(\text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta))(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
 &= ((\text{Ad}(g^{-1}) \circ d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1})) \\
 &= (\text{Ad}(g^{-1}) \circ D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}).
 \end{aligned}$$

Es bleibt noch (IV.6) nachzurechnen: Wegen Linearität reicht es sich auf den Fall zu beschränken, wo die  $X_i$  horizontal oder vertikal sind. Sind alle  $X_i$  horizontal, dann ist  $D\eta = d\eta$  nach Definition IV.2.38 und  $\omega(X_i) = 0$ . Also gilt in diesem Fall (IV.6).

Sind mindestens zwei der  $X_i$  vertikal, dann ist  $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$  da  $\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$  und  $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$  nach Definition von  $D$ . In diesem Fall müssen wir also noch nachrechnen, dass auch  $d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$  ist: Nach Tabelle B.1 gilt:

$$\begin{aligned}
 d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) &= (-1)^i X_i(\underbrace{\eta(\cdot, \check{X}_i, \cdot)}_{=0 \text{ da min ein Vektor vertikal}}) + \sum_{i < \ell} (-1)^{i+\ell} \eta([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_{k+1}).
 \end{aligned}$$

Auch in der zweiten Summe ist immer mindestens ein Vektor vertikal, da die Lieklammer zweier vertikaler Vektoren wieder einen vertikalen Vektor liefert, und damit ist in diesem Falle  $d\eta = 0$ .

Der verbleibende Fall ist nun, dass genau eines der  $X_i$  vertikal ist und alle anderen horizontal sind. O.B.d.A. sei  $X_1 = \tilde{Y}$  vertikal. Dann sind  $X_i = Z_i^*$  horizontale Lifte von  $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$  für  $i > 1$ . Dann ist wieder  $D\eta = 0$  und wir haben

$$\text{ad}(\omega) \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+1}) := \text{ad}(\omega(X_1))\eta(X_2, \dots, X_{k+1})$$

#### IV. Hauptfaserbündel

sowie

$$\begin{aligned}
 (d_p \eta)(X_1(p), \dots, X_{k+1}(p)) &= \tilde{Y}(\eta(Z_2^*, \dots, Z_{k+1}^*))(p) \\
 &\quad + (-1)^{\ell+1} \eta(\underbrace{[\tilde{Y}, Z_\ell^*]}_{=0 \text{ vgl. ÜA 25.ii}}, Z_2^*, \dots, Z_\ell^*, \dots, Z_{k+1}^*)(p) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(Z_2^*(p \cdot \exp(tY)), \dots, Z_{k+1}^*(p \cdot \exp(tY))) \\
 \text{rechtsinv. der horiz. Vek.} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(d_p R_{\exp(tY)}(Z_2^*(p)), \dots, d_p R_{\exp(tY)}(Z_{k+1}^*(p))) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (R_{\exp(tY)}^* \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Ad}(\exp(-tY)) \circ \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\
 &= \underbrace{\text{Ad}_*(-Y)}_{=-\text{ad}(Y)} \eta_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)). \quad \square
 \end{aligned}$$

### IV.3. Klassische Yang-Mills-Theorie

#### Woche 13 IV.3.1. Klassische Elektrodynamik

Wir fangen bei der klassischen Elektrodynamik an. Die Maxwell-Gleichungen sind die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik. Sie beschreiben die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf elektrische Ladungen und die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld  $E$  und dem Magnetfeld  $B$ . Das elektrische Feld  $E$ , das Magnetfeld  $B$  ist definiert auf einem (nicht notwendigerweise beschränktem) Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Beide Größen sind zeitabhängig, d.h.  $E: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $B: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Weiterhin wird die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige Dichtefunktion  $\rho: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Stromverteilung durch den zeitabhängigen Stromdichtevektor  $j: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben.  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit. Es gelten die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \text{div} B &= 0 \\
 \text{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j & \text{div} E &= 4\pi \rho.
 \end{aligned}$$

Wir fassen nun die  $B$ - und  $E$ -Felder in der Matrix

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ 0 & 0 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zusammen und setzen  $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ . Dann lassen sich die Maxwellgleichungen

chungen umschreiben zu (wir haben einfach  $4\pi = c = 1$  gesetzt).

$$\begin{aligned} dF &= 0 \quad (\text{das sind die beiden oberen Maxwellgleichungen}) \\ *d * F &= \tilde{j} \end{aligned}$$

mit  $\tilde{j} = \rho dt + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$  (Der Hodge-Stern ist hier bzgl. der Minkowskimetrik auf  $\mathbb{R}^4$ ). Schränken wir uns auf den Vakuumfall ein, bleibt noch

$$dF = 0 \quad \delta F := - *d * F = 0.$$

Wir sehen, dass aus der ersten Gleichung lokal (und auf  $\mathbb{R}^4$ ) immer die Existenz eines  $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$  mit  $F = dA$  folgt. Ein solches  $A$  nennt man (*Vektor-)*Potential. Schreibt man auch die zweite Gleichung mit Hilfe des Potentials muss man statt der obigen Maxwellgleichungen nur noch eine Gleichung

$$\delta dA = 0$$

lösen. Diese ist hochgradig unterbestimmt – löst  $A$  die Gleichung, dann auch  $A + d\phi$ , für ein  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Das nennt man *Eichfreiheit*. Will man diese Gleichung lösen, führt man zumeist eine zweite Gleichung ein, die diese Unterbestimmtheit aufhebt. Das nennt man *Eichfixierung*. Sehr beliebt im Kontext der Elektrodynamik ist die *Lorenz-Eichung*  $\delta A = 0$ , dann ist  $\delta dA = \underbrace{(\delta d + d\delta)}_{=:\square} A = 0^*$  und man hat eine 'schöne' hyperbolische

Gleichung (Wellengleichung). Man muss sich bei einer Eichfixierung immer überlegen, dass man dadurch keine Lösung verliert. Normalerweise überlegt man sich das, in dem man zeigt, dass man aus einer beliebigen Lösung so umeichen kann (hier addieren eines  $d\phi$ ), dass die resultierende Lösung die Eichfixierung erfüllt. †

Wir möchte eine Lösung der Maxwellgleichungen also  $F \in \Omega^2(U, \mathbb{R})$  bzw.  $A \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$  als Krümmung bzw. Zusammenhang eines geeigneten  $G$ -Hauptfaserbündels  $P \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$  interpretieren. Lokale Zusammenhangsformen sind Elemente aus  $\Omega^1(U, \mathfrak{g})$ . Wir wollen  $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$  (das  $i$  ist nicht so wichtig), also  $\omega_\alpha = iA$  als Lösung. Dann ist da  $i\mathbb{R}$  abelsch ist,  $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = 0$  und damit die lokale Krümmungsform gegeben durch  $\Omega_\alpha = idA \in \Omega^2(U, i\mathbb{R})$ . Bzgl. eines anderen lokalen Schnittes  $\phi_\beta: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  führt, da  $i\mathbb{R}$  abelsch ist, zur gleichen lokalen Krümmungsform  $\Omega_\beta = \Omega_\alpha$  und zur lokalen Zusammenhangsform  $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = iA + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}$ . D.h. die Eichfreiheit von oben entspricht hier der unterschiedlichen Wahl lokaler Trivialisierung des Bündels. Die Maxwellgleichungen sind nun geschrieben für die Krümmung des Hauptfaserbündels nun

$$d\Omega = 0 \quad \text{und} \quad *d * \Omega = 0.$$

Die erste Gleichung ist wegen der Bianchi-Identität automatisch erfüllt. Die zweite Gleichung kann auch als Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) der folgenden

\*Der d'Alembert  $\square$  ist einfach die Notation für den Laplaceoperator auf dem Minkowskiraum (oder allgemeiner auf Lorentzmannigfaltigkeiten).

†Es gibt auch andere Eichungen (=Eichfixierung), z.B. *Coloumb-Eichung*  $\text{div} \vec{A} = 0$ , wenn man  $A$  als Vektorfeld  $(A_0, \vec{A})$  auffasst, *axiale Eichung*  $g(X, A) = 0$  für einen fixierten Vektor  $X \in \mathbb{R}^4, \dots$

#### IV. Hauptfaserbündel

Wirkung gesehen werden:

$$S(F) := \int_U F \wedge *F,$$

wobei  $F \wedge *F \in \Omega^4(U, i\mathbb{R})$  wie in (IV.4) verstanden wird.

Wir haben jetzt klassische Elektrodynamik als Gleichung an die Krümmung eines  $G$ -Hauptfaserbündels über  $U \subset \mathbb{R}^4$  mit  $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$  interpretiert. Was genau  $G$  am besten sollte, sieht man an der klassischen Theorie nicht.  $G = \mathbb{R}$  oder  $G = S^1$  sind beides auf dem klassischen Niveau ununterscheidbar. Erst auf dem Niveau der Quantentheorie (die Theorie hier ist ein klassischer Limes der Quantenelektrodynamik) sieht man, dass  $G = S^1$  die gute Wahl ist, da die Quantentheorie eine  $U(1)$ -Symmetrie hat\*.

Über zusammenziehbare Gebiete  $U \subset \mathbb{R}^4$  sind die Hauptfaserbündel sowieso immer trivial. Aber man kann die obigen Gleichungen z.B. auf für Bündel über  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  betrachten und erhält als Lösung Dirac-Monopole, vgl. Übungsaufgabe 32.

Wo war hier die Eichfixierung? Die kam noch nicht vor. Die Gleichung  $*d*d\Omega = 0$  ist genauso unterbestimmt wie ohne Bündelinterpretation. Eine Eichfixierung wäre auch hier eine zusätzliche Gleichung an  $\Omega$ , entsprechen Änderung des Schnittes und damit auch einer Umeichung - deshalb werden auf der Ebene des Hauptfaserbündels vertikale Automorphismen Eichtransformationen genannt. Mit der obigen Transformationsformel haben wir lokal  $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = i(A + d\phi)$  mit  $\mu_{\beta\alpha} = e^{i\phi}$ .

#### IV.3.2. Klassische Yang-Mills Theorie

Wir betrachten im Folgenden klassische Yang-Mills Theorie nur als ad-hoc Verallgemeinerung der klassischen Elektrodynamik. Das ist dahingehend unvollständig, dass die zugehörige Quantentheorie (= Standardmodell (Elektrodynamik  $G = U(1)$  und schwache  $G = SU(2)$  sowie starke Wechselwirkung  $G = SU(3)$  und ihr Zusammenwirken) eine sehr erfolgreiche (und interessante) physikalische Theorie ist.† Allerdings ist völlig unklar, wie oder ob überhaupt diese Theorie einen klassischen Limes besitzt und selbst wenn, ob dieser die klassische Yang-Mills Theorie ist. Das blenden wir hier aber mal leider aus.

Sei  $P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel. Wir betrachten nur einfache kompakte Matrixgruppen  $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{K})$  – die wichtigsten Fälle sind  $SU(2)$  und  $SU(3)$ .

Wir betrachten die folgende Wirkung auf dem Zusammenhang  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  auf  $P$  ( $\Omega$  die zugehörige Krümmungsform)

$$S(\Omega) := \int_M \text{Tr}(\Omega \wedge *\Omega)$$

Hier ist  $\Omega \wedge *\Omega \in \Omega^m(U, \mathfrak{g})$  und  $\text{Tr}: \Omega^m(U, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^m(U)$  ist die Spur auf dem Liealgebrenteil  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . Da  $G$  kompakt und einfach ist, entspricht das der Killingform, vgl. Abschnitt A.1.4. Insbesondere muss man sich überlegen, dass  $\text{Tr}(\Omega \wedge *\Omega)$  unabhängig der gewählten lokalen Trivialisierung ist.

\*Damit das im klassischen Limes erhalten bleibt, geht noch die (experimentell bestätigte) Annahme ein, dass die Quantentheorie geeignet ans elektromagnetische Feld koppelt.

†... wenn auch mathematisch noch nicht wirklich vollständig verstanden, vgl. auch [https://en.wikipedia.org/wiki/Yang-Mills\\_existence\\_and\\_mass\\_gap](https://en.wikipedia.org/wiki/Yang-Mills_existence_and_mass_gap)

Berechnet man hier die Bewegungsgleichung erhält man

$$D * \Omega = 0$$

(Da die Elektrodynamik abelsch ist, ist dort  $D * \Omega = d * \Omega$ .)

Existenz von Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen ist ein schweres analytisches Problem. Wir werden aber sehen, dass es in algebraischen Spezialfällen einfacher ist eine Lösung zu finden:

### IV.3.2.1. (Anti-)Selbstduale Lösungen

Sei  $(M, g)$  eine orientierte 4-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel mit Zusammenhang  $\omega$  und Krümmung  $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$ .

Falls  $*\Omega = \pm\Omega$  gilt, dann ist wegen der Bianchi-Identität  $D\Omega = 0$  die Yang-Mills-Gleichung  $D * \Omega = 0$  automatisch erfüllt. Das wäre eine einfache Möglichkeit an Lösungen zu kommen. Gilt  $*\alpha = \pm\alpha$  für ein  $\alpha \in \Omega^2(M)$ , nennt man  $\alpha$  *selbstdual* (für +) und *antiselbstdual* (für -). Die Menge aller (anti-)selbstdualen 2-Formen bezeichnen wir mit  $\Omega_{\pm}^2(M)$ .

**Lemma IV.3.1.**  $\Omega_{\pm}^2(M)$  sind jeweils der Raum der Schnitte eines Untervektorbündel  $\Lambda_{\pm}^2(M)$  von  $\Lambda^2(M)$  und es gilt  $\Lambda^2(M) = \Lambda_{+}^2(M) \oplus \Lambda_{-}^2(M)$ .

*Beweisskizze.* Da  $*$  ein punktweiser Operator, ist  $\Lambda_{\pm}^2(M)|_{x \in M} = \{\beta \in \Lambda^2(M)|_{x \in M} \mid *\beta = \pm\beta\}$ . Damit sind  $\Lambda_{\pm}^2(M)$  Untervektorbündel von  $\Lambda^2(M)$  vom Rang 3: Ist  $(s_1, \dots, s_4)$  ein positiv orientierte Orthonormalbasis von  $(T_x M, g_x)$  und  $\sigma^i$  die zugehörige duale Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} e_{\pm}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \pm \sigma^3 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^3 \mp \sigma^2 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^4 \pm \sigma^2 \wedge \sigma^3) \end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis von  $\Lambda_{\pm}^2(M)|_x$ . □

**Beispiel IV.3.2** (BPST\*-Instantonen = Selbstduale  $SU(2)$ -Zusammenhänge auf  $\mathbb{R}^4$ ). Da  $\mathbb{R}^4$  zusammenziehbar ist, ist jedes  $SU(2)$ -Hauptfaserbündel  $P$  über  $\mathbb{R}^4$  trivial. Wir identifizieren  $\mathbb{R}^4$  mit  $\mathbb{H}$ , den Quaternionen, und  $SU(2)$  mit der symplektischen Gruppe  $Sp(1) := \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$  durch

$$\iota: x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in Sp(1) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \\ x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

Die Liealgebra von  $Sp(1)$  ist  $\mathfrak{sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = 0\}$  mit  $[q_1, q_2] = q_1 q_2 - q_2 q_1 = 2\operatorname{Im}(q_1 q_2)$ . Wir kürzen ab:  $dx := dx^1 + idx^2 + jdx^3 + kdx^4$  und  $d\bar{x} := dx^1 - idx^2 - jdx^3 - kdx^4$ .

---

\*benannt nach A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwarz und Y. Tyupkin

#### IV. Hauptfaserbündel

Sei  $P = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$  das triviale  $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ . Wir betrachten lokale Zusammenhangsformen  $A$  (und lokale Krümmungsformen  $F$ ) im folgenden immer bzgl. der kanonischen Trivialisierung von  $P$  – also ist  $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2))$ . Man kann nachrechnen, dass

$$A_{x \in \mathbb{H}} := \text{Im} \left( \frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right)$$

ein selbstdualer Zusammenhang (d.h.  $*F = F$  für die zugehörige Krümmungsform), vgl. Übungsaufgabe 33.

Für  $\mu \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{H}$ , kann man weitere selbstduale Zusammenhänge

$$(A_{\mu,b})_x := \text{Im} \left( \frac{\mu^2(x-b) \cdot d\bar{x}}{1 + \mu^2|x-b|^2} \right)$$

finden. Das diese wirklich selbstduale Zusammenhänge, rechnet man am leichtesten nach, in dem man  $A_{\mu,b} = \Phi_{\mu,b}^* A$  mit dem Diffeomorphismus  $\Phi_{\mu,b}(y) = \mu(y-b)$  betrachtet. Man kann sich nun fragen, ob für verschiedene  $(\mu, b)$  die lokalen Zusammenhangsformen  $A_{\mu,b}$  nicht in Wirklichkeit zum gleichen Zusammenhang auf  $P$  gehören. Das ist nicht so, vgl. Übungsaufgabe 33.

**Beispiel IV.3.3** ( Das quaternionische Hopfbündel). (Das ist in Wirklichkeit nur die konforme Kompaktifizierung des letzten Beispiels) Wir betrachten  $S^7 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ ,  $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  und

$$\pi: S^7 \rightarrow S^4, \quad (z_1, z_2) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1} z_2 & \text{falls } z_1 \neq 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man kann zeigen, dass  $\pi: S^7 \rightarrow S^4$  mit der  $SU(2) \cong Sp(1)$ -Wirkung  $(z_1, z_2) \cdot q := (\bar{q}z_1, \bar{q}z_2)$  ein  $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über  $S^4$  ist und  $A_{(z_1, z_2)} := \text{Im}(z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2)$  einen selbst-dualen Zusammenhang auf diesem Bündel definiert.

### IV.4. Dirac-Operatoren

In Beispiel III.1.1 haben wir den Diracoperator auf dem Minkowskiraum, wie er von Dirac in 1928\* zur Beschreibung von Elektronen gefunden wurde, kennengelernt. Nun wollen wir die Verallgemeinerung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten kennenlernen.

Dazu sei  $(M^m, g)$  eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $SO(M)$  das zugehörige  $SO(m)$ -Hauptfaserbündel der orientierten Orthonormalbasen. Nehmen wir an  $M$  sei spin, d.h. es gibt einen Lift  $\Phi: \text{Spin}(M) \rightarrow SO(M)$  von  $SO(M)$  bzgl. der zweifachen Überlagerung, vgl. Abschnitt IV.2.3. Nun bilden wir aus dem  $\text{Spin}(m)$ -Hauptfaserbündel  $\text{Spin}(M) \rightarrow M$  und einer Darstellung  $\rho: \text{Spin}(m) \rightarrow \text{End}(\Sigma_m)$ , die

\*Dirac, P. A. M. (1928). "The Quantum Theory of the Electron". Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 117 (778): 610–624, <http://www.math.ucsd.edu/~nwallach/Dirac1928.pdf>

im Prinzip die Cliffordmultiplikation auf einem komplexen Vektorraum  $\Sigma_m$  ist, aber die wir noch genauer definieren werden, das assoziierte Vektorbündel  $S := \text{Spin}(M) \times_\rho \Sigma_m$ . Dieses wird *Spinorbündel* genannt. Der Levi-Civita-Zusammenhang auf  $TM$  induziert einen Zusammenhang  $T_p \text{SO}(M) = Q_p \text{SO}(M) \oplus T_p(\text{SO}(M))_{\pi(p)}$  auf  $\text{SO}(M)$  wie in Abschnitt IV.2.4.1. Mittels  $Q_r \text{Spin}(M) = (d_r \Phi)^{-1} Q_{\Phi(r)} \text{SO}(M)$  erhalten wir so einen Zusammenhang auf  $\text{Spin}(M)$  – das ist eine allgemeine Konstruktion mit der man aus jeder  $\lambda$ -Transformation  $(\tilde{P}, f)$  eines  $G$ -Hauptfaserbündels  $P$ , wie in Definition IV.2.21, einen Zusammenhang auf  $\tilde{P}$  erhält:

**Lemma IV.4.1.** *Sei  $Q \in \text{Gr}_m(TP)$  ein Zusammenhang auf  $P$  und  $(Q, f)$  eine  $\lambda$ -Transformation von  $P$ . Dann ist  $Q_r \tilde{P} := (d_r f)^{-1} Q_{f(r)} P$  ein Zusammenhang auf  $\tilde{P}$ .*

*Beweis.* Wegen  $\pi_P \circ f = \pi_{\tilde{P}}$  gilt  $T_r(\tilde{P}_{\pi_{\tilde{P}}(r)}) = (d_r f)^{-1} T_{f(r)}(P_{\pi_P(f(r))})$  und damit  $T_r \tilde{P} = Q_r \tilde{P} \oplus T_r(\tilde{P}_{\pi_{\tilde{P}}(r)})$ . Es bleibt noch die Kompatibilität mit der Rechtswirkung zu überprüfen:

$$\begin{aligned} d_r R_h(Q_r \tilde{P}) &= d_r R_h((d_r f)^{-1} Q_{f(r)} P)^{f \circ R_h = R_{\lambda(h)} \circ f} (d_{r \cdot h} f)^{-1} d_{f(r)} R_{\lambda(h)} Q_{f(r)} P \\ &= (d_{r \cdot h} f)^{-1} Q_{f(r) \cdot \lambda(h)} P = Q_{r \cdot h} \tilde{P} \quad \square \end{aligned}$$

Wir haben also nun einen Zusammenhang auf  $\text{Spin}(M)$ . Wie in Übungsaufgabe 30/Bemerkung IV.2.36 erhält man dann einen induzierten Zusammenhang auf dem assoziierten Bündel – dem Spinorbündel.

Man kann nachrechnen, dass  $S$  mit diesem Zusammenhang der Cliffordmultiplikation und der induzierten Bündelmetrik ein Diracbündel wie in Definition III.4.27 und damit ist  $D = \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i}^S$  ein Dirac-artiger Operator – der *klassische Diracoperator einer Riemannschen spin Mannigfaltigkeit*.

Es fehlt noch die Darstellung  $\rho: \text{Spin}(m) \rightarrow \text{End}(\Sigma_m)$ :

**Bemerkung IV.4.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum mit einer nicht-entarteten Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Die Cliffordmultiplikation  $\text{cl}: V \rightarrow \text{End}(W)$  (also  $\text{cl}(v)\text{cl}(v) = -\langle v, v \rangle \text{Id}$ ) kann auch hintereinander ausgeführt werden, d.h. Sie erweitert sich auf

$$\text{cl}: \bigotimes V = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots \rightarrow \text{End}(W)$$

und es gilt  $\text{cl}(v \otimes w + w \otimes v + 2\langle v, w \rangle \text{Id}) = 0$ . Damit verschwindet  $\text{cl}$  auch auf dem Ideal  $\mathcal{I}$ , welches von dieser Relation erzeugt wird. Den Quotienten

$$C(V) := \text{Cl}(V, q) := \bigoplus_k V^{\otimes k} / \mathcal{I}$$

nennt man Cliffordalgebra von  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (Die Algebrastruktur wird von der Tensoralgebra  $\bigotimes V$  geerbt). Also kann die Cliffordmultiplikation auch als Abbildung  $\text{cl}: C(V) \rightarrow \text{End}(W)$  betrachtet werden. Des Weiteren ist  $[[a], [b]] := [a \otimes b - b \otimes a]$  für  $a, b \in \bigoplus_k V^{\otimes k}$  (also  $[a], [b] \in C(V)$ ) in  $C(V)$  abgeschlossen und man kann nachrechnen, dass die Jacobiidentität gilt – wir haben also eine Lieklammer auf  $C(V)$ . Wir

IV. Hauptfaserbündel

schreiben für Elemente in  $C(V)$  in Zukunft '⊗' nicht mehr mit.  $C(V)$  besitzt einen anti-Automorphismus  $a = e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto a^t = e_{i_k} \dots e_{i_1}$  für eine Orthonormalbasis von  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $(ab)^t = b^t a^t$ .

**Beispiel IV.4.3.**  $[Cl(n) := Cl(\mathbb{R}^n, g_{eucl})]$  Man kann nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} Cl(2k) &= \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \Sigma_{2k}) \\ Cl(2k+1) &= \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \Sigma_{2k+1}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \hat{\Sigma}_{2k+1}) \end{aligned}$$

mit folgender Cliffordmultiplikation: Auf  $\Sigma_1 = \mathbb{C}$  sei  $cl(e_1)\phi := -i\phi$  und auf  $\hat{\Sigma}_1 = \mathbb{C}$  sei  $\hat{cl}(e_1)\phi := i\phi$ . Der Rest wird induktiv definiert:

- (i) Sei  $n$  gerade: Wir setzen  $\Sigma_{n+1} := \hat{\Sigma}_{n+1} := \Sigma_n$ . Für  $k = 1, \dots, n$  definieren wir  $cl(e_k)|_{\Sigma_{n+1}} := cl(e_k)|_{\Sigma_n}$  und  $cl(e_k)|_{\hat{\Sigma}_{n+1}} = -cl(e_k)|_{\Sigma_n}$ . Weiterhin sei  $cl(e_{n+1})|_{\Sigma_{n+1}}\sigma := i\sigma$  und  $cl(e_{n+1})|_{\hat{\Sigma}_{n+1}}\sigma := -i\sigma$ .
- (ii) Sei  $n$  ungerade: Wir setzen  $\Sigma_{n+1} := \Sigma_n \oplus \hat{\Sigma}_n$  mit der Cliffordmultiplikation

$$\begin{aligned} cl(e_k)(\sigma_1, \sigma_2) &:= (cl(e_k)\sigma_1, \hat{cl}(e_k)\sigma_2) \quad k = 1, \dots, n \\ cl(e_{n+1})(\sigma_1, \sigma_2) &:= (-\sigma_2, \sigma_1) \end{aligned}$$

Mit diesen Cliffordmultiplikationen sind die Gleichheiten am Anfang Algebrenisomorphismen.

**Bemerkung IV.4.4** (Konstruktion der Spin-Gruppe). \*

- (i) Ist  $e_i$  eine Orthonormalbasis von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ , d.h.  $q(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij}$  ( $q$  muss also nicht entartet sein, aber nicht unbedingt positiv definit). Dann ist die durch

$$\mathfrak{c}: e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^\ell V := \bigoplus_{\ell \geq 0} \Lambda^\ell V \mapsto cl(e_{i_1}) \dots cl(e_{i_k}) \in C(V)$$

erzeugte lineare Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Man beachte, dass  $\mathfrak{c}$  kein Algebrenisomorphismus ist, da  $0 = \mathfrak{c}(0 = e_1 \wedge e_1) \neq \mathfrak{c}(e_1)\mathfrak{c}(e_1) = -1$  ist.

$\mathfrak{spin}(V) := \mathfrak{c}(\Lambda^2 V) \subset C(V)$  ist unter der Lieklammer von  $C(V)$  ebenfalls abgeschlossen und damit eine Lieunteralgebra von  $C(V)$ .

- (ii) Die Abbildung  $\tau: a \in \Lambda^2(V) \mapsto (v \mapsto [a, v] := \mathfrak{c}(a)cl(v) - cl(v)\mathfrak{c}(a)) \in \text{Hom}(V, C(V))$  ist ein Isomorphismus aufs Bild  $\mathfrak{o}(V) \subset \text{Hom}(V, V) \subset \text{Hom}(V, C(V))$ .
- (iii) Definition der Spingruppe zu  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ :  $\text{Spin}(V) := \exp \mathfrak{spin}(V)$ .
- (iv) Mit  $\tau(a)v = [a, v]$  kann man nachrechnen, dass

$$\underbrace{(\exp \tau(\mathfrak{c}(b)))}_{\in SO(V)} v = (\exp b)v(\exp_C b)^{-1}$$

für  $b \in \Lambda^2 V$  gilt. Damit wird

---

\*Wir verzichten hier auf die Beweise, insbesondere (i)-(iv) kann man direkt elementar nachrechnen.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{spin}(V) & \xrightarrow{\tau \circ \mathfrak{c}} & \mathfrak{o}(V) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathrm{Spin}(V) & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \mathrm{SO}(V) \end{array}$$

mit  $\hat{\tau}: \mathrm{Spin}(V) \rightarrow \mathrm{SO}(V)$ ,  $\hat{\tau}(a)(v) = av a^t$ , kommutativ.

- (v) Für  $\dim V > 1$  ist  $\hat{\tau}$  eine zweifache nichttriviale Überlagerung. Damit ist  $\mathrm{Spin}(V)$  für positiv definite  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kompakt und zusammenhängend (da dann  $\mathrm{SO}(V)$  kompakt und zusammenhängend ist). Für  $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 3$  ist  $\mathrm{Spin}(V)$  einfach zusammenhängend und damit die universelle Überlagerung von  $\mathrm{SO}(V)$ .
- (vi) Ist  $v_i$  eine Orthonormalbasis von  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , gilt  $\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{span}\{v_{i_1} \dots v_{i_{2k}} \mid k \in \mathbb{N}\}$ .
- (vii) Die Einschränkung der Cliffordmultiplikation auf  $\mathrm{Spin}(V)$  ist eine Darstellung von  $\mathrm{Spin}(V)$ . Wir brauchen im Folgenden nur noch  $\rho := \mathrm{cl}: \mathrm{Spin}(k) := \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^k, g_{\mathrm{eucl}}) \rightarrow \mathrm{Cl}(k)$  mit der Darstellung von  $\mathrm{Cl}(k)$  wie in Beispiel IV.4.3.

**Beispiel IV.4.5.** (i)  $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1 \cong U(1)$  mit  $\hat{\tau}: S^1 \cong \mathrm{Spin}(2) \rightarrow S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ ,  $z \mapsto z^2$

(ii)  $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ , vgl. Beispiel IV.2.23.

(iii)  $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$

**Lemma IV.4.6.** Für das Spinorbündel von oben gilt

$$R^S(X, Y)s = -\frac{1}{4} \sum_k \mathrm{cl}(R(X, Y)e_k) \mathrm{cl}(e_k)s$$

für einen lokalen Orthonormalrahmen  $e_i$  und  $R$  der Krümmungstensor von  $(M, g)$ . Insbesondere ist  $R^S s = \frac{1}{4} \mathrm{scal}_g s$ . Die Weitzenböckformel für den klassischen Diracoperator ist also

$$D^2 = \Delta^S + \frac{1}{4} \mathrm{scal}_g$$

und wird Schrödinger-Lichnerowicz-Formel genannt.

**Folgerung IV.4.7.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene Riemannsche spin Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung. Dann hat der klassische Diracoperator keinen Kern.

*Beweis.* Sei  $s \in \ker D$ . Dann ist  $0 = D^2 s = \Delta s + \frac{1}{4} \mathrm{scal}_g s$ , also

$$0 = \int_M |\nabla s|^2 \mathrm{dvol}_g + \int_M \frac{1}{4} \mathrm{scal}_g |s|^2 \mathrm{dvol}_g \geq 0$$

und es folgt  $s = 0$ . □

#### IV. Hauptfaserbündel

**Beispiel IV.4.8** (Spinorbündel und Diracoperator auf  $S^2$ ). \* Wir betrachten die Sphäre  $S^2$  mit der Standardmetrik und sphärischen Koordinaten, also  $g = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ .

(i)  $S^2$  hat eine eindeutige Spinstruktur - das  $Spin(2)$ -Hauptfaserbündel über  $S^2$  ist das Hopfbündel.

(ii) Spinorbündel:  $S := Spin(S^2) \times_{\rho} \Sigma_2$

Es rechnet nach, dass  $\Sigma_2 = \mathbb{C}^2$  mit  $\rho(z) = \text{diag}(\bar{z}, z)$  ist. Um  $S$  zu bestimmen, rechnet man die Übergangsfunktionen nach (Clutchingfunktionen wie in Übungsaufgabe 8) und erhält dann, dass  $S$  ein triviales Bündel ist. Deshalb kann man einen Spinor auf  $S^2$  einfach als Funktion  $\phi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  verstehen.

(iii) Man kann direkt nachrechnen, dass

$$D = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{r} \partial_{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\cot \theta}{r} \right) - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} \right)$$

ist.

Man sieht, dass im Gegensatz zum Laplace auf Funktionen, ein konstanter Spinor auf  $S^2$  nicht im Kern des Diracoperators der Sphäre ist, was konsistent mit der letzten Folgerung ist.

---

\*Details in <https://juanitorduz.github.io/the-dirac-operator-on-the-2-sphere/>

# A. Liegruppen und Wirkungen

## A.1. Liegruppen

**Definition A.1.1.** Eine Gruppe  $G$  heißt *Liegruppe*, falls  $G$  eine glatte Mannigfaltigkeit ist, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatt sind.

**Beispiel A.1.2.** Beispiele für Liegruppen.

- (i)  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\} \subset M_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  und  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  mit der Addition als Gruppenoperation
- (iii)  $O(n)$  [2, Beispiel I.1.6.v],  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ .
- (iv) Sind  $G$  und  $H$  Liegruppen, dann auch  $G \times H$ , wobei die Gruppenstruktur durch  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2)$  gegeben ist.
- (v) Es gibt auch Liegruppen die keine Matrixgruppen sind, z.B. ein Quotient der Heisenberg-Gruppe durch eine gewisse normale Untergruppe\* und die metaplektische Gruppe†. Da konkret bei uns nur reelle oder komplexe Matrixgruppen auftreten werden, reicht es bei einer Liegruppe immer an eine Untergruppe von  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$  bzw.  $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C})$  zu denken.

**Lemma A.1.3.** Sei  $G$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, so dass  $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$  glatt ist. Dann ist  $G$  eine Liegruppe.

**Definition A.1.4.** Ein glatte Abbildung zwischen Liegruppen, die gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist, nennen wir einen *Liegruppenhomomorphismus*. Ist ein bijektive Abbildung und sein Inverses jeweils ein Liegruppenhomomorphismus, dann nennen wir diesen *Liegruppenisomorphismus*.

---

\*Die Gruppe  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$  ist eine dreidimensionale Liegruppe, die keine Matrixgruppe ist.

†[https://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic_group)

### A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren

Sei  $G$  eine Liegruppe. Für  $h \in G$  sei  $R_h: G \rightarrow G, g \mapsto gh$  bzw.  $L_h: G \rightarrow G, g \mapsto hg$ . Dann ist  $d_g R_h: T_g G \rightarrow T_{gh} G$  bzw.  $d_g L_h: T_g G \rightarrow T_{hg} G$  ein Vektorraumisomorphismus. Wir beschränken uns im Folgenden zumeist auf die Linkswirkungen  $L_h$ .

**Lemma A.1.5.** Sei  $v \in T_1 G$ . Dann definiert  $X_v(h) = d_1 L_h(v)$  ein glattes Vektorfeld auf  $G$ .

*Beweis.* Es ist  $X_v: G \rightarrow TG$  mit  $X_v(h) \in T_h G$ . Um zu zeigen, dass  $X_v$  glatt ist, reicht es zu zeigen, dass  $X_v(f) \in C^\infty(G)$  für alle  $f \in C^\infty(G)$  ist, vgl. [3, ÜA 15]: Es gilt

$$X_v(f)(h) = d_h f(X_v(h)) = d_h f(d_1 L_h(v)) = d_1(f \circ L_h)(v) = \tilde{V}(f \circ L_h),$$

wobei  $\tilde{V}$  ein glattes Vektorfeld auf  $G$  mit  $\tilde{V}(1) = v$  ist.  $\square$

**Definition A.1.6.** Ein glattes Vektorfeld  $X$  auf  $G$  heißt *linksinvariant* falls  $(L_h)_* X = X$  für alle  $h \in G$  gilt, also  $((L_h)_* X)(g) := (d_g L_h)(X(g)) = X(hg)$  für alle  $g, h \in G$ . Die Menge  $\mathfrak{g}$  aller linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  nennen wir *Liealgebra der Liegruppe  $G$* .

**Bemerkung A.1.7.** Die linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  sind genau die Vektorfelder, die wie in Lemma A.1.5 entstehen.  $\mathfrak{g}$  ist ein Vektorraum. Da  $(L_h)_*[X, Y] = [(L_h)_* X, (L_h)_* Y]$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , vgl. Pushforward in Tabelle B.1, gilt, ist die Liealgebra unter der Lieklammer abgeschlossen.

**Folgerung A.1.8.** Die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  einer Liegruppe  $G$  ist als Vektorraum isomorph zum Tangentialraum  $T_1 G$  ans Einselement. Insbesondere gilt  $\dim \mathfrak{g} = \dim T_1 G = \dim G$ .

Wir werden oft diesen Isomorphismus  $T_1 G \cong \mathfrak{g}$  implizit nutzen ohne es dazuzuschreiben.

**Beispiel A.1.9.**

- (i) Es ist  $T_{\text{Id}_n} \text{Gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R}) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Für  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  ist  $X_A(h \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})) = d_{\text{Id}_n} L_h(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_h(\text{Id}_n + tA) - L_h(\text{Id}_n)}{t} = hA$  das zugehörige linksinvariante Vektorfeld. Auch für alle Matrixgruppen  $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$  ist somit das linksinvariante Vektorfeld zu  $A \in T_{\text{Id}_n} G \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  gleich  $X_A|_G$ .

Damit ist auch insbesondere  $[X, Y] = XY - YX$  (als Matrixmultiplikation) für  $X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  – Wir rechnen das in lokalen Koordinaten nach: Es ist  $[X_A, X_B] = (X_A^i \frac{\partial X_B^j}{\partial x^i} - X_B^i \frac{\partial X_A^j}{\partial x^i}) \partial_{x^j}$ . Wir wählen als Koordinaten die einzelnen Einträge  $h_i^j$  der Matrix und haben damit  $X_A = h_i^k A_k^j \partial_{h_i^j}$  sowie

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= (h_i^k A_k^j \frac{\partial (h_r^s B_s^u)}{\partial h_i^j} - h_i^k B_k^j \frac{\partial (h_r^s A_s^u)}{\partial h_i^j}) \partial_{h_r^u} \\ &= (h_i^k A_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} B_s^u - h_i^k B_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} A_s^u) \partial_{h_r^u} \\ &= h_r^k (A_k^s B_s^u - B_k^s A_s^u) \partial_{h_r^u} = h(AB - BA) = X_{AB-BA}. \end{aligned}$$

Ist  $\mathfrak{g}$  abelsch, ist damit insbesondere die Lieklammer die Nullabbildung.

(ii) Man kann weiterhin nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{Sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0\} \\ \mathfrak{o}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{O}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\} \\ \mathfrak{so}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{SO}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T, \text{Tr} A = 0\} = T_{\text{Id}_n} \text{O}(n) = \mathfrak{o}(n) \\ \mathfrak{u}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{U}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A = -\bar{A}^T\} \\ \mathfrak{su}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{SU}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A = -\bar{A}^T, \text{Tr} A = 0\} \end{aligned}$$

**Definition A.1.10.** Sei  $X \in \mathfrak{g}$ . Wir betrachten (vgl. [3, Übungsblatt 12]) die gewöhnliche Differentialgleichung für  $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$

$$\dot{\gamma}_X(t) = X(\gamma_X(t)), \quad \gamma_X(0) = 1. \tag{A.1}$$

Diese hat eine eindeutige Lösung  $\gamma_X$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ . Wir definieren die *Exponentialabbildung* von  $G$  als

Warum  $\mathbb{R}$ ? Lineare DGL +  $X$  linksinvariant

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

**Bemerkung A.1.11.**

- (i) Es gilt  $\frac{d}{dt} \gamma_X(st) = s\dot{\gamma}_X(st) = sX(\gamma_X(st))$  und wegen Eindeutigkeit der Lösung damit  $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$ .
- (ii) Ist  $G \subset GL(n, \mathbb{R})$  eine Untergruppe für ein  $n$  groß genug, dann ist  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Dann liest sich (A.1) für  $A \in \mathfrak{g}$ :  $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$  und damit ist  $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

**Folgerung A.1.12.** Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $0 \in \mathfrak{g}$ , so dass  $\exp|_U$  ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

### A.1.2. Lie-Untergruppen

**Definition A.1.13.** Seien  $G$  und  $H$  Liegruppen und  $\phi: H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus und eine Einbettung. Dann nennen wir  $H$  eine *Lie-Untergruppe* von  $G$ .

**Satz A.1.14.** Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe  $G$ . Dann ist  $H$  eine Lie-Untergruppe von  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{h} := \{X \mid \exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$ , wobei  $\exp$  die Exponentialabbildung von  $G$  ist. Insbesondere ist die Exponentialabbildung von  $H$  die Einschränkung von  $\exp$  auf  $\mathfrak{h}$ .

**Folgerung A.1.15.** Für eine Matrixuntergruppe ist die Exponentialabbildung  $\exp$  damit genau die von  $GL(n, \mathbb{R})$  eingeschränkt auf die Liealgebra der Untergruppe.

### A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen

**Lemma A.1.16.** Sei  $\psi: G_1 \rightarrow G_2$  ein Liegruppensomorphismus. Sei  $\psi_*: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ,  $X \mapsto \psi_*X$ , wobei  $\psi_*X$  das linksinvariante Vektorfeld mit  $\psi_*X(1 \in G_2) = d_1\psi(X(1))$  ist – also  $(\psi_*X)(g) = d_1L_g(d_1\psi(X(1)))$ .\*

(i) Dann ist  $\psi_*$  ein Liealgebren-Homomorphismus, d.h. es ist eine lineare Abbildung, die mit der Lieklammer kommutiert, also  $\psi_*[X, Y] = [\psi_*X, \psi_*Y]$ .

(ii) Dann ist

$$\psi(\exp X) = \exp(\psi_*X)$$

für alle  $X \in \mathfrak{g}_1$ .

*Beweis zu (ii).* Setze  $\gamma(t) := \psi(\exp(tX))$ . Dann ist  $\gamma(0) = \psi(1 \in G_1) = 1 \in G_2$  und nach Definition der Exponentialabbildung reicht es  $\dot{\gamma}(t) = \psi_*X(\gamma(t))$  nachzurechnen:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= d_{\exp(tX)}\psi \left( \frac{d}{dt} \exp(tX) \right) \stackrel{\text{Def. exp}}{=} d_{\exp(tX)}\psi(X(\exp(tX))) \\ &\stackrel{\text{linksinv.}}{=} d_{\exp(tX)}\psi(d_1L_{\exp(tX)}(X(1))) \\ &= d_1(\psi \circ L_{\exp(tX)})(X(1)) \stackrel{\text{Liegr.hom}}{=} d_1(L_{\psi(\exp(tX))} \circ \psi)(X(1)) \\ &= d_1L_{\psi(\exp(tX))}d_1\psi(X(1)) = d_1L_{\psi(\exp(tX))}(\psi_*X(1)) \\ &\stackrel{\text{linksinv.}}{=} \psi_*X(\psi(\exp(tX))) = \psi_*X(\gamma(t)) \quad \square \end{aligned}$$

Für  $a \in G$  betrachten wir die Konjugation

$$h_a: g \in G \mapsto h_a(g) := aga^{-1} \in G.$$

Das ist ein Liegruppenisomorphismus und es gilt  $h_b \circ h_a = h_{ba}$  sowie  $h_a = L_a \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} \circ L_a$ . Nach letztem Lemma ist  $(h_a)_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  linear und bijektiv – also  $(h_a)_* \in \text{Gl}(\mathfrak{g})$ . Insbesondere ist  $(h_b)_* \circ (h_a)_* = (h_{ba})_*$ .

**Definition A.1.17.** Die Abbildung

$$\text{Ad}: a \in G \mapsto (h_a)_* \in \text{Gl}(\mathfrak{g})$$

heißt *adjungierte Darstellung* von  $G$ .

Wegen  $\text{Ad}(a)\text{Ad}(b) = \text{Ad}(ab)$  ist Ad insbesondere eine Gruppendarstellung<sup>†</sup>.

**Beispiel A.1.18.** Nach Beispiel A.1.9.i gilt  $\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$  für  $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ .

\*Beachten Sie: Im Gegensatz zum Pushforward in Tabelle B.1 muss hier  $\psi$  i.A. kein Diffeomorphismus sein. Wenn es ein Diffeomorphismus ist, entspricht es dem Pushforward eingeschränkt auf linksinvariante Vektorfelder.

†Darstellung einer Gruppe = stetige Abbildung  $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$  für einen Vektorraum  $V$  mit  $\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$  für alle  $a, b \in G$ .

**Lemma A.1.19.** *Die Ableitung*

$$\text{ad} := d_1 \text{Ad}: T_1 G \cong \mathfrak{g} \rightarrow T_1 \text{Gl}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

erfüllt  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$  und heißt adjungierte Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .

*Beweis.* Man benutzt die geometrische Interpretation der Lieklammer, vgl. ÜA 31. Für  $G$  ist der Fluss von  $X \in \mathfrak{g}$  durch

$$\Phi_t(g) := \Phi(g, t) = g \cdot \exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = R_{\exp(tX)}g$$

gegeben, denn es gilt  $\Phi(g, 0) = g$  und

$$\dot{\Phi}(g, t) = d_1 L_g(X(\exp(tX))) = X(L_g \exp(tX)) = X(\Phi(g, t)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\Phi_t(1)} \Phi_{-t}(Y(\Phi_t(1))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)}(Y(\exp(tX))) \\ &\stackrel{\text{links.inv}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)} d_1 L_{\exp(tX)}(Y(1)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_1 \text{Ad}(\exp(tX))(Y) = \text{ad}(X)(Y). \quad \square \end{aligned}$$

Da  $\text{Gl}(\mathfrak{g})$  auch einfach nur eine Matrixgruppe ist, ist die Lieklammer wie in Beispiel A.1.9.i gegeben und wir haben mit der Jacobi-Identität, vgl. Tabelle B.1,

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z) &= \text{ad}(X)(\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y)(\text{ad}(X)(Z)) \\ &= \text{ad}(X)([Y, Z]) - \text{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\ &= -[Z, [X, Y]] = [[X, Y], Z] = \text{ad}([X, Y])(Z). \end{aligned}$$

Also ist  $\text{ad}$  insbesondere eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .\*

### A.1.4. Killingform

**Definition A.1.20.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra (über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Die Bilinearform

$$K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

heißt *Killingform* von  $\mathfrak{g}$ .

**Satz A.1.21.**

(i)  $K$  ist *Ad*-invariant, d.h.  $K(\text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y) = K(X, Y)$ .

---

\*Darstellung einer Liealgebra = stetige Abbildung  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  für einen Vektorraum  $V$  mit  $[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

## A. Liegruppen und Wirkungen

- (ii)  $K$  ist genau dann nichtentartet, wenn  $\mathfrak{g}$  halbeinfach\*
- (iii) Ist  $G$  kompakt und halbeinfach, dann ist  $K$  negativ definit.

**Folgerung A.1.22.** Ist  $G$  kompakt und halbeinfach, dann definiert

$$\gamma_a(X(a), Y(a)) := -K(X, Y) \text{ für } X, Y \in \mathfrak{g}$$

eine Riemannsche Metrik  $\gamma$  auf  $G$ . Für eine solche Metrik  $\gamma$  stimmt die Exponentialabbildung für Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit der Exponentialabbildung für  $G$  als Liegruppe überein.

**Beispiel A.1.23.**

- (i) Ist  $G$  abelsch, ist  $K = 0$ .
- (ii) Für  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  ist  $K(X, Y) = 2n\text{Tr}(XY) - 2\text{Tr}(X)\text{Tr}(Y)$ .
- (iii) Ist  $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{K})$  einfach, dann ist  $K(X, Y) = c\text{Tr}(XY)$  für geeignetes  $c \in \mathbb{R}$ .
- (iv)

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \quad K(X, Y) &= 2n\text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{o}(n) \quad K(X, Y) &= (n-2)\text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{su}(n) \quad K(X, Y) &= 2n\text{Tr}(XY) \end{aligned}$$

## A.2. Gruppenwirkungen

**Definition A.2.1.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Lie-Gruppe. Eine glatte Abbildung  $\Psi: G \times M \rightarrow M$  heißt *linke bzw. rechte  $G$ -Wirkung* von  $G$  auf  $M$ , falls

- (i)  $\Psi(1, x) = x$  für alle  $x \in M$  und
- (ii)  $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(gh, x)$  für die Linkswirkung bzw.  $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(hg, x)$  für die Rechtswirkung für alle  $g, h \in G, x \in M$

gilt. Das Tripel  $(M, G, \Psi)$  heißt *(linke bzw. rechte)  $G$ -Mannigfaltigkeit*. Für  $g \in G$ , sei  $\Psi_g: M \rightarrow M, x \mapsto \Psi(g, x)$ , die induzierte Abbildung auf  $M$ . Wir schreiben auch auf kurz  $\Psi(g, x) = g \cdot x$  bei einer Linkswirkung und  $\Psi(g, x) = x \cdot g$  bei einer Rechtswirkung.

---

\* $\mathfrak{g}$  heißt *einfach*, falls  $\mathfrak{g}$  nicht abelsch ist und außerdem  $\mathfrak{g}$  außer dem Nullraum und sich selbst keine weiteren Ideale enthält (Ideal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g} =$  Unterliealgebra mit  $[X, Y] \in \mathfrak{i}$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in \mathfrak{i}$ .)  $\mathfrak{g}$  heißt *halbeinfach*, falls  $\mathfrak{g}$  direkte Summe einfacher Ideale ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\mathfrak{g}$  keine nichttrivialen abelschen Ideale enthält.  
 $G$  heißt *(halb-)einfach*, falls  $\mathfrak{g}$  (halb-)einfach ist. Beispiele:  $SU(n)$  für  $n \geq 2$ ,  $SO(n)$  für  $n \geq 2$ ,  $SL(n, \mathbb{K})$  für

**Bemerkung A.2.2.**

- (i) Sei  $\iota: (g, x) \in G \times M \mapsto (g^{-1}, x) \in G \times M$ . Ist  $\Psi$  eine Linkswirkung, dann ist  $\Psi \circ \iota$  eine Rechtswirkung.
- (ii) Bei abelschen Gruppen gibt es keinen Unterschied zwischen Links- und Rechtswirkungen.
- (iii) Es ist  $\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}} = \Psi_1 = \text{Id}_M$ . Damit ist  $\Psi_g$  ein Diffeomorphismus auf  $M$ . Deshalb könnten wir in Definition A.2.1 Bedingung (i) und (ii) auch durch folgende Forderung ersetzen: Die Abbildung  $g \in G \mapsto \Psi_g \in \text{Diff}(M)$  ist ein Gruppenhomomorphismus für Linkswirkungen bzw. ein Gruppenantihomomorphismus für Rechtswirkungen.

**Beispiel A.2.3.**

- (i) Der Fluss  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  eines beschränkten Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}(M)$  auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Wirkung von  $\mathbb{R}$  auf  $M$  - sowohl eine Links- als auch Rechtswirkung, da  $\mathbb{R}$  abelsch ist.
- (ii) Ist  $V$  ein Vektorraum und  $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$  eine Darstellung. Dann ist  $\Phi: (a, v) \in G \times V \mapsto \rho(a)v \in V$  eine Linkswirkung.
- (iii)  $L: G \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto L_h(g) = hg$  ist eine Linkswirkung von  $G$  auf sich selbst. Analog können wir eine Rechtswirkung von  $G$  auf sich definieren. Die Konjugation  $\Psi(a, g) = aga^{-1}$  ist eine Linkswirkung von  $G$  auf sich selbst ( $(a, g) \mapsto a^{-1}ga$  wäre eine Rechtswirkung).

Sei  $G$  eine Liegruppe. Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und damit eine Lieuntergruppe von  $G$  nach Satz A.1.14. Sei  $G/H := \{[g] := gH \mid g \in G\}$  die Menge der linken Nebenklassen modulo  $H$  und  $\pi: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ , die kanonische Projektion. Die Abbildung

$$\ell: G \times G/H \rightarrow G/H, (g, kH) \mapsto gkH$$

definiert eine Linkswirkung von  $G$  auf  $G/H$ :

**Satz A.2.4.** [1, Satz 1.24] Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe  $G$ . Dann trägt  $G/H$  eine eindeutig bestimmte Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass

- (i) die kanonische Projektion  $\pi$  und die Wirkung  $\ell$  glatt sind und
- (ii) für jeden Punkt  $[g] \in G/H$  existiert eine Umgebung  $U_{[g]} \subset G/H$  und eine glatte Abbildung  $s: U_{[g]} \rightarrow G$  mit  $\pi \circ s = \text{id}|_{U_{[g]}}$

ist.

**Definition A.2.5.** In der obigen Situation nennen wir den Quotienten  $G/H$ , ausgestattet mit der eindeutigen Mannigfaltigkeitsstruktur von oben, *homogenen Raum*.

**Folgerung A.2.6.** Mit obiger Mannigfaltigkeitsstruktur wird  $\pi: G \rightarrow G/H$  zu einem Faserbündel mit Fasertyp  $H$  und  $s$  ist ein lokaler Schnitt in diesem Bündel.

## A. Liegruppen und Wirkungen

*Beweisskizze.* Mit dem Satz zuvor bleibt es, aus  $s$  eine lokale Trivialisierung zu konstruieren:  $\phi: \pi^{-1}(U_{[g]}) \subset G \rightarrow U_{[g]} \times H$ ,  $\phi(g) = (gH, (s(gH))^{-1}g)$ . Da  $\pi \circ s = \text{Id}$  ist, gilt  $s(gH) = gh$  für ein  $h \in H$  und damit  $(s(gH))^{-1}g = h \in H$ . Es gilt  $\text{pr}_1 \circ \phi = \pi$  und  $\phi$  ist ein Diffeomorphismus mit  $\phi^{-1}(gH, h) = s(gH)h$ .  $\square$

### Beispiel A.2.7.

- (i) Sei  $V_d(\mathbb{K}^r)$  die Menge aller  $d$ -Tupel orthonormaler Vektoren (=orthonormale  $d$ -Beine) in  $\mathbb{K}^r$ . Man kann  $V_d(\mathbb{R}^r)$  bzw.  $V_d(\mathbb{C}^r)$  mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/O_{r-d}(\mathbb{R}) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/U_{r-d}(\mathbb{R})$$

identifizieren. Damit wird auf  $V_d(\mathbb{K}^r)$  mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen  $V_d(\mathbb{K}^r)$  *Stiefel-Mannigfaltigkeit*. Spezialfall:  $V_1(\mathbb{R}^r) = S^{r-1}$  und  $V_1(\mathbb{C}^r) = S^{2r-1}$ .

- (ii) Sei  $G_d(\mathbb{K}^r)$  die Menge aller  $d$ -dimensionalen Untervektorräume des  $\mathbb{K}^r$ . Man kann  $G_d(\mathbb{R}^r)$  bzw.  $G_d(\mathbb{C}^r)$  mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/(O_d(\mathbb{R}) \times O_{r-d}(\mathbb{R})) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/(U_d(\mathbb{R}) \times U_{r-d}(\mathbb{R}))$$

identifizieren. Damit wird auf  $G_d(\mathbb{K}^r)$  mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen  $G_d(\mathbb{K}^r)$  *Graßmann-Mannigfaltigkeit*. (Spezialfall:  $G_1(\mathbb{K}^r) = \mathbb{K}P^{r-1}$ .)

Die Projektion  $\pi: V_n(\mathbb{K}^d) \rightarrow G_n(\mathbb{K}^d)$ , die jedem  $d$ -Tupel orthonormaler Vektoren in  $\mathbb{K}^d$  den durch diese Vektoren aufgespannten Untervektorraum von  $\mathbb{K}^d$  zuordnet, ist glatt und die Topologie auf  $G_n(\mathbb{K}^d)$  stimmt mit der Quotiententopologie bzgl  $\pi$  überein.

- (iii) Es ist  $S^1 \cong U(1)$ . Weiterhin ist  $S^3 \cong SU(2)$ , da

$$(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Es ist nun

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \right\} \subset SU(2)$$

ein Untergruppe, die auch abgeschlossen und damit eine Lieuntergruppe ist. Die Projektionsabbildung in den zugehörigen homogenen Raum  $S^3 \rightarrow S^3/S^1$  gibt genau die Hopffaserung von oben: Denn betrachtet man als  $S^1$ -Wirkung auf  $SU(2)$

$$e^{i\alpha} \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} a & \overline{e^{-i\alpha} b} \\ -e^{-i\alpha} b & \overline{e^{i\alpha} a} \end{pmatrix}.$$

entspricht das auf der  $S^3$ -Seite genau unserer  $S^1$ -Wirkung.

## A.2. Gruppenwirkungen

**Definition A.2.8.** Eine Wirkung  $\Psi: G \times E \rightarrow E$ ,  $(g, e) \mapsto e \times g$ , heißt *eigentlich*, wenn für die Abbildung  $G \times E \rightarrow E \times E$ ,  $(g, e) \mapsto (e, e \times g)$ , Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt ist.

**Satz A.2.9.** [8, Thm 21.10] Sei  $\Psi$  eine freie und eigentliche freie Wirkung einer Liegruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , dann existiert auf dem topologischen Raum  $M/G$  eine eindeutig bestimmte glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, in der die kanonische Projektion  $\pi: M \rightarrow M/G$  eine Submersion ist. Für jeden Punkt  $[g] \in M/G$  existiert eine Umgebung  $U[g] \subset M/G$  und eine glatte Abbildung  $s: U[g] \rightarrow M$  mit  $\pi \circ s = \text{id}|_{U[g]}$ .



## B. Übersicht - Operationen auf Differentialformen

			lokale Def.  $x^i$ lokale Koord. auf $U \subset M$ , $y^i$ auf $V \subset N$ $F(U) \subset V$ , $\phi(U) = V$	Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau)	Ref.
$F^*$	Pullback	$F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$	$F^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})$ $= (f_{i_1 \dots i_k} \circ F) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(F^*\gamma)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) = \gamma_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p)))</math></li> <li><math>F^*f = f \circ F</math></li> <li><math>F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta</math></li> </ul>	[2, S. 108]
$\phi_*$	Pushforward	$\phi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$	$\phi_*(X^i \partial_{x^i}) = X^i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} \partial_{y^j}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(\phi_*X)(p) = d_{\phi^{-1}(p)}\phi(X(\phi^{-1}(p)))</math></li> <li><math>\phi_*(fX) = (f \circ \phi^{-1})(\phi_*X)</math></li> <li><math>(\phi_*X)(f) = X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}</math></li> <li><math>\psi_* \circ \phi_*X = (\psi \circ \phi)_*X</math></li> </ul>	
$d$	äußere Ableitung	$d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ für alle $k \geq 0$	$d(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d</math> ist <math>\mathbb{R}</math>-linear</li> <li><math>df(X) = X(f)^*</math></li> <li><math>d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta</math></li> <li><math>d^2 = d \circ d = 0</math></li> <li><math>F^* \circ d = d \circ F^*</math></li> </ul>	[2, S. 108]
$\iota$	inneres Produkt (auch Kontraktion genannt)	$\iota: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ für alle $k \geq 1$	$\iota_{X^a \partial_{x^a}}(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= X^a f_{i_1 \dots i_k} \delta_a^{i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\iota</math> ist <math>C^\infty(M)</math>-bilinear</li> <li><math>(\iota_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)</math></li> <li><math>\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta</math></li> <li><math>\iota_X^2 \alpha = 0</math></li> </ul>	

weiter auf nächster Seite

\*Das sagt einfach nur, dass  $d$  auf  $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$  einfach durch die Tangentialabbildung  $df$  gegeben werden soll. Um das in der Notation zu unterscheiden, benutzt man hier die alternative Schreibweise als Derivation.

$[\cdot, \cdot]$	Lieklammer	$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$[X^i \partial_{x^i}, Y^j \partial_{y^j}]$ $= (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) \partial_{x^i}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))</math></li> <li>• <math>[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0</math> (Jacobi-Identität)</li> <li>• <math>\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]</math></li> <li>• <math>d\alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_i (-1)^i X_i(\alpha(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i &lt; \ell} (-1)^{i+\ell} \alpha([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_k)</math> *</li> </ul>	[2, ÜA 24]  [2, Lem. II.10.23]
$\mathcal{L}$	Lieableitung	$\mathcal{L}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$		<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt} \Big _{t=0} \Phi_t^* \alpha^\dagger</math></li> <li>• <math>\mathcal{L}_X f = X(f)</math></li> <li>• <math>\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) + \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta</math></li> <li>• <math>\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X</math></li> <li>• <math>\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d</math></li> <li>• <math>\mathcal{L}_{fX} \alpha = f \mathcal{L}_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha</math></li> </ul>	

Tabelle B.1.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf  $M$ \*Das  $\check{\phantom{x}}$  bedeutet, dass dieser Eintrag ausgelassen wird. $\dagger \Phi_t$  ist der Fluss des Vektorfeldes  $X$ , vgl. [2, ÜB 12].

			lokal (+Linearität)	Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau)	Ref.
				$p \in M, f, f_{i_1, \dots, i_k}, X^i \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\alpha, \alpha_i \in \Omega^k(M), \omega \in \Omega^{k+1}(M), \beta \in \Omega^l(M), \eta \in \Omega^{m-k}(M)$ $F \in C^\infty(M, N), \gamma \in \Omega^k(N), \eta \in \Omega^l(N)$	
$\flat$	Herunterziehen von Indizes	$\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$	$(X^a(x)\partial_{x^a})^\flat = X^a(x)g_{ai}(x)dx^i$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>X^\flat(Y) = g(X, Y)</math></li> </ul>	[2, Bsp. II.10.12]
$\sharp$	Erhöhen von Indizes	$\sharp: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$(f_i(x)dx^i)^\sharp = f_i(x)g^{ij}(x)\partial_{x^j}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\alpha(Y) = g(\alpha^\sharp, Y)</math></li> </ul>	[2, Bsp. II.10.12]
grad	Gradient	grad: $C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	gradf = $g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_{x^j}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>gradf = <math>(df)^\sharp</math></li> </ul>	[2, ÜA 31]
$\delta$	formal adjungierter Operator zu $d$	$\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(d\alpha, \omega)_{L^2} = (\alpha, \delta\omega)_{L^2}</math>*</li> <li><math>\delta^2 = 0</math></li> </ul>	S. 31
div	Divergenz	div: $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$	div( $X^a(x)\partial_{x^a}$ ) = $(\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}X^a)$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d(\iota_X \text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g</math> (auch falls <math>\text{dvol}_g</math> nur lokal wohldef. ist)</li> <li><math>\mathcal{L}_X(\text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g</math></li> </ul>	
$\Delta$	(Hodge-)Laplace	$\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$	$\Delta f = -(\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}g^{ab}\partial_{x^b}f)$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\Delta = d\delta + \delta d = (d + \delta)^2</math></li> <li><math>\Delta f = \delta df = \text{div grad}f</math></li> </ul>	[2, Bsp. III.1.10]
*	Hodge-Stern (für $M$ orientiert)	$*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$	$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= \frac{1}{k!} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_k k_k} \epsilon_{\ell_1 \dots \ell_k j_1 \dots j_{m-k}} \sqrt{ \det g } dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-k}}$ †	<ul style="list-style-type: none"> <li>* ist <math>C^\infty(M)</math>-linear</li> <li><math>\alpha \wedge \eta = g(\alpha, *\eta)\text{dvol}_g</math></li> <li><math>* * \alpha = (-1)^{k(m-k)} \alpha</math></li> <li><math>g(*\alpha_1, *\alpha_2) = g(\alpha_1, \alpha_2)</math></li> <li><math>\delta \alpha = (-1)^{m(k-1)-1} * d * \alpha</math></li> <li><math>\iota_\alpha(\alpha) = (-1)^{m(k-1)-1} * (v^\flat \wedge *\alpha)</math></li> </ul>	ÜA 15

Tabelle B.2.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$

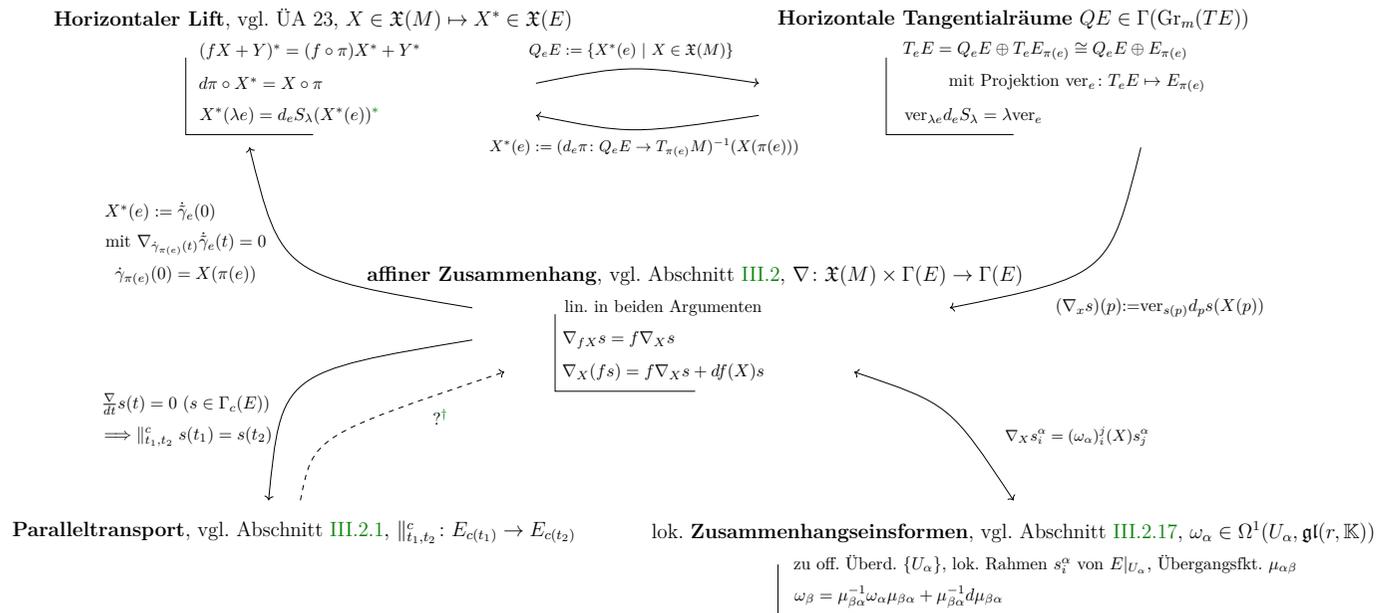
\*Für  $\alpha_i \in \Omega^k(M)$  ist  $(\alpha_1, \alpha_2)_{L^2} := \int_M g(\alpha_1, \alpha_2)\text{dvol}_g$ , wobei  $g$  hier die induzierte Bündelmetrik auf  $\Lambda^k(M)$  ist.

†Für  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  setzen wir  $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = \text{sign}(\sigma)$ , falls  $\sigma$  eine Permutation ist, und sonst  $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = 0$ .



# C. Zusammenhänge – VB vs. HFB

Äquivalente Beschreibungen von affinen Zusammenhängen auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel  $\pi: E \rightarrow M$  vom Rang  $r$  und  $\dim M = m$ . (Die horizontalen Tangentialräume hatten wir auf Vektorbündel nur in der Motivation für Zusammenhänge auf Hauptfaserbündel definiert.):

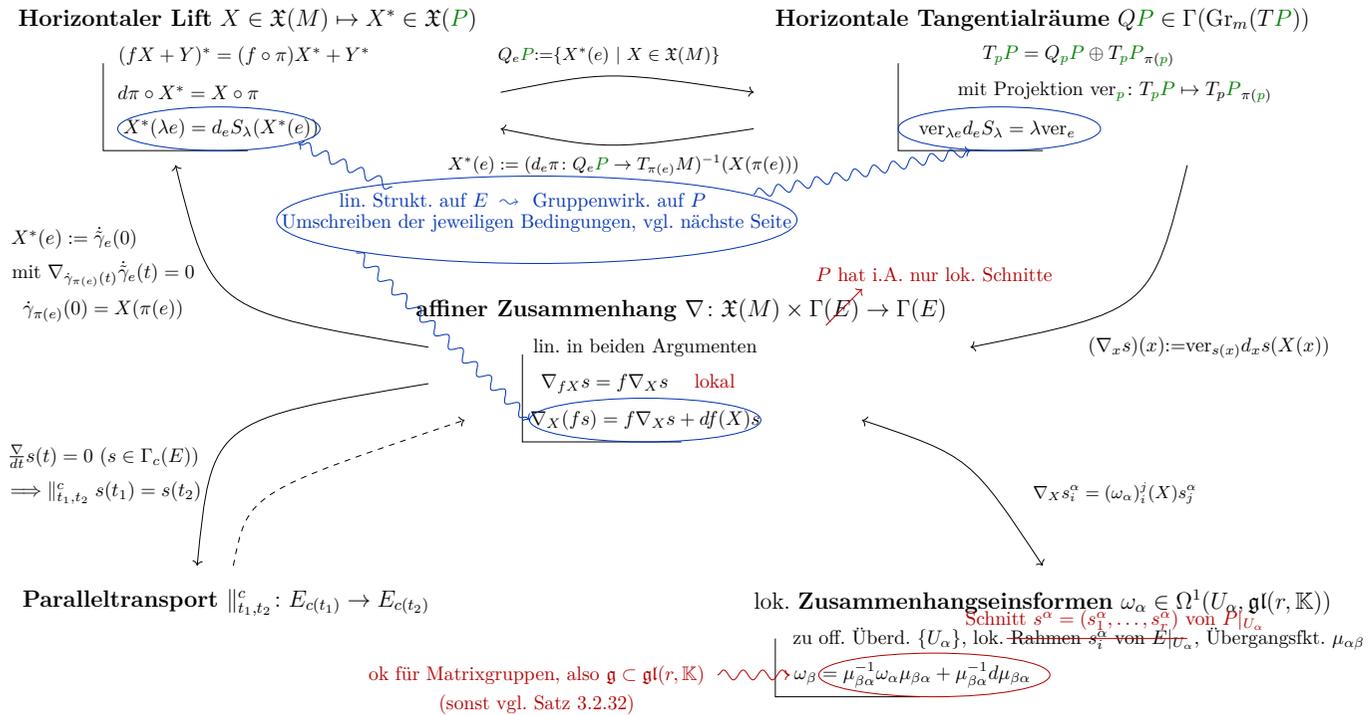


\*  $S_\lambda: E \rightarrow E, e \mapsto \lambda \cdot e$ , ist die faserweise skalare Multiplikation.

† Dazu muss man erst einmal Paralleltransport unabhängig von einem Zusammenhang definieren, vgl. z.B. [10, S. 41].

Wie soll man das folgende verstehen? Das unterliegende 'Bild' in schwarz ist die Übersicht über äquivalente Beschreibungen von Zusammenhängen eines Vektorbündels von letzter Seite. Das farbliche behandelt die Frage, wie man die Definitionen anpassen kann/muss, um einen Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel  $GL(E)$  (und später allgemein auf Hauptfaserbündel) zu definieren.

$E \sim GL(E) =: P$  – Was ist ein Zusammenhang auf  $P$ ?



Äquivalente Zusammenhangsbegriffe für  $G$ -Hauptfaserbündel  $P \rightarrow M$ . Während für Vektorbündel die Beschreibung als affiner Zusammenhang meistens in Verwendung ist, ist es für Hauptfaserbündel i.A. die Zusammenhangseinsform.

**Horizontaler Lift**  $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$

$$\begin{cases} (fX + Y)^* = (f \circ \pi)X^* + Y^* \\ d\pi \circ X^* = X \circ \pi \\ X^*(p \cdot g) = d_p R_g(X^*(p)) \end{cases}$$

$$Q_e P := \{X^*(e) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

$$X^*(e) := (d_e \pi: Q_e P \rightarrow T_{\pi(e)} M)^{-1}(X(\pi(e)))$$

**Horizontale Tangentialräume**  $Q_p P \in \Gamma(\text{Gr}_m(TP))$

$$\begin{cases} T_p P = Q_p P \oplus T_p P_{\pi(p)} \\ \text{mit Projektion } \text{ver}_p: T_p P \mapsto T_p P_{\pi(p)} \\ Q_{p \cdot g} P = d_p R_g(Q_p P) \end{cases}$$

**Zusammenhangseinsform**  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = X \\ R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega \end{cases}$$

$$Q_p P = \ker \omega_p$$

$$\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$$

beachte Bem. IV.2.34

lok. **Zusammenhangseinsformen**  $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$

$$\begin{cases} \text{zu off. Überd. } \{U_\alpha\}, \text{ lok. Schnitt } s_\alpha \text{ von } P|_{U_\alpha}, \text{ Übergangsfkt. } \mu_{\alpha\beta} \\ \omega_\beta = \text{Ad}(\mu_{\beta\alpha}^{-1})\omega_\alpha + dL_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} d\mu_{\beta\alpha} \end{cases}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] BAUM, H. *Eichfeldtheorie, Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] GROSSE, N. Differentialgeometrie I. [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Differentialgeometrie/DiffGeo\\_WS-2324\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Differentialgeometrie/DiffGeo_WS-2324_Skript.pdf).
- [3] GROSSE, N. Differentialgeometrie I - Übungsaufgaben. [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Differentialgeometrie/DiffGeo\\_WS-2324\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Differentialgeometrie/DiffGeo_WS-2324_uebungen_gesamt.pdf).
- [4] GROSSE, N. Funktionalanalysis. [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis\\_SS-22\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Funktionalanalysis/Funktionalanalysis_SS-22_Skript.pdf).
- [5] HEBEY, E. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, vol. 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [6] HIRZEBRUCH, F. *Topological methods in algebraic geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.
- [7] KAROUBI, M. *K-theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [8] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [9] MEINRENKEN, E. *Clifford algebras and Lie theory*, vol. 58 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [10] POOR, W. A. *Differential geometric structures*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.
- [11] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980. Functional analysis.

*Literaturverzeichnis*

- [12] ROE, J. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, second ed., vol. 395 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1998.
- [13] WALSCHAP, G. *Metric structures in differential geometry*, vol. 224 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2004.