

Differentialgeometrie II

Universität Freiburg, SS 2020

Nadine Große

Skript - Version vom 22. Juli 2021

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel	1
1.1. Faserbündel	1
1.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen	4
1.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln	7
1.2. Vektorbündel	13
1.2.1. Schnitte	13
1.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln	14
1.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel	20
1.2.4. Bündelmetriken	22
2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln	27
2.1. Definitionen und erste Eigenschaften	27
2.1.1. Im \mathbb{R}^n	27
2.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln	28
2.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln	30
2.2.1. Horizontaler Lift – Paralleltransport	35
2.2.2. Krümmung	36
2.3. Hauptsymbol und Klassifikation	38
2.3.1. Hauptsymbol	38
2.3.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren	41
2.4. Elliptische Diffops	43
2.4.1. Grundlagen und erste Anwendungen	44
2.4.2. Wichtige Begriffe der Funktionalanalysis	45
2.4.3. Elliptische Abschätzungen	47
2.4.4. Existenz von Lösungen in Sobolevräumen - Fredholmalternative	48
2.4.5. Laplace-artige Operatoren	50
2.4.6. Dirac-artige Operatoren	57
2.4.7. Etwas Funktionalkalkül	59
2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung	60
2.5.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns	62
2.5.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz	66
3. Hauptfaserbündel	69
3.1. Vom Tangential- zum Repèrebündel	69
3.2. Definition	70
3.2.1. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel	73
3.2.2. Exkurs: Čech-Kohomologie	75

Inhaltsverzeichnis

3.2.3. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln	77
3.2.4. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln	79
3.2.5. Krümmung	84
3.3. Klassische Yang-Mills-Theorie	88
3.3.1. Klassische Elektrodynamik	88
3.3.2. Klassische Yang-Mills Theorie	90
3.4. Dirac-Operatoren	92
A. Liegruppen und Wirkungen	97
A.1. Liegruppen	97
A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren	97
A.1.2. Lie-Untergruppen	99
A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen	99
A.1.4. Killingform	101
A.2. Gruppenwirkungen	102
B. Übersicht - Operationen auf Differentialformen	105
Literatur	109

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

1.1. Faserbündel

Wir wollen in diesem Abschnitt Faserbündel einführen. Diese kann man als Verallgemeinerung des Tangentialbündels verstehen:

Woche 1

Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte* Mannigfaltigkeit, z.B. $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist der Tangentialraum $T_x M$ ein Vektorraum für alle $x \in M$ und wir haben einen Vektorraumisomorphismus $\tau_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (mit $\tau_x(0 \in T_x M) = 0$). Ändern wir x , dann ändert sich auch dieser Tangentialraum, aber in einer kontinuierlichen Weise.

$TM := \sqcup_{x \in M} T_x M$ erhält durch die Forderung, dass für eine Karte $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ auf M die Abbildung $d\kappa: TU = \sqcup_{x \in U} T_x M \rightarrow TV \cong V \times \mathbb{R}^m$, definiert durch $d\kappa(v \in T_x M) := (x, d_x \kappa(v))$, eine Karte von TM sein soll, eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur. So wird auch dort TM zu einer glatten $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, vgl. [2, Satz I.3.15].

Allerdings ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Zusatzstruktur: Wir haben eine surjektive glatte Abbildung $\pi: TM \rightarrow M$, $v \in T_x M \mapsto x \in M$. Desweiteren gilt für $U \subset M$ klein genug: Es gibt eine Karte $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ und $\pi^{-1}(U) = TU$ ist mittels der Abbildung $(\kappa^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}) \circ d\kappa$ isomorph zu $U \times \mathbb{R}^m$ – diese Eigenschaft heißt *lokal trivial*. Diese Zusatzstrukturen machen TM zu einem sogenannten Faserbündel – speziell nennen wir TM *Tangentialbündel* von M :

Definition 1.1.1. Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und sei F eine Mannigfaltigkeit. Dann ist $\pi: E \rightarrow M$ ein *Faserbündel mit dem Fasertyp F* , falls es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M und Diffeomorphismen $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ gibt, so dass $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ (Man sagt: ϕ_α ist *fasertreu*) gilt.

Der Raum E heißt *Totalraum*, M *Basisraum*, π ist die *Projektion* und F der *Fasertyp* der Faserung. $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$ ist die *Faser* über $x \in M$ und (U_α, ϕ_α) ist eine *lokale Trivialisierung* über U_α .

Gegeben zwei Faserbündel $\pi_i: E_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$ mit Fasertyp F . Eine glatte Abbildung $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$ heißt *Faserbündelmorphismus*, falls es eine Abbildung $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ mit $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$ gibt. Man sagt auch, Φ ist ein *Faserbündelmorphismus über ϕ* . Ist $M_1 = M_2$ und Φ auf allen Fasern sogar ein Diffeomorphismus (also insbesondere

*Ab sofort sind bei uns Mannigfaltigkeiten und Abbildungen immer glatt – außer wir sagen es explizit dazu – und wir schreiben das glatt i.A. nur noch hinzu, um es hervorzuheben.

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

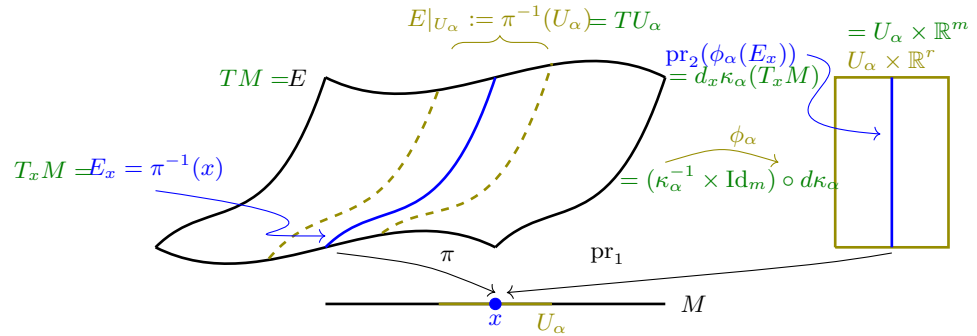


Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung (eines Teils) eines Faserbündels. In grün steht jeweils dabei, was die einzelnen Punkte für unser Beispiel TM^m von oben wären.

$\phi = \text{id}$), so nennt man Φ *Faserbündelisomorphismus* und die entsprechenden Faserbündel *isomorph*.

Ein (*glatter*) *Schnitt* ist eine glatte Abbildung $s: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}$. Die Menge aller glatten Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$.

Beispiel 1.1.2.

- (i) (*Triviales* Faserbündel) $E = M \times F \xrightarrow{\pi = \text{pr}_1} M$ (jedes dazu isomorphe Faserbündel nennen wir auch *trivial*) Ein glatter Schnitt in E entspricht dann einfach einer glatten Abbildung $M \rightarrow F$.
- (ii) Ist die Faser diskret, also $\dim F = 0$, so nennt man das Bündel *Überlagerung*.
- (iii) *Möbiusband* Setze $E := [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$ mit $(x, v) \sim (y, w)$ genau dann, wenn $\{x, y\} = \{0, 1\}$ und $v = -w$ ist. Dann ist $\pi: E \rightarrow S^1 \cong [0, 1]/(0 \sim 1)$, $[(x, v)] \mapsto [x]$, ein Faserbündel über S^1 . Jeder Schnitt in E kommt von einer antiperiodischen Abbildung auf \mathbb{R} der Periode 1, also von einem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+1) = -f(x)$.

Auch $E' := ([0, 1] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) / \sim$ mit \sim wie oben ist ein Faserbündel über S^1 . Es ist dann $\Gamma(E') = \emptyset$.

- (iv) (*Kanonisches Geradenbündel*) Sei $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{K}^*$ der projektive Raum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Das ist eine Mannigfaltigkeit, vgl. [2, Abschnitt I.3.3.]. Das kanonische Geradenbündel ist definiert als

$$\pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{K}P^n$$

$$(\ell, v) \mapsto \ell$$

Wir betrachten τ als Teilmenge von $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1}$ mit der induzierten Mannigfaltigkeitsstruktur. Dann ist $\pi: \tau \subset \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}P^n$, die Projektion auf die erste Koordinate, ein Faserbündel. Mit Fasertyp: \mathbb{K} .

- (v) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M und $\pi: TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel auf M . Dann ist das *Einheitstangentialbündel*

$$e \in SM := \{e \in TM \mid g_{\pi(e)}(e, e) = 1\} \mapsto \pi(e) \in M$$

ein Faserbündel über M . Mit Fasertyp: $S^{\dim M}$.

- (vi) *Hopffaserung*: Wir betrachten die Wirkung von $U(1) \cong S^1$ auf \mathbb{C}^2 mittels

$$((z_1, z_2), e^{i\alpha}) \in \mathbb{C}^2 \times U(1) \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2) \in \mathbb{C}^2$$

– vgl. Abbildung 1.2. Diese Wirkung lässt die Untermannigfaltigkeit

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

invariant. Die Projektion $S^3 \rightarrow S^3/U(1)$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp S^1 .

Beweis. Vgl. Beispiel A.2.7.iii □

Bemerkung 1.1.3. In obigen Beispielen haben wir gesehen, dass $\Gamma(E)$ auch leer sein kann. Was es aber immer gibt, sind *lokale Schnitte*. D.h. für alle $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von p und eine glatte Abbildung $s: U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$. Das folgt direkt aus der Existenz der lokalen Trivialisierungen.

Oft werden Bündel mit Zusatzstrukturen betrachtet. So ist z.B. das Tangentialbündel von oben ein Faserbündel $\pi: E = TM \rightarrow M^m$ mit einem Vektorraum als Fasertyp, dessen lokale Trivialisierungen Vektorraumisomorphismen auf den Fasern sind. Das gleiche gilt fürs Möbiusband. Beide gehören zu den Vektorbündeln:

Definition 1.1.4. Ein Faserbündel $\pi: E \rightarrow M$ mit Fasertyp F ist ein *reelles Vektorbündel vom Rang r* , falls $F = \mathbb{R}^r$, alle Fasern $E_p := \pi^{-1}(p)$ Vektorräume sind und falls für jede lokale Trivialisierung (U_α, ϕ_α) und $p \in U_\alpha$ die Einschränkung $\phi_p := \text{pr}_2 \circ \phi_\alpha|_{E_p}: E_p \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Analog werden *komplexe Vektorbündel* oder allgemein \mathbb{K} -Vektorbündel (\mathbb{K} ein Körper) definiert. Vektorbündel vom Rang 1 nennen wir auch *Geradenbündel*.

Ein *Vektorbündelhomomorphismus* bzw. *-isomorphismus* zwischen zwei Vektorbündeln ist ein Bündelmorphismus, dessen Einschränkung auf die Fasern linear bzw. ein Vektorraumisomorphismus ist.

Von den Beispielen aus 1.1.2 hat das triviale Faserbündel mit Faser \mathbb{K}^r , das kanonische Linienbündel über $\mathbb{K}P^n$ und das Möbiusband jeweils Vektorbündelstruktur – die letztem beiden haben Rang 1.

Mehr zu Vektorbündel in Abschnitt 1.2. Eine andere spezielle Klasse von Faserbündeln werden Hauptfaserbündel sein, vgl. Abschnitt 3.

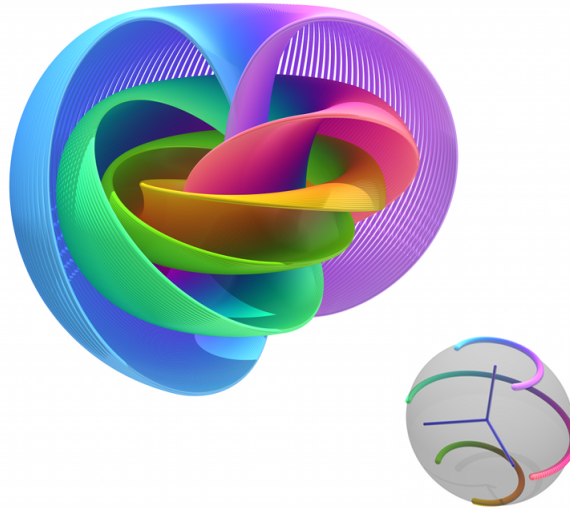


Abbildung 1.2.: Das ist eine Visualisierung der Hopffaserung. Aufgrund der hohen Dimensionen wird eine stereographische Projektion der S^3 auf den \mathbb{R}^3 durchgeführt und dieser dann diffeomorph in einen Ball $B_2(0) \subset \mathbb{R}^3$ abgebildet. Das Bild zeigt verschiedene Punkte von $S^2 \subset B_2(0)$ zusammen mit ihren Bahnen unter Wirkung S^1 in verschiedenen Farben, vgl. auch <https://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk> für eine Animation.

[By Niles Johnson - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22485543>]

1.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns anschauen, wie und ob man sich aus trivialen Faserbündeln über offenen Teilmengen von M sich ein Faserbündel über ganz M zusammenkleben kann:

Bemerkung 1.1.5. (Wechsel lokaler Trivialisierungen) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Trivialisierungen $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ eines Faserbündels $\pi: E \rightarrow M$. Dann gibt es für alle α, β mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ eine Abbildung

$$\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F) \text{ mit } \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \mu_{\alpha\beta}(p)v)$$

für $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ und $v \in F$. Hierbei ist $\text{Diff}(F)$ die Menge aller Diffeomorphismen von F . Diese bilden zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe – die *Diffeomorphismengruppe* von F .

Die Abbildungen werden *Übergangsfunktionen* genannt.

Definition 1.1.6. Eine Abbildung $h: B \rightarrow \text{Diff}(F)$ nennen wir *glatt*, falls $\tilde{h}: B \times F \rightarrow F$, $\tilde{h}(b, f) := h(b)(f)$, glatt ist (im ursprünglichen Sinne von Abbildungen zwischen

Mannigfaltigkeiten). Die Menge solcher glatten Abbildungen bezeichnen wir mit $C^\infty(B, \text{Diff}(F))$.

In diesem Sinne sind die obigen Abbildungen $\mu_{\alpha\beta}$ glatt.

Es gilt

- (i) $\mu_{\alpha\alpha} = 1$, d.h. $\mu_{\alpha\alpha}(x) = \text{id}: F \rightarrow F$ für alle $x \in U_\alpha$.
- (ii) $\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}\mu_{\gamma\alpha} = 1$.

Man sagt, dass die $\mu_{\alpha\beta}$ die *Kozykelbedingung* erfüllen. Nehmen die $\mu_{\alpha\beta}(x)$ nur Werte in einer Untergruppe $G \subset \text{Diff}(F)$ ein, so nennen wir G die *Strukturgruppe* vom Faserbündel und die $\mu_{\alpha\beta}$ einen *G-Kozykel*.

Bemerkung 1.1.7. Für zwei beliebige Faserbündel E und E' über M weiß man a priori erst einmal nur, dass es offenen Überdeckungen U_α und U'_α von M gibt, über denen E bzw. E' lokal trivial ist. Diese offenen Überdeckungen haben i.A. nichts miteinander zu tun. Man kann aber immer zu einer gemeinsamen Verfeinerung (z.B. $\{U_\alpha \cap U'_\beta\}_{\alpha,\beta}$) übergehen.

Als nächstes werden wir sehen, dass in den $\mu_{\alpha\beta}$ (bei gegebener Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$) schon das Faserbündel kodiert ist:

Satz 1.1.8. Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges Faserbündel vom Fasertyp F , welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

Beweis. Existenz: (Skizze - vgl. Übungsaufgabe 2) Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F / \sim \xrightarrow{\pi} M, [(x, v)] \mapsto x,$$

wobei $(x, v) \in U_\alpha \times F \sim (y, w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\beta\alpha}(x)v = w$ ist. Dann ist $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, [(x, v)] \mapsto (x, v)$.

Eindeutigkeit: Sei $E' \xrightarrow{\pi'} M$ ein Faserbündel über M mit Faser F und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$. Sei E wie oben konstruiert. O.B.d.A. können wir nach letzter Bemerkung annehmen, dass E und E' beide über U_α trivial sind und ϕ'_α die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von E' sind.

Wir müssen nun einen Faserbündel-Isomorphismus zwischen E und E' konstruieren: Wir definieren $f: E' \rightarrow E$ als

$$e \xrightarrow{\phi'_\alpha} (x, v) \xrightarrow{\sim} [(x, v)] \quad \text{mit} \quad \pi(e) \in U_\alpha.$$

Für Wohldefiniertheit reicht es zu zeigen, dass $\phi'_\alpha(e) \sim \phi'_\beta(e)$ für $\pi(e) \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt. Das folgt direkt, da beide Faserbündel die gleichen Übergangsfunktionen haben: $\phi'_\beta(e) = \phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$. Es gilt $\pi \circ f = \pi'$. Damit bleibt zu zeigen,

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

dass f glatt ist und $f|_{E'_x}: E'_x \rightarrow E_x$ für alle $x \in M$ ein Diffeomorphismus ist:
Die Abbildung $\phi_\alpha \circ f \circ (\phi'_\alpha)^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$ ist gegeben durch

$$(x, v) \in U_\alpha \times F \mapsto e = (\phi'_\alpha)^{-1}(x, v) \in E' \xrightarrow{f} [(x, v)] \in E \mapsto (x, v) \in U_\alpha \times F,$$

also gleich der Identität. Damit ist insbesondere $f|_{E'_x}: E'_x \rightarrow E_x$ für alle $x \in M$ ein Diffeomorphismus. Da die ϕ_α und ϕ'_α glatt sind, muss auch f auf $(\pi')^{-1}(U_\alpha)$ und damit auf ganz M glatt sein. \square

Woche 2 Die Übergangsfunktionen selbst hängen stark von den gewählten Trivialisierungen ab. Die Frage ist nun, wann liefert obige Konstruktion isomorphe Faserbündel.

Satz 1.1.9. *Gegeben zwei Faserbündel E, E' über M mit Fasertyp F . Zu einer gegebenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die Faserbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \text{Diff}(F))$ mit*

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{1.1}$$

Insbesondere ist das Faserbündel E trivial, wenn $\mu_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Beweis. Sei $f: E \rightarrow E'$ ein Bündelisomorphismus. Dann definiert $\phi_\alpha \circ f \circ (\phi'_\alpha)^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$ durch $\phi_\alpha \circ f \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, v) \mapsto (x, h_\alpha(x)(v))$ eine glatte Abbildung $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Diff}(F)$. Mit

$$\begin{aligned} (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ f \circ (\phi'_\beta)^{-1})(x, v) &= (\phi_\alpha \circ f \circ (\phi'_\alpha)^{-1}) \circ (\phi'_\alpha \circ (\phi'_\beta)^{-1})(x, v) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ (x, \mu_{\alpha\beta}(x)h_\beta(x)(v)) &\qquad \qquad \qquad (x, h_\alpha(x)\mu'_{\alpha\beta}(x)(v)) \end{aligned}$$

folgt direkt (1.1).

Sei nun andererseits (1.1) für glatte Funktionen $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Diff}(F)$ erfüllt. Dann definieren wir $f: E \rightarrow E'$ durch: Sei $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ mit $\phi_\alpha(e) = (x, v)$. Dann setze $f(e) := (\phi'_\alpha)^{-1}(x, h_\alpha(x)^{-1}(v))$. Wohldefiniertheit von f folgt mit

$$\phi_\beta(e) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(x)(v))$$

und

$$\begin{aligned} (\phi'_\beta)^{-1}(x, h_\beta(x)^{-1}\mu_{\beta\alpha}(x)(v)) &= (\phi'_\beta)^{-1}(x, \mu'_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x)^{-1}(v)) \\ &= (\phi'_\alpha)^{-1}(x, h_\alpha(x)^{-1}(v)). \end{aligned} \qquad \square$$

Beispiel 1.1.10. Alle Faserbündel $\pi: E \rightarrow M$ über $M = [0, 1]^*$ sind trivial:

* M ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, vgl. [2, Def. II.10.5]. Für alle Definitionen bis jetzt kann M genauso gut auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand sein.

Beweis: Da jedes Faserbündel lokal trivial ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass $E|_{U_i}$ mit $U_i = [\frac{3i}{3n+1}, \frac{3i+4}{3n+1}]$ trivial für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ist. Diese Intervalle sind so gewählt, dass jeder Punkt in $[0, 1]$ zu maximal zwei Intervallen gehört. Insbesondere ist für $i < j$

$$U_i \cap U_j = \begin{cases} \emptyset & j > i + 1 \\ [\frac{3i+3}{3n+1}, \frac{3i+4}{3n+1}] & j = i + 1. \end{cases}$$

Seien $\mu_{i,i+1}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Um Satz 1.1.9 anzuwenden, benötigen wir Funktionen $h_i \in C^\infty(U_i, \text{Diff}(\mathbb{R}))$ mit $\mu_{i,i+1} = h_{i+1}h_i^{-1}$. Diese können wir z.B. erhalten, in dem wir setzen: $h_0(x) := \text{id}_F$ und für $i > 0$

$$h_i(x) = \mu_{i,i-1}(x) \circ h_{i-1}(x) \quad \text{für } x \in U_{i-1} \cap U_i = \left[\frac{3i}{3n+1}, \frac{3i+1}{3n+1} \right],$$

wobei wir h_i glatt auf $U_i \setminus U_{i-1}$ fortsetzen. Mit Satz 1.1.9 folgt, dass unser Faserbündel trivial ist. \square

Beispiel 1.1.11 (Das Möbiusband ist kein triviales Faserbündel). Da das Möbiusband keinen nirgends verschwindenden Schnitt hat, das triviale Bündel aber natürlich schon, kann das Möbiusband als Vektorbündel nicht isomorph zum trivialen Vektorbündel $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ sein.

Wir wollen jetzt sehen, dass das Möbiusband auch als Faserbündel nicht isomorph zum trivialen Faserbündel $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ist. Wir werden das auf dem Level der Übergangsfunktionen sehen:

Sei $U_\pm := S^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$. Dann zerfällt $U_+ \cap U_-$ in zwei Zusammenhangskomponenten, die wir V_\pm nennen. Für das Möbiusband wählen wir die Trivialisierungen, so dass $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = v$ für $x \in V_+$ und $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = -v$ für $x \in V_-$ ist. Für das triviale Bündel wählen wir einfach eine globale Trivialisierung. Dann ist die Übergangsfunktion $\mu'_{+-}(x)(v) = v$ für alle $x \in U_+ \cap U_-$. Wäre das Möbiusband trivial, müsste es nach letztem Satz Funktionen $h_\pm: U_\pm \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R})$ mit $\mu_{+-}(x) = h_+(x) \circ h_-(x)^{-1}$ geben. Das heißt, entweder h_+ oder h_- würde einem glatten Weg in $\text{Diff}(\mathbb{R})$ entsprechen, der von einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zu einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus geht. Einen solchen Weg gibt es nicht, da ein orientierungserhaltender (-umkehrender) Diffeomorphismus auf \mathbb{R} überall positive (negative) Ableitung hat, während entlang eines solchen Weges die Ableitungen aber stetig sein müssen.

Wir werden noch sehen: Das triviale Bündel und das Möbiusband sind bis auf Isomorphie sogar die einzigen Faserbündel über S^1 mit Faser \mathbb{R} , vgl. Beispiel 1.1.14.

1.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln

1.1.2.1. Einschränkungen

Die einfachste Art aus gegebenen Faserbündeln $\pi: E \rightarrow M$ neue zu konstruieren sind Einschränkungen auf Untermannigfaltigkeiten $N \subset M$, also $\pi_N: E|_N := \pi^{-1}(N) \rightarrow N$. Dies ist ein Faserbündel über N mit Fasertyp F :

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Beweis. Da π eine Submersion ist, ist $\pi^{-1}(N)$ eine Untermannigfaltigkeit von E^* . Nun folgt der Rest automatisch durch Einschränkung der lokalen Trivialisierungen von E . \square

Einschränkungen können helfen, um zu zeigen, dass zwei Faserbündel isomorph sind:

Satz 1.1.12. *Sei $\pi: E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F . Dann sind die Einschränkungen $E|_{M \times \{0\}}$ und $E|_{M \times \{1\}}$ isomorphe Faserbündel über M .*

Beweis. Übungsaufgabe 6 \square

Folgerung 1.1.13. *Sei $E_i \rightarrow M$, $i = 0, 1$, Faserbündel mit Fasertyp F , lokalen Trivialisierungen ϕ_α^i und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$. Für alle α, β seien die $\mu_{\alpha\beta}^0$ und $\mu_{\alpha\beta}^1$ homotope Abbildungen mit Homotopie $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$, so dass zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind E_0 und E_1 isomorph.*

Beweis. Seien $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: (U_\alpha \times [0, 1]) \cap (U_\beta \times [0, 1]) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(F)$ die Homotopien, also $\mu_{\alpha\beta}^t := \tilde{\mu}_{\alpha\beta}(\cdot, t)$. Diese erfüllen nach Voraussetzungen die Kozykelbedingung und definieren damit nach Satz 1.1.8 ein Faserbündel $\tilde{E} \rightarrow M \times [0, 1]$. Nach Konstruktion ist $E_i \cong \tilde{E}|_{M \times \{i\}}$. Nach letztem Satz sind damit E_0 und E_1 isomorphe Faserbündel. \square

Beispiel 1.1.14. Man kann nach Bemerkung 1.1.7 jedes Faserbündel über $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit Fasertyp \mathbb{R} über $U_\pm = \{(x, y) \in S^1 \mid \pm(y \pm \frac{1}{2}) > 0\}$ lokal trivialisieren. Sei $V_+ \sqcup V_- := U_+ \cap U_-$. Damit ist die Übergangsfunktion μ_\pm eine Abbildung von zwei disjunkten Intervallen $V_+ \sqcup V_-$ nach $\text{Diff } \mathbb{R}$. Man kann sich überlegen, dass man jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus ϕ zur Identität homotopieren kann und jeden orientierungsumkehrenden diffeomorph zu minus der Identität: Eine surjektive glatte Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein orientierungserhaltender (-umkehrender) Diffeomorphismus, falls $\phi' > 0$ (< 0) ist. Wir wählen als Homotopie:

$$H(x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]) = \int_0^x ((1-t)\phi'(x) \pm t) dx + (1-t)\phi(0).$$

(+ falls ϕ orientierungserhaltend, - sonst).

Diese Homotopie hängt glatt von ϕ ab. Das impliziert mit letzter Folgerung insbesondere, dass die lokalen Trivialisierungen so gewählt werden können, dass die Übergangsfunktionen lokal konstant ± 1 sind. Daraus folgt, dass jedes solche Faserbündel entweder trivial oder zum Möbiusband isomorph ist.

*Sei $x \in \pi^{-1}(Z)$. Da $Z^z \subset M^m$ eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subset Z$ von $\pi(x) = y$ und eine Funktion $g: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{\ell:=m-z}$ mit $g^{-1}(0) = U$ und 0 als regulären Wert. Also ist insbesondere $d_y g$ surjektiv. Dann ist $\pi^{-1}(Z)$ in einer Umgebung von x gleich $(g \circ \pi)^{-1}(0)$. Wegen $d_x(g \circ \pi) = d_y g \circ d_x \pi$ ist $d_x(g \circ \pi): T_x \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ genau dann surjektiv (und damit 0 regulärer Wert von $g \circ \pi$ und damit $\pi^{-1}(Z)$ in einer Umgebung von x eine Mannigfaltigkeit), falls $d_y g$ das Bild von $d_x \pi$ surjektiv auf \mathbb{R}^ℓ abbildet. Da π allerdings eine Submersion ist, ist $d_x \pi$ surjektiv und damit auch $d_x(g \circ \pi)$.

(Ganz analog kann man so allgemeiner für eine Abbildung $f: E \rightarrow M$ ein Kriterium finden, wann $f^{-1}(Z) \subset E$ Untermannigfaltigkeit ist - Stichwort: Transversalität.)

1.1.2.2. Bündel-Trivialisierungslemma

Im Allgemeinen, also im Gegensatz zur Einschränkung oben, ist es nicht so einfach zu zeigen, dass etwas ein Faserbündel ist. Für die folgenden Konstruktionen wird uns folgender Satz helfen:

Satz 1.1.15 (Bündel-Trivialisierungslemma). *Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung. Seien F und M Mannigfaltigkeiten. Sei eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M zusammen mit bijektiven Abbildung $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ mit $pr_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ gegeben. Die Abbildungen*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

seien glatt. Dann trägt E eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass $\pi: E \rightarrow M$ Faserbündel mit Fasertyp F und lokalen Trivialisierungen ϕ_α ist.

Beweisskizze. Um eine glatte Struktur auf E zu erhalten, ist die Idee auf E_x die glatte Struktur von M mit der glatten Struktur auf F zu nutzen. Sei $p \in M$. Wir wählen α mit $p \in U_\alpha$. Sei $\kappa_p: V_p \subset M \rightarrow \hat{V}_p \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte um p . O.B.d.A. sei diese klein genug, dass $V_p \subset U_\alpha$ gilt. Weiterhin seien $\{\varkappa_\beta: \tilde{U}_\beta \subset F \rightarrow \hat{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n\}_{\beta \in J}$ Karten, die F überdecken ($\dim F = n$).

Wir setzen

$$\hat{\kappa}_{p,\beta} := (\kappa_p \times \varkappa_\beta) \circ \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(V_p)}$$

und erhalten eine Abbildung

$$\hat{\kappa}_{p,\beta}: (\hat{\kappa}_{p,\beta})^{-1}(\hat{V}_p \times \hat{U}_\beta) \subset \pi^{-1}(V_p) \subset E \rightarrow \hat{V}_p \times \hat{U}_\beta \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

Man überprüft direkt

1. $\{(\hat{\kappa}_{p,\beta})^{-1}(\hat{V}_p \times \hat{U}_\beta)\}_{p,\beta}$ ist Basis einer abzählbaren Hausdorffschen Topologie auf E .
2. $\{\hat{\kappa}_{p,\beta} \mid p \in M, \beta \in J\}$ ist ein glatter Atlas für E und damit hat E die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit:

Die Kartenwechsel $\hat{\kappa}_{p,\beta} \circ \hat{\kappa}_{p',\beta'}^{-1}$ haben die Form

$$(\kappa_p \times \varkappa_\beta) \circ \phi_\alpha \circ \phi_{\alpha'}^{-1} \circ (\kappa_{p'} \times \varkappa_{\beta'})^{-1}(x, v) = (\kappa_p \times \varkappa_\beta)(\kappa_{p'}^{-1}(x), \mu_{\alpha\alpha'}(\kappa_{p'}^{-1}(x))(\varkappa_{\beta'}^{-1}(v)))$$

3. Mit der obigen Mannigfaltigkeitsstruktur auf E sind die Abbildungen ϕ_α Diffeomorphismen und π ist glatt.
4. Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E mit den geforderten Eigenschaften. \square

Mit diesem Satz können wir nun zeigen, dass die folgenden Konstruktionen wieder Faserbündel liefern. Bei all diesen Konstruktionen werden auch Isomorphieklassen respektiert, was wir nicht immer dazu sagen werden, aber direkt klar durch die Konstruktionen ist.

Idee der Kartenkonstruktion:
[Bundtriv.mp4](#)

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

1.1.2.3. Produkt zweier Faserbündel

Seien $\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M'$ Faserbündel mit Fasertyp F bzw. F' . Dann ist

$$(\pi, \pi'): E \times E' \rightarrow M \times M', \quad (e, e') \mapsto (\pi(e), \pi'(e'))$$

ist ein Faserbündel über $M \times M'$ mit Fasertyp $F \times F'$.

Beweis. Seien ϕ_α bzw. $\phi'_{\alpha'}$ lokale Trivialisierungen von E bzw. E' zu einer offenen Überdeckung U_α von M bzw. $U'_{\alpha'}$ von M' . Die zugehörigen Übergangsfunktionen nennen wir $\mu_{\alpha\beta}$ und $\mu'_{\alpha'\beta'}$. Dann ist $\{U_\alpha \times U'_{\alpha'}\}_{(\alpha, \alpha')}$ eine offene Überdeckung von $M \times M'$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{(\alpha, \alpha')}: (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha \times U'_{\alpha'}) &\rightarrow U_\alpha \times F \times U'_{\alpha'} \times F' \cong U_\alpha \times U'_{\alpha'} \times F \times F' \\ (e, e') &\mapsto (\phi_\alpha(e), \phi'_{\alpha'}(e')). \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\phi}_{(\alpha, \alpha')} \circ (\tilde{\phi}_{(\beta, \beta')})^{-1}(x, y, v, w) = (x, y, \mu_{\alpha\beta}(v), \mu'_{\alpha'\beta'}(w))$. Die Voraussetzungen von Satz 1.1.15 sind alle erfüllt, und damit folgt, dass $E \times E'$ wieder ein Faserbündel ist. \square

1.1.2.4. Summe zweier Faserbündel

$\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M$ über der gleichen Basis und mit Fasertyp F bzw. F' . Dann ist

$$\tilde{\pi}: E \oplus E' := \{(e, e') \in E \times E' \mid \pi(e) = \pi'(e')\} \rightarrow M$$

ist ein Faserbündel mit Fasertyp $F \times F'$.

Beweis. Es ist $\tilde{\pi}^{-1}(x) = E_x \times E'_x$. Seien ϕ_α bzw. $\phi'_{\alpha'}$ lokale Trivialisierungen von E bzw. E' zu einer offenen Überdeckung U_α von M . Sei $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow F$ definiert durch $\phi_\alpha(e_x) = (x, \psi_\alpha(e_x))$ und analog $\psi'_{\alpha'}$. Wir setzen $\tilde{\phi}_\alpha: (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \times F'$, $(e_x, e'_x) \mapsto (x, \psi_\alpha(e_x), \psi'_{\alpha'}(e'_x))$ und können dann wieder Satz 1.1.15 anwenden. \square

1.1.2.5. Unterbündel

Sei $\pi: E' \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F . Sei $E \subset E'$ eine Teilmenge, so dass $\pi|_E: E \rightarrow M$ wieder ein Faserbündel ist, dann nennen wir E ein *Unterbündel* von E' .

Beispiel 1.1.16. (i) Ist $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, dann ist TM ein Unterbündel vom trivialen Bündel $T\mathbb{R}^n|_M \cong M \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Das kanonische Geradenbündel τ über $\mathbb{K}P^n$ (s. Beispiel 1.1.2) ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{\text{Pr}_1} \mathbb{K}P^n$.

1.1.2.6. Pullbackbündel

Satz 1.1.17. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F und $f: M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann ist das Pullbackbündel definiert durch

$$f^*E := \{(x, e) \in M' \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$$

mit $\pi': f^*E \rightarrow M'$, $(x, e) \mapsto x$, ein Faserbündel über M' mit Fasertyp F .

Insbesondere definiert

$$\begin{array}{ccc} (x, e) \in f^*E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & e \in E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in M' & \xrightarrow{f} & f(x) \in M \end{array}$$

einen Bündelmorphismus, der für alle $x \in M$ die Faser $(f^*E)_x$ diffeomorph auf $E_{f(x)}$ abbildet.

Beweis. Seien $\mu_{\alpha\beta}$ die Übergangsfunktionen von E zur offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M . Dann ist $U'_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ eine offene Überdeckung von M' . Es gilt $f \circ \pi' = \pi \circ \text{pr}_2$ und damit $(\pi')^{-1}(U'_\alpha) = (\pi')^{-1} \circ f^{-1}(U_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha)$. Wir setzen

$$\phi'_\alpha := (\pi', \text{pr}_2 \circ \phi_\alpha \circ \text{pr}_2): (\pi')^{-1}(U'_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U'_\alpha \times F.$$

Damit ist automatisch $\text{pr}_1 \circ \phi'_\alpha = \pi'$ und $(\pi')^{-1}(x) = E_x$. Weiterhin ist $\phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1} = \text{id} \times (\mu'_{\beta\alpha} := \mu_{\beta\alpha} \circ f)$, denn für $(x, e) \in (\pi')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ (und damit ist insbesondere $f(x) = \pi(e)$) und $\phi'_\alpha(x, e) =: (x, v)$ gilt

$$\begin{aligned} \phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, v) &\stackrel{(x, v) = \phi'_\alpha(x, e) = (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\alpha(e))}{=} \phi'_\beta(x, e) = (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta(e)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha(e)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(\pi(e) = f(x), v)) \\ &= (x, \text{pr}_2 \circ (f(x), \mu_{\beta\alpha}(f(x))v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(f(x))v). \end{aligned}$$

Mit Satz 1.1.15 folgt, dass f^*E ein Faserbündel ist. □

Als nächstes betrachten wir eine Charakterisierung des Pullbackbündels:

Lemma 1.1.18. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel und $f: M' \rightarrow M$. Dann ist f^*E das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Faserbündel, für welches es einen Faserbündelmorphismus $g: f^*E \rightarrow E$ über $f: M' \rightarrow M$ gibt, so dass $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$ für alle $x \in M'$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Sei $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M'$ ein Faserbündel vom Fasertyp F und $g: \tilde{E} \rightarrow E$ ein Faserbündelmorphismus wie oben gefordert. Betrachten wir $G: \tilde{E} \rightarrow f^*E$, $e' \mapsto (\tilde{\pi}(e'), g(e'))$. Dann bildet G in f^*E ab, da g Faserbündelmorphismus über f ist und damit $f(\tilde{\pi}(e')) = \pi(g(e'))$ gilt. Die Abbildung G ist ein Faserbündelmorphismus und das Diagramm

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

$$\begin{array}{ccc}
 e' \in \tilde{E} & \xrightarrow{G} & (\tilde{\pi}(e'), g(e')) \in f^*E \\
 \downarrow g & & \swarrow \text{pr}_2 \\
 g(e') \in E & &
 \end{array}$$

kommutiert faserweise. Insbesondere ist damit G auf jeder Faser ein Diffeomorphismus und damit ist das Faserbündel \tilde{E} isomorph zu f^*E . \square

Für Faserbündel gelten folgende Rechenregeln:

Lemma 1.1.19. *Seien E, E_i Faserbündel über M und $f: M' \rightarrow M$, $f': M'' \rightarrow M'$ glatt. Dann haben wir folgende Bündelisomorphismen:*

(i) $(f')^* f^* E \cong (f \circ f')^* E$

(ii) $\text{id}^* E \cong E$

(iii) $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$

(iv) *Ist $\iota: N \hookrightarrow M$ eine Einbettung, dann ist $\iota^* E \cong E|_N$.*

Beweis. Direkt klar auf dem Level der Übergangsfunktionen. \square

Beispiel 1.1.20. (i) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel und $f: M' \rightarrow M$. Besteht das Bild von f nur aus einem Punkt $y \in M$. Dann ist f^*E isomorph zum trivialen Bündel $M' \times \pi^{-1}(y)$.

(ii) Sei $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Quotientenabbildung. Dann ist $q^*T\mathbb{R}P^n$ isomorph zu TS^n .

(iii) Sei $\pi: E \rightarrow S^1$ das Möbiusband und $f: z \in S^1 \rightarrow z^2 \in S^1$. Dann ist f^*E das triviale Bündel, vgl. Übungsaufgabe 6.

Satz 1.1.21. *Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel. Sei $f: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Setze $f_t := f(t, \cdot)$. Also ist f_0 glatt homotop zu f_1 . Dann gilt $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$.*

Beweis. Es gilt $f^*(E)|_{\{t\} \times M'} \cong f_t^*(E)$. Damit folgt der Rest aus Satz 1.1.12. \square

Folgerung 1.1.22. *Sei $f: M \rightarrow M'$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist*

$$f^*: \{\text{Faserbündel über } M' \text{ mit Faser } F\} \rightarrow \{\text{Faserbündel über } M \text{ mit Faser } F\}$$

eine Bijektion. Insbesondere ist jedes Faserbündel über einer zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit trivial.

Beweis. Da f Homotopieäquivalenz ist, gibt es $g: M' \rightarrow M$, so dass $f \circ g$ homotop zu $\text{id}_{M'}$ und $g \circ f$ homotop zu id_M ist. Damit ist nach letztem Satz $g^* f^* E \cong E$ und $f^* g^* E' \cong E'$ und somit g^* , die zu dem f^* von oben inverse Abbildung. \square

1.1.2.7. Überlagerungen als weiteres Beispiel

Eine *Überlagerung* ist ein Faserbündel, so dass die zugehörige Projektion ein lokaler Homöomorphismus ist. Die zugehörige Faser ist dann ein diskreter Raum.

Beispiel 1.1.23. (i) $\pi: S^1 \rightarrow S^1, z \rightarrow z^k$, ist eine Überlagerung mit Faser \mathbb{Z}_k .

(ii) $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, z \rightarrow z \bmod 1$, ist eine Überlagerung mit Faser \mathbb{N} .

1.2. Vektorbündel

Wir haben in Abschnitt 1.1 als Spezialfall von Faserbündeln schon Vektorbündel definiert, siehe Definition 1.1.4. Hier wollen wir nun mehr Eigenschaften von solch speziellen Faserbündeln diskutieren.

Im Folgenden sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vom Rang r , $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und ϕ_α lokale Trivialisierungen von E .

1.2.1. Schnitte

Die Menge der glatten Schnitte von E ,

$$\Gamma(E) := \{s \in C^\infty(M, E) \mid \pi \circ s = \text{id}_M\},$$

ist im Gegensatz zum allgemeinen Faserbündel nie leer, da E auf jeder Faser eine Vektorraumstruktur trägt. Deshalb gibt es insbesondere den Nullschnitt $s(x) = 0 \in E_x$. Aber jedes Vektorbündel hat sogar immer unendlich viele Schnitte - wie sieht man das: Lokal (d.h. über U_α) gibt es immer unendlich viele Schnitte - z.B. die konstanten Schnitte: $x \in U_\alpha \mapsto c_\alpha \in \mathbb{K}^r$, die man mittels einer Zerlegung der Eins zu einem glatten Schnitt von ganz E zusammenkleben kann. Dazu sei ρ_α eine zu $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir setzen $s(x) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x) \phi_\alpha^{-1}(x, c_\alpha)$. Dann ist $s: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}$. Da die ρ_α und ϕ_α glatt sind, ist auch s glatt.

Bemerkung 1.2.1. $\Gamma(E)$ ist ein $C^\infty(M)$ -Modul und damit insbesondere ein \mathbb{K} -Vektorraum (Vektorraumstruktur: $(fs + s')(p) := f(p)s(p) + s'(p)$ für $s, s' \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{K})$).

Da Vektorbündel lokal trivial sind, ist $\Gamma(E)$ lokal frei erzeugt:

Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, so dass $E|_U$ lokal trivial ist, also $\phi_U: E_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$. Dann erzeugen z.B. $s_i(x) := \phi_U^{-1}(x, e_i)$ für e_i eine Basis von \mathbb{R}^r frei den Modul $\Gamma(E|_U)^*$. Eine Menge von s_i , die $\Gamma(E|_U)$ frei erzeugen und für die die $s_i(x)$ für alle $x \in U$ eine Basis von E_x sind, nennen wir *lokalen Rahmen*.

*Erzeugen heißt, dass es für jeden Schnitt $s \in \Gamma(E|_U)$ Funktionen $a^i \in C^\infty(U)$ mit $s(x) = \sum a^i(x) s_i(x)$ für alle $x \in U$ gibt. Frei erzeugen heißt, dass diese a^i eindeutig bestimmt sind - und damit insbesondere $s_i(x)$ eine Basis von E_x ist.

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Ist M kompakt, dann ist $\Gamma(E)$ damit auch endlich erzeugt*, da E dann mittels endlich vieler lokaler Trivialisierungen überdeckt werden kann. Aber i.A. ist $\Gamma(E)$ nicht frei erzeugt, vgl. Satz 1.2.19.

Lemma 1.2.2. *Ein \mathbb{K} -Vektorbündel ist genau dann trivial (d.h. isomorph als Vektorbündel zu $M \times \mathbb{K}^r \rightarrow M$ für ein $r > 0$), wenn es r Schnitte s_1, \dots, s_r gibt, so dass $s_1(x), \dots, s_r(x)$ für jedes $x \in M$ linear unabhängige Vektoren in E_x sind.*

Beweis. Habe E solche Schnitte s_i . Dann definieren wir die glatte Abbildung $h: M \times \mathbb{K}^r \rightarrow E$ durch $(x, t^1, \dots, t^r) \mapsto t^i s_i(x)$. Das ist ein linearer Isomorphismus in jeder Faser und stetig. Nach folgendem Lemma ist auch h^{-1} stetig und damit h ein Vektorbündelisomorphismus. \square

Lemma 1.2.3. *Eine glatte Abbildung $f: E \rightarrow E'$ zwischen zwei \mathbb{K} -Vektorbündeln $\pi: E \rightarrow M$ bzw. $\pi': E' \rightarrow M$, welche für jedes $x \in M$ die Faser $\pi^{-1}(x)$ linear isomorph auf $(\pi')^{-1}(x)$ abbildet, ist ein Vektorbündelisomorphismus.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt direkt, dass f bijektiv ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass auch f^{-1} glatt ist.

Da das eine lokale Aussage ist, reicht es, offene Teilmengen $U \subset M$ zu betrachten, über die E und E' trivial sind (zugehörige Trivialisierungen seien ϕ und ϕ'). Damit ergibt sich die Abbildung $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}: U \times \mathbb{K}^r \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$, $(u, v) \mapsto (u, g(u)(v))$ für ein $g \in C^\infty(U, \text{GL}_r(\mathbb{K}))$. Dann ist auch $g^{-1}: u \in U \mapsto (g(u))^{-1} \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ glatt und damit auch die Inverse $h^{-1}(u, v) = (u, g(u)^{-1}(v))$. Also ist auch $f^{-1}|_{\pi^{-1}(U)}$ glatt und somit auch f^{-1} . \square

Im Möbiusband hat jeder Schnitt mindestens eine Nullstelle. D.h. hier sehen wir nochmal (nach letztem Lemma), dass das Möbiusband als Vektorbündel nicht trivial ist.

1.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln

Da Vektorbündel ein Spezialfall von Faserbündeln sind, liegt es nahe mal zu überprüfen, welche der Konstruktionen von Faserbündel aus Abschnitt 1.1.1 und 1.1.2 auch Vektorbündel liefern. D.h. muss man Zusatzforderungen stellen (und wenn ja welche sind dann sinnvoll), damit die resultierenden Faserbündel wieder Vektorbündel sind?

Das erste, was wir bemerken (vgl. Übungsaufgabe 3), ist: Im Falle eines (reellen) Vektorbündels von Rang r sind die $\mu_{\alpha\beta}$ glatte Abbildungen von $U_\alpha \cap U_\beta$ in $\text{GL}_r(\mathbb{R})$. Wir erhalten folgende angepassten Sätze – die Änderungen sind in **dunkelrot** gekennzeichnet. Wir beschränken uns hier auf reelle Vektorbündel, die Aussagen für komplexe Vektorbündel gelten ganz analog.

Satz 1.2.4. *(Vektorbündelversion von Satz 1.1.8 - vgl. Übungsaufgabe 3) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{R})$ glatte Abbildungen,*

*Ein R -Modul P ist endlich erzeugt, wenn es $a_1, \dots, a_n \in R$ gibt mit $P = \{r^i a_i \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$.

1.2. Vektorbündel

die die Kozykelbedingung erfüllen, dann gibt es (bis auf Isomorphie (*hier jetzt immer Isomorphie von Vektorbündeln*)) ein eindeutiges *reelles Vektorbündel*, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

Folgerung 1.2.5. Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp $F = \mathbb{R}^r$. Ist das Bild der Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ (zu einer Überdeckung durch lokale Trivialisierungen) Teilmenge von $GL_r(\mathbb{R}) \subset \text{Diff}(\mathbb{R}^r)$, dann ist E ein reelles Vektorbündel vom Rang r .

Satz 1.2.6. (Vektorbündelversion von Satz 1.1.9) Gegeben zwei *reelle Vektorbündel* E, E' über M vom Rang r . Zu einer gegebenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die Vektorbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, GL_r(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Insbesondere ist das Vektorbündel E trivial, wenn $\mu_{\beta\alpha} = h_\beta h_\alpha^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Satz 1.2.7. (Vektorbündelversion von Satz 1.1.12) Sei $\pi: E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein *Vektorbündel vom Rang r* . Dann sind die Einschränkungen $E|_{M \times \{0\}}$ und $E|_{M \times \{1\}}$ isomorphe *Vektorbündel vom Rang r* über M .

Folgerung 1.2.8. (Vektorbündelversion von Folgerung 1.1.13) Seien $E_i \rightarrow M, i = 0, 1$, *reelle Vektorbündel vom Rang r* mit lokalen Trivialisierungen ϕ_α^i und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$. Für alle α, β seien die $\mu_{\alpha\beta}^0$ und $\mu_{\alpha\beta}^1$ homotope Abbildungen mit Homotopie $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$, so dass zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind E_0 und E_1 als Vektorbündel isomorph.

1.2.2.1. Operationen auf Vektorbündel

Satz 1.2.9 (Bündel-Trivialisierungslemma – Vektorbündelversion von Satz 1.1.15). Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M gegeben zusammen mit bijektiven Abbildung $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ mit $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ gegeben. Die Abbildungen

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$$

seien glatt und der Form

$$\phi_\beta \circ (\phi_\alpha)^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\beta\alpha}(v))$$

für glatte Abbildungen $\mu_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$. Dann trägt E eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass $\pi: E \rightarrow M$ *reelles Vektorbündel vom Rang r* und lokalen Trivialisierungen ϕ_α ist.

Die Operationen auf Faserbündel aus Abschnitt 1.1.2 auf Vektorbündel angewendet, geben auch wieder ein Vektorbündel aus. Nur fürs Untervektorbündel muss man natürlich zusätzlich fordern, dass $\pi|_E$ selbst ein Vektorbündel ist:

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Beispiel 1.2.10. Sei $\psi: E \rightarrow E'$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen $\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M'$ über $f: M \rightarrow M'$, so dass $\psi|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ für alle $x \in M$ den gleichen Rang hat. Dann ist $\ker \psi := \{e \mid \psi(e) = 0 \in E'_{\pi'(e)}, e \in E\}$ ein Untervektorbündel von E . Gleiches gilt dann auch für $\text{im } \psi := \{e' \in E' \mid \exists e \in E : \psi(e) = e'\}$.

Ohne die konstante Rang Bedingung ist das falsch, da sie nicht automatisch erfüllt ist: Seien $E = E' = \mathbb{R}^2$ das triviale Geradenbündel über $M = \mathbb{R}$ ($\pi = \text{pr}_1$). Sei $f = \text{id}$ und $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x \in M, y \in \mathbb{R}) \mapsto (x, x \cdot y)$. Dann ist

$$(\ker \psi)|_x = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \mathbb{R} & x = 0. \end{cases}$$

Sehr oft wird davon insbesondere die direkte Summe $E \oplus E'$ zweier Vektorbündel E, E' über M (Im Kontext von Vektorbündeln auch *Whitney-Summe* genannt.) verwendet. Hier gilt

$$\Gamma(E \oplus E') \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(E'),$$

wobei \cong hier isomorph als $C^\infty(M)$ -Modul bedeutet.

Für den Pullback von Vektorbündel gilt folgende Version von Lemma 1.1.18.

Lemma 1.2.11. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein *Vektorbündel* und $f: M' \rightarrow M$. Dann ist f^*E das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte *Vektorbündel*, für welches es einen Bündelmorphismus $g: f^*E \rightarrow E$ gibt, so dass $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$ für alle $x \in M'$ ein *Vektorraumisomorphismus* ist.

Zusätzlich sind die Bündelmorphismen in Lemma 1.1.19 für Vektorbündel schon Vektorbündelisomorphismen. Außerdem gibt es für Vektorbündel noch folgende Operationen:

1.2.2.2. Duales Vektorbündel

Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über \mathbb{K} vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen ϕ_α und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$.

Sei $E^* := \bigsqcup_{x \in M} E_x^*$, wobei E_x^* das Dual des Vektorraums $E_x = \pi^{-1}(x)$ ist. Wir definieren

$$\pi': E^* \rightarrow M \text{ als } \pi'(L_x \in E_x^*) \mapsto x$$

sowie

$$\begin{aligned} \phi'_\alpha: (\pi')^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x^* \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r)^* \\ L_x \in E_x^* &\mapsto (\pi'(L_x) = x, (v \in \mathbb{K}^r \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, v))). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Übergangsfunktionen $\mu'_{\beta\alpha}$ sind durch $\mu'_{\beta\alpha} = (\mu_{\alpha\beta})^*$ gegeben, wobei $*$ die duale Abbildung meint, also $\mu'_{\beta\alpha}(x)(f \in (\mathbb{K}^r)^*)(v \in \mathbb{K}^r) = (\mu_{\alpha\beta}(x))^* f(v) = f(\mu_{\alpha\beta}(x)(v))$.

Nachrechnen der Form von $\mu'_{\beta\alpha}$:

Erklärung der
Rechenschritte: [dualvb.mp4](#)

$$\begin{aligned} (x, \mu'_{\beta\alpha}(x)(f \in (\mathbb{K}^r)^*)) &\stackrel{!}{=} \phi'_\beta \circ (\phi'_\alpha)^{-1}(x, f) \stackrel{f(v)=L_x(\phi_\alpha^{-1}(x,v))}{=} \phi'_\beta(L_x) \\ &= (x, (v \mapsto L_x(\phi_\beta^{-1}(x, v)))) = (x, (v \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, v)))) \\ &= (x, (v \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, \mu_{\alpha\beta}(x)v)))) = (x, (v \mapsto f(\mu_{\alpha\beta}(x)v))) \end{aligned}$$

und es gilt $\Gamma(E^*) \cong (\Gamma(E))^*$.

Nach Satz 1.2.9 macht dies $E^* \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel. Wir nennen es das *zu E duales Bündel*.

Beispiel 1.2.12 (Kotangentialbündel $T^*M := (TM)^*$). Ein Element $\alpha \in \Gamma(T^*M) =: \Omega^1(M)$, genannt *1-Form* ist eine glatte Abbildung mit $\alpha(x) \in T_x^*M := (T_xM)^*$. In lokalen Koordinaten x^i auf U hat TM die lokale Basis $\partial_{x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i}$. Man definiert $dx^i: TU \rightarrow \mathbb{R}$ durch $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$ und $C^\infty(U)$ -lineare Fortsetzung. Dann hat α die lokale Darstellung $\alpha_i dx^i$ für $\alpha_i \in C^\infty(U)$, vgl. [2, Kap. II.10.3].

Ähnlich wie Einsformen lassen sich auch Tensoren und Differentialformen auf M , vgl. [2, Kap. II.10.3] als Schnitte eines geeigneten Vektorbündels darstellen/einführen:

1.2.2.3. Tensorprodukt von Vektorbündeln (= Whitney-Produkt)

Seien $\pi: E \rightarrow M$ bzw. $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$ Vektorbündel über \mathbb{K} vom Rang r bzw. \tilde{r} . Seien ϕ_α bzw. $\tilde{\phi}_\alpha$ lokale Trivialisierungen von E bzw. \tilde{E} bzgl. einer offenen Überdeckung U_α von M .

Wir setzen $E \otimes \tilde{E} := E \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E} := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x$ und $\pi^\otimes: e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \mapsto x \in M$. Die Topologie und glatte Struktur auf $E \otimes \tilde{E}$ wird durch

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^\otimes: (\pi^\otimes)^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\tilde{r}} \cong \mathbb{K}^{r\tilde{r}}) \\ e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x &\mapsto (x, \psi_\alpha(e_x) \otimes \tilde{\psi}_\alpha(\tilde{e}_x)) \end{aligned}$$

bestimmt mit $\phi_\alpha^\otimes(e \in E_x) = (x, \psi_\alpha^\otimes(e))$. Die neuen Übergangsfunktionen sind einfach das Tensorprodukt der alten. Das resultierende Bündel $E \otimes \tilde{E}$ nennen wir das *Tensorprodukt* beider Bündel. Es gilt

$$\Gamma(E \otimes_{\mathbb{K}} E') \cong \Gamma(E) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{K})} \Gamma(E').$$

Bemerkung 1.2.13. Ist s_α bzw. s'_α ein lokaler Rahmen von E bzw. E' über U_α , dann ist $s_\alpha \otimes s'_\alpha$ ein lokaler Rahmen von $E \otimes E'$. Für

$$T_r^s M := \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{s\text{-mal}}$$

– dem (r, s) -Tensorbündel von M – ist damit $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$ für $1 \leq i_k, j_\ell \leq m$ ein lokaler Rahmen. So ist z.B. $s \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ in lokalen

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

Koordinaten x^i über U gegeben durch $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j$ für $a_j^i \in C^\infty(U)$ und kann wegen $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j = (a_j^i \partial_{x^i}) \otimes dx^j = \partial_{x^i} \otimes (a_j^i dx^j)$ auch als Schnitt in $\Gamma(TM) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma^*(TM)$ angesehen werden.

Beispiel 1.2.14 ((Semi-)Riemannsche Metriken). Eine Riemannsche Metrik g ist in jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform g_x , welche glatt vom Punkt x abhängt, vgl. [2, Def. II.1.1]. Dort mussten wir noch direkt in lokalen Karten hinschreiben, was es bedeutet, dass g_x glatt vom Punkt abhängt. Mit der Bündelsprache haben wir jetzt, dass eine Riemannsche Metrik g insbesondere eine glatte Abbildung $g: TM \otimes TM \rightarrow \mathbb{R}$ ist und damit ist $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \cong \Gamma(T^*M) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma(T^*M)$ – ein $(0, 2)$ -Tensor – ist.

Bemerkung 1.2.15. Der Pullback aus Abschnitt 1.1.2.6 erfüllt für Vektorbündel noch zusätzlich $f^*(E_1 \otimes E_2) = f^*E_1 \otimes f^*E_2$. Das sieht man wieder direkt auf dem Level der Übergangsfunktionen.

Wie bei Vektorräume gibt es eine Paarung von einem Vektorbündel mit seinem dualen:

$$\Gamma(E^* \otimes E) \rightarrow \Gamma(M \times \mathbb{K} \rightarrow M), (\alpha \otimes s)(x \in M) := \underbrace{\alpha(x)}_{\in E_x^*} \underbrace{(s(x))}_{\in E} \in \{x\} \times \mathbb{K}.$$

1.2.2.4. Homomorphismenbündel

Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Tensorproduktabschnitt von oben, setzen wir

$$\text{Hom}(E, \tilde{E}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \text{ und } \hat{\pi}: L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \mapsto x \in M.$$

Die Topologie und glatte Struktur auf $\text{Hom}(E, \tilde{E})$ wird durch

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\alpha: \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \\ L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) &\mapsto (x, \Psi) \end{aligned}$$

mit $\Psi(v \in \mathbb{K}^{\tilde{r}}) := (\tilde{\psi}_\alpha \circ L_x \circ \psi_\alpha^{-1})(v)$ bestimmt. Es ist $\text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \cong (\mathbb{K}^*)^r \otimes \mathbb{K}^{\tilde{r}}$. Die Übergangsfunktionen sind $\mu_{\beta\alpha}^* \otimes \tilde{\mu}_{\alpha\beta}$, wobei wir die letzte Isomorphie genutzt haben. Das resultierende Bündel $\text{Hom}(E, \tilde{E})$ nennen wir das *Homomorphismenbündel* beider Bündel. Es ist vom Rang $r\tilde{r}$, und es gilt $\text{Hom}(E, \tilde{E}) \cong E^* \otimes \tilde{E}$.

Ist $E = \tilde{E}$, setzen wir $\text{End}(E) := \text{Hom}(E, E)$ und nennen es das *Endomorphismenbündel* von E .

Beispiel 1.2.16 (Riemannscher Krümmungstensor). $R \in \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM \otimes TM \otimes TM, TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ – ein $(1, 3)$ -Tensor.

1.2.2.5. Äußeres Produkt

Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r , lokalen Trivialisierungen ϕ_α und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$. Wir setzen

$$\Lambda^k(E) := \sqcup_{x \in M} \Lambda^k(E_x) \text{ und definieren } \hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M \text{ durch } \pi^{-1}(x) = \Lambda^k(E_x).$$

Hier ist $\Lambda^k(E_x)$ das k -fache äußere Produkt des Vektorraums E_x , vgl. [2, S. 75].

Ist e_i eine Basis von \mathbb{K}^r . Dann ist $s_{\alpha,i}(x) := \phi_\alpha^{-1}(x, e_i)$ ein lokaler Rahmen von E . Wir setzen

$$a^{i_1 < \dots < i_k} s_{\alpha, i_1}(x) \wedge \dots \wedge s_{\alpha, i_k}(x)^* \in \Lambda^k(E_x) \subset \Lambda^k(E)|_{U_\alpha} \mapsto a^{i_1 < \dots < i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

zu einer wohl-definierten Abbildung $\Lambda^k \phi_\alpha: \Lambda^k(E)|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \Lambda^k(\mathbb{K}^r)$ zusammen, die faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist. Mit Satz 1.1.15 folgt, dass $\hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang $\binom{r}{k}$ ist.

Wir setzen $\Lambda^0(E) := M \times \mathbb{K}$ —das triviale Vektorbündel über M vom Rang 1.

Für $k > 0$ ist $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k(E^*))$ eine Abbildung mit $\alpha(x \in M) \in \Lambda^k(E_x^*)$, also $\alpha(x): E_x \times \dots \times E_x \rightarrow \mathbb{K}$ ist multilinear und alternierend, und die Abhängigkeit von x ist glatt, d.h. man kann α auch als Abbildung $\alpha: \Gamma(E)^k = \Gamma(E) \times \dots \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$, die multilinear (bzgl. der $C^\infty(M)$ -Modul Struktur von $\Gamma(E)$, also $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten) und alternierend ist, auffassen. Weiterhin ist $\Gamma(\Lambda^0 E) = C^\infty(M)$ und wir setzen $\Gamma(\Lambda^* E) = \bigoplus_{k=0}^\infty \Gamma(\Lambda^k E)$.

Beispiel 1.2.17.

(i) Im Spezialfall $E = T^*M$ kürzt man ab: $\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M)$ und $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k M)$. Elemente aus $\Omega^k(M)$ heißen k -(Differential)Formen. Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$. Dann ist $\alpha_x := \alpha(x) \in \Lambda^k T_x^* M$. Seien x^i lokale Koordinaten auf $U \subset M$ um x . Dann ist $\partial_{x^i}|_x$ eine Basis von $T_x M$ und $dx^i|_x$ die zugehörige duale Basis von $T_x^* M$. Damit ist $\alpha(x) = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1}|_x \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x$. Variiert man x , ist ∂_{x^i} ein lokaler Rahmen von $TU = TM|_U$ und dx^i von $T^*U = T^*M|_U$ und damit $\alpha|_U = a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$.

(ii) Das Vektorbündel $\Lambda^m M \rightarrow M$ mit $m = \dim M$ ist genau dann trivial, wenn M orientierbar[†] ist.

Beweis. $\Lambda^m M$ ist ein Vektorbündel von Rang $\binom{m}{m} = 1$. Sei $\Lambda^m M$ das triviale Vektorbündel. Dann gibt es nach Lemma 1.2.2 eine m -Form ω , so dass $\Lambda^m(T_p M) \ni \omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ ist. Ein solches ω heißt *Volumenform* von M . Damit entspricht die Behauptung der Aussage: M ist genau dann orientierbar, wenn M eine Volumenform besitzt. Das haben wir in [2, Satz II.10.17] bewiesen. \square

*Wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention.

† M heißt orientierbar, falls es Karten $\kappa_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m$ von M gibt, die M überdecken, und für alle i, j und $p \in U_i \cap U_j \subset M$ gilt $\det d_{\kappa_i(p)}(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}) > 0$.

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

- (iii) Wir betrachten die faserweise lineare Abbildung $\iota: \Lambda^k E \rightarrow E \otimes \dots \otimes E =: E^{\otimes k}$ gegeben durch $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}$ für $i_1 < \dots < i_k$. Das macht ι zu einem wohldefinierter injektiver Bündelmorphismus. So kann $\Lambda^k E$ als Untervektorbündel von $E^{\otimes k}$ betrachtet werden. Weiterhin ist diese Einbettung kompatibel mit der Paarung für die dualen Bündel: Es ist für $\alpha \in \Lambda^k E_x^*$ und $X_i \in E_x$

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \iota(\alpha)(X_1, \dots, X_k)$$

wobei $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(X_1, \dots, X_k) = \prod_j e_{i_j}^*(X_j)$ für eine Basis e_i von E_x gilt.

- (iv) Betrachten wir $\Lambda^k T^*M \otimes E$. Dann ist ein Schnitt eine multilineare alternierende Abbildung $\alpha: TM \times \dots \times TM \rightarrow E$ – genannt eine k -Form mit Werten in E . Wir setzen $\Omega^k(M, E) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$. Da $\Lambda^0(T^*M) \cong M \times \mathbb{R}$ und $(M \times \mathbb{R}) \otimes E \cong E$, können wir $\Omega^0(M, E)$ mit $\Gamma(E)$ identifizieren.

1.2.2.6. Konjugiertes Vektorbündel

Ist $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel. Dann ist $\bar{E} := \sqcup_{x \in M} \bar{E}_x \rightarrow M$, $\bar{e} \in \bar{E}_x \mapsto x \in M$ wieder ein komplexes Vektorbündel. Hierbei ist als Menge $E_x = \bar{E}_x$, aber ist $(z, e) \mapsto ze$ die skalare Multiplikation auf E_x , dann ist die auf \bar{E}_x gegeben durch $(z, e) \mapsto \bar{z}e$.

1.2.2.7. Graßmannbündel

Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r und sei $d \leq r$. Für $x \in M$ ist $G_d(E_x) := \{d\text{-dimensionale Untervektorräume von } E_x\}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $O(r)/(O(d) \times O(r-d))$, vgl. Beispiel A.2.7(ii). Sei $G_d(E) = \sqcup_{x \in M} G_d(E_x)$ zusammen mit der Projektionsabbildung $\pi: e \in G_d(E_x) \subset G_d(E) \mapsto x \in M$ gegeben. Um eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $G_d(E)$ zu erhalten, sei U_α eine offene Überdeckung von M mit Karten $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Wir setzen $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G_d(\mathbb{R}^n)$, $e \mapsto (\pi(e), \{d_{\pi(e)} \kappa_\alpha(v) \mid v \in e\})$. Zusammen mit Satz 1.2.9 ist $G_d(E) \rightarrow M$ damit ein Vektorbündel.

1.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel

Für Mannigfaltigkeiten* wissen wir, dass diese immer als Untermannigfaltigkeit eines genügend hochdimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^n aufgefasst werden können. Das ist der Einbettungssatz von Whitney [2, Satz I.3.40]. Wir werden nun sehen, dass man jedes Vektorbündel $E \rightarrow M$ als Untervektorbündel eines trivialen Vektorbündels über M auffassen kann. Wir werden uns auf kompakte M einschränken:

Satz 1.2.18. *Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit M kompakt. Dann gibt es ein Vektorbündel $\pi': E' \rightarrow M$, so dass $E \oplus E'$ trivial ist.*

Beweis. Sei U_α , $\alpha = 1, \dots, k$, eine endliche Überdeckung von M , so dass $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ gilt. Sei ρ^α eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Seien s_i^α ein lokaler

*Bei uns immer mit abzählbarer Basis

1.2. Vektorbündel

Rahmen von $E|_{U_\alpha}$. Wir setzen $t_i^\alpha := \rho^\alpha s_i^\alpha$. Durch Fortsetzen durch 0 können wir diese t_i^α als Schnitte auf ganz E auffassen. Wir betrachten den Vektorbündelhomomorphismus

$$A: M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E \quad (x, a_\alpha^i) \mapsto a_\alpha^i t_i^\alpha(x).$$

Da für jedes $x \in M$ die $t_i^\alpha(x)$ den Vektorraum E_x erzeugen, ist $A_x: \{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E_x$ surjektiv. Also ist E das Bild von A .

Man kann dann zeigen, dass es einen Vektorbündelhomomorphismus $B: E \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ mit $AB = \text{id}_E$ gibt, vgl. [5, Thm. I.5.13]*. Insbesondere heißt das, dass B injektiv ist.

Sei E' der Kern von $p := BA$. Wir zeigen, dass p konstanten Rang hat und E' damit nach Beispiel 1.2.10 ein Untervektorbündel des trivialen Bündels $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ ist: Es ist $p^2 = BABA = BA = p$ – also faserweise eine Projektion.† Sei

$$p_x := (BA)|_{\{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})} \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})) \quad \text{und} \quad x_0 \in M.$$

Wir setzen $f(x) = \text{Id} - p_x - p_{x_0} - 2p_{x_0}p_x \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}))$. Dann ist $p_{x_0}f(x) = f(x)p_x$, womit das folgende Diagramm kommutiert: (mit $\hat{f}(x, a) := f(x)(a)$)

$$\begin{array}{ccc} M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{p} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{id} \times p_{x_0}} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \end{array}$$

Da $f(x_0) = \text{Id}$ ist, ist $f(x)$ für x in einer Umgebung von x_0 invertierbar und damit haben die p_x dieser Umgebung den gleichen Rang wie auch $\text{id} \times p_{x_0}$.

Dann gibt $E \oplus E' \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$, $(e, e') \mapsto B(e) + \iota(e')$, mit $\iota: E' \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ die Inklusion, einen Vektorbündelmorphismus. Nach Konstruktion ist diese Abbildung faserweise ein Isomorphismus. Also sind $E \oplus E'$ und $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ schon isomorph. \square

Insbesondere liefert der letzte Satz, die erste Hälfte des Satzes von Serre-Swan:

Satz 1.2.19 (Satz von Serre-Swan). [5, Thm. I.6.18] Sei M kompakt. Der $C^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(E)$ ist endlich erzeugt und projektiv‡. Andersherum gibt es zu jedem endlich erzeugten projektiven $C^\infty(M)$ -Modul R ein Vektorbündel über M , so dass $R \cong \Gamma(E)$ als $C^\infty(M)$ -Modul.

*Faserweise ist das lineare Algebra und dann muss man noch überprüfen, dass alles so gewählt werden kann, dass es zu einem Faserbündel zusammenklebt.

†Der folgende Beweis funktioniert für alle Vektorbündelmorphismen, die faserweise Projektionen sind, da alle Bündel lokal trivial sind.

‡projektiver R -Modul $P =$ Es gibt einen R -Modul Q , so dass $P \oplus Q$ ein freier R -Modul ist.

1.2.4. Bündelmetriken

Woche 4 In Beispiel 1.2.14 haben wir Riemannsche Metriken als einen Schnitt von $TM \otimes TM$ interpretiert, der auf jeder Faser ein Skalarprodukt ist. Ähnliche Strukturen existieren auf allen Vektorbündeln:

Definition 1.2.20. Eine *Bündelmetrik* auf einem \mathbb{K} -Vektorbündel $\pi: E \rightarrow B$ ist eine glatte Abbildung $h: E \otimes E \rightarrow \mathbb{K}$, deren Einschränkung $h_x: E_x \otimes E_x \rightarrow \mathbb{K}$ auf jeder Faser eine positiv definite symmetrische Bilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist.

Bemerkung 1.2.21. (i) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ induziert eine Bündelmetrik h einen Isomorphismus $E \cong E^*$ durch $e \mapsto h(e, \cdot)$ und $h_x: E_x \rightarrow E_x^*$ ist selbstadjungiert für $x \in M$. Damit ist $h \in \Gamma(E \otimes E)^* \cong \Gamma((E \otimes E)^*) \cong \Gamma(E^* \otimes E^*) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*))$.

Für eine Riemannsche Metrik g auf M induziert die Identifizierung $g_x: T_x M \rightarrow T_x^* M$ einen Isomorphismus $\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto X^\flat := g(X, \cdot)$, dessen Inverses mit \sharp bezeichnet wird, vgl. [2, Bsp. II.10.12].

(ii) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhalten wir analog zu (i) einen Isomorphismus $\bar{E} \cong E^*$ durch $e \mapsto h(\cdot, e)$, wobei nun \bar{E} das konjugierte Vektorbündel ist.

Bemerkung 1.2.22. Jedes Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit besitzt eine solche Bündelmetrik: Lokal nimmt man auf jeder Faser das euklidische bzw. hermitesche Produkt. Global benutzt man eine Zerlegung der Eins auf M , um die lokalen Bündelmetriken 'zusammenzukleben'. Alternativ kann man eine Einbettung von E in ein triviales Bündel nutzen, welche nach Satz 1.2.18 immer existiert. Auf dem trivialen Bündel gibt es immer eine Bündelmetrik, deren Einschränkung auf E dann dort eine Bündelmetrik gibt.

Ein Skalarprodukt eines Vektorraum ordnet jedem Untervektorraum ein eindeutiges orthogonales (bzgl. dieses Skalarproduktes) Komplement zu. Analoges gilt für Bündelmetriken auf Vektorbündeln:

Lemma 1.2.23. (Orthogonales Bündel) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Untervektorbündel von $\pi: E' \rightarrow M$, und sei h eine Bündelmetrik auf E' . Dann ist

$$E^\perp := \{e' \in E' \mid h(e, e') = 0 \text{ für alle } e \in E \text{ mit } \pi(e) = \pi(e')\} \rightarrow M, \quad e' \mapsto \pi(e')$$

ein Untervektorbündel von E' . Insbesondere gilt $E \oplus E^\perp \cong E'$.

Beweis. Falls E^\perp ein Untervektorbündel ist, dann gibt $E \oplus E^\perp \rightarrow E'$, $(e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2$ nach Lemma 1.2.3 den Vektorbündelisomorphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass E^\perp lokal trivial und damit ein Untervektorbündel ist. Da das eine lokale Frage ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass E und E' trivial sind, also $E = U \times \mathbb{K}^r$ und $E' = U \times \mathbb{K}^t$. Seien s_1, \dots, s_r linear unabhängige Schnitte von $E|_U$. Wir können diese (in einer Umgebung U' von $x \in U$) zu einer Menge von t linear

*bei uns antilinear in der zweiten Komponente

1.2. Vektorbündel

unabhängigen Schnitten von $E'|_{U'}$ erweitern: Sei $x \in U$. Wir erweitern $s_1(x), \dots, s_r(x)$ mittels Vektoren $s_{r+1}(x), \dots, s_{r+u}(x)$ zu einer Basis von $(\pi')^{-1}(x) \subset E'$. Für alle $y \in U$ setzen wir $s_i(y) = s_i(x)$ für $i > r$. Wegen Stetigkeit der Determinante der in einer lokalen Trivialisierung um x dargestellten s_i sind die $s_1(y), \dots, s_{r+u}(y)$ in einer Umgebung U' von x noch immer linear unabhängig. Mittels Gram-Schmidt und der Bündelmetrik erhalten wir nun aus den s_i punktweise neue s'_i . Da die Bündelmetrik glatt von der Faser abhängt, sieht man an den expliziten Formeln für Gram-Schmidt, dass die s'_i wieder glatte Schnitte sind. Weiterhin sind nach Konstruktion s'_1 bis s'_r wieder Schnitte in $E|_{U'}$ und die s'_{r+1} bis s'_s sind Schnitte in $E^\perp|_{U'}$. Damit ist E^\perp lokal trivial. \square

Beispiel 1.2.24. Sei $X^n \subset M^m$ eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $p \in X$. Dann haben wir die orthogonale (bzgl. g_p) Zerlegung $T_p M = T_p X \oplus N_p X$, wobei $N_p X := \{v \in T_p M \mid v \perp T_p X\}$ der Normalenraum ist bzgl. auf dem Level der Bündel, die orthogonale Zerlegung: $TM = TX \oplus NX - NX$ ist das Normalenbündel von M (bzgl. g).

Beispiel 1.2.25. Sei $\pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, (\ell, v) \mapsto \ell$, das kanonische Geradenbündel aus Beispiel 1.1.2.iii. Dieses ist ein Untervektorbündel vom trivialen Bündel $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Das letzte Bündel versehen wir mit der Bündelmetrik, die faserweise einfach das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^{n+1} ist.

Beispiel 1.2.26. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist g eine Bündelmetrik auf TM . Wir wollen nun eine Bündelmetrik g^* auf T^*M finden, die in gewissen Sinne dual zu g auf TM ist. Eine vernünftige Forderung ist Kompatibilität mit den musischen Operatoren: Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sollte gelten

$$g(X, Y) = g^*(X^\flat, Y^\flat).$$

Damit wäre g^* automatisch positiv definit. In lokalen Koordinaten x^i soll damit gelten

$$g_{ij} X^i Y^j = (g^*)^{kl} g_{kr} X^r g_{ls} Y^s,$$

also $g_{ij} = (g^*)^{kl} g_{ki} g_{lj}$ und damit $(g^*)^{kl} = g^{kl}$. Insgesamt ist also $g^* = g^{kl} \partial_{x^k} \otimes \partial_{x^l}$ (Hier wird ∂_{x^k} mit der dualen Basis durch $\partial_{x^k}(dx^j) := dx^j(\partial_{x^k}) = \delta_k^j$ identifiziert. D.h. $g^*(\alpha = \alpha_i dx^i, \beta = \beta_j dx^j) = \alpha_i \beta_j g^{ij}$).

Allgemeiner können Bündelmetriken auf Vektorbündeln Bündelmetriken auf abgeleiteten Vektorbündeln induzieren:

Lemma 1.2.27. Seien E bzw. V zwei \mathbb{K} -Vektorbündel über M mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Der Rang von E sei r . Seien h^E bzw. h^V Bündelmetriken auf E bzw. V . Für $s_i \in \Gamma(E)$, $\alpha, \beta \in \Gamma(E^*)$, $\gamma, \delta \in \Gamma(\Lambda^k E)$, $\tilde{s}_i \in \Gamma(V)$, $f_i \in \text{Hom}(E, V)$ und (e_1, \dots, e_r) ein

1. Bündeltheorie – Faser- und Vektorbündel

orthonormaler lokaler Rahmen von $\Gamma(E|_U)$ für $U \subset M$ setzen wir

$$\begin{aligned} h^{E \oplus V}(s_1 \oplus \tilde{s}_1, s_2 \oplus \tilde{s}_2) &= h^E(s_1, s_2) + h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \\ h^{E \otimes V}(s_1 \otimes \tilde{s}_1, s_2 \otimes \tilde{s}_2) &= h^E(s_1, s_2)h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \\ h^{E^*}(\alpha, \beta)|_U &= \sum_i \alpha(e_i)\overline{\beta(e_i)} \\ h^{\Lambda^k E}(\gamma, \delta) &= \frac{1}{k!} h^{E^{\otimes k}}(\iota(\gamma), \iota(\delta)) \text{ mit } \iota \text{ wie in Bsp. 1.2.17.iii.} \end{aligned}$$

Diese erweitern sich eindeutig zu Bündelmetriken auf $E \oplus V$, $E \otimes V$, E^* und $\Lambda^k E$. Insbesondere ergibt $h^{\text{Hom}(E, V)}(f_1, f_2)|_U = \sum_{i=1}^r h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$ durch die Identifizierung $\text{Hom}(E, V) \cong E^* \otimes V$ eine Bündelmetrik auf $\text{Hom}(E, V)$.

Beweisskizze. Es ist klar für die Summe. Wir skizzieren hier den Beweis fürs Tensorprodukt: Als erstes überlegt man sich, dass die Abbildung $\Gamma(E) \times \Gamma(V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$, $(s_1, \tilde{s}_1) \mapsto h^E(s_1, s_2)h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ für jedes feste $(s_2, \tilde{s}_2) \in \Gamma(E) \times \Gamma(V)$ bilinear ist und damit eine Abbildung $\Gamma(E) \otimes \Gamma(V) \cong \Gamma(E \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$ induziert. Analog gilt es für vertauschte Indizes 1 und 2. Insofern induziert die Gleichung für $h^{E \otimes V}$ insgesamt eine bilineare Abbildung

$$h^{E \otimes V} : \Gamma(E \otimes V) \times \overline{\Gamma(E \otimes V)} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}).$$

(Das komplexe Konjugieren ist für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erforderlich und entfällt bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.) Ist e_i ein orthonormaler Rahmen von $\Gamma(E|_U)$ bzgl. h^E und analog v_j ein orthonormaler Rahmen von $\Gamma(V|_U)$, dann ist $e_i \otimes v_j$ ein lokaler Rahmen von $\Gamma(E \otimes V|_U)$, der nach der Forderung im Lemma dann ebenfalls orthonormal bzgl. $h^{E \otimes V}$ ist. Damit ist $h^{E \otimes V}$ eine eindeutig bestimmte Bündelmetrik. Die Bündelmetrik auf E^* wird analog überprüft. Man muss hier nur zusätzlich die Unabhängigkeit von dem gewählten orthonormalen Rahmen beweisen. Das folgt aus der Linearität der Argumente und daraus, dass ein neuer orthonormaler Rahmen immer durch eine Matrix $A \in O(r)$ entsteht.

Die Abbildung

$$\iota : \text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V, f \in \text{Hom}(E_x, V_x) \mapsto \sum_i e_i^* \otimes f(e_i),$$

wobei e_i eine Orthonormalbasis von E_x ist, definiert einen Bündelisomorphismus von $\text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V$ und dann folgt, direkt die Formel $h^{E^* \otimes V}(\iota(f_1), \iota(f_2)) = \sum_i h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$. \square

Beispiel 1.2.28. (Nochmal Bündelmetrik auf T^*M) Für die Bündelmetriken auf den abgeleiteten Bündeln von TM wie in Lemma 1.2.27, siehe Tabelle 1.1. Dort haben wir die lokalen Definitionen der Bündelmetriken, die der Einfachheit halber auch einfach nur g genannt werden. Es bleibt natürlich zu überprüfen, dass dies die Bündelmetriken von letztem Lemma sind. Wir überprüfen hier, dass für 1-Formen die Bündelmetrik aus Beispiel 1.2.26 herauskommt: Möglichkeit (a) wäre die Basis ∂_{x^i} zu beliebigen lokalen Koordinaten bzgl. der orthonormalen Basis e_i zu schreiben

1.2. Vektorbündel

und es direkt nachzurechnen. Möglichkeit (b) wäre: In einer Umgebung zu jedem $p \in U$ gibt es immer lokale Koordinaten (z.B. geodätische Normalkoordinaten [2, Def. II.7.4]) für die $\partial_{x^i}|_p = e_i|_p$ und damit $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ gilt. Damit gilt $g^*(\alpha, \beta)|_p = \alpha(\partial_{x^i}|_p)\beta(\partial_{x^j}|_p)g^{ij}(p) = \alpha(e_i|_p)\beta(e_i|_p)$.

Bündel			Schnitte			Bündelmetrik (induziert von der Riem. Metrik g)
E	Bezeichnung	Rang	$\Gamma(E)$	Bezeichnung eines Schnittes	lokal	$(g(s_1, s_2))$ lokal
$M \times \mathbb{R}^r$	Triviales Bündel	r	$C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$	(vektorwert.) Funktion	$f(x)$ (sogar global)	punktweises Produkt
TM	Tangentialbündel	m	$\mathfrak{X}(M)$	Vektorfeld	$f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ (kurz $f_i \partial_{x^i}$)	$g(f^i \partial_{x^i}, h^l \partial_{x^l}) = g_{il} f^i h^l$
$T^*M := (TM)^*$	Kotangentialbündel	m	$\Omega^1(M)$	1-(Differential)Form	$f_i(x) dx^i$	$g(f_i(x) dx^i, h_l(x) dx^l) = g^{il} f_i h_l$
$T_r^s(M) = \bigotimes_{i=1}^r TM \otimes \bigotimes_{j=1}^s T^*M$	(r, s) -Tensorbündel	m^{r+s}	$T_r^s(M)$	(r, s) -Tensoren	$f_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(x) \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$	$g_{i_1 i_1} \dots g_{i_r i_r} g^{j_1 j_1} \dots g^{j_s j_s} f_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} h_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_s}$
$\Lambda^k TM$	Bündel der k -Formen	$\binom{m}{k}$	$\Omega^k(M)$	k -(Differential)Form	$f_{j_1 \dots j_k}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	$g(\alpha, \beta) := \frac{1}{k!} g(t(\alpha), t(\beta))$ mit $t: \Lambda^k TM \rightarrow T^*M^{\otimes k}$ die triviale Einbettung wie in Bsp. 1.2.17.iii $g(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \det(g^{i_r j_s})_{r,s}$

Tabelle 1.1.: Abgeleitete Bündel von TM (Die Formeln für die hier gegebenen induzierten Bilinearformen auf den abgeleiteten Bündeln gelten noch immer, wenn g eine (semi-)Riemannsche Metrik war – jedoch sind sie dann nicht Bündelmetriken im Sinne von Definition 1.2.20.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Wir wollen nun erste allgemeine Notationen für Differentialoperatoren einführen und uns als erste Beispiele insbesondere Operatoren auf Differentialformen (z.B. die äußere Ableitung) und Zusammenhänge auf Vektorbündeln (verallgemeinert/abstrahiert den Levi-Civita-Zusammenhang auf (M, g)). Für diese ersten Beispiele brauchen wir die Sprache der Differentialoperatoren zwar so erst einmal nicht, aber es ist gut, sich daran schon einmal zu gewöhnen.

2.1. Definitionen und erste Eigenschaften

2.1.1. Im \mathbb{R}^n

Ein *Differentialoperator auf \mathbb{R}^n* ist definiert als

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (2.1)$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein *Multiindex* mit $|\alpha| := \sum_i |\alpha^i|$, $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, und $D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^1} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^n}$ ist. Gibt es ein α mit $|\alpha| = k$ und $a_\alpha \neq 0$, dann nennen wir k die *Ordnung* von P (sonst ist die Ordnung kleiner als k).

In vielen Anwendungen in der Analysis und Stochastik muss man geringere Regularität der Koeffizienten a_α zulassen, aber wir beschränken uns hier auf glatte Koeffizienten. Also ist hier $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Allgemeiner kann P auch auf \mathbb{K}^ℓ -wertige Funktionen operieren und \mathbb{K}^r -wertige Funktionen ausgeben - dazu muss dann a_α eine $r \times \ell$ -matrixwertige Funktion sein. Dabei operieren die partiellen Ableitungen dann komponentenweise.

Beispiel 2.1.1.

- (i) Die Operatoren $\text{rot}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\text{div}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $\text{grad}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sind Differentialoperatoren erster Ordnung.
- (ii) Laplace-Operator:* $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Wärmeoperator: $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i}$

*https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(iv) Wellenoperator^{*}: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i}$

(v) Cauchy Riemann Operator $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(vi) Sturm-Liouville Operatoren[†]: $y \in C^\infty(I \subset \mathbb{R}) \mapsto (-py')' + qy \in C^\infty(I)$ für $p, q \in C^\infty(I)$ und $p > 0$

(vii) Dirac-Operator[‡]:

$$D: C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$$

$$D = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3}$$

mit $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Man rechnet nach, dass D^2 der Wellenoperator ist.

2.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel

Wir wollen nun (2.1) als lokale Form benutzen, um so Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln zu definieren:

Definition 2.1.2. Ein (skalarer) Differentialoperator der Ordnung k auf einer Mannigfaltigkeit ist eine lineare Abbildung $P: C^\infty(M, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$, die in jeder Karte die Form (2.1) annimmt.

Beispiel 2.1.3. 0-te Ordnung Operatoren sind einfach Multiplikationsoperatoren $Pf = af$ für ein $a \in C^\infty(M, \mathbb{K})$

Beispiel 2.1.4. Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$, aufgefasst als Derivation $X: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f \mapsto X(f)$, ist ein skalarer Differentialoperator erster Ordnung: Lokal ist $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jeder skalare Differentialoperator erster Ordnung auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ kann als

Vektorfeld plus einem 0-te Ordnungsoperator aufgefasst werden, vgl. Übungsaufgabe 10. Die Hintereinanderausführung von Vektorfeldern und Linearkombinationen davon sind auch wieder Differentialoperatoren von entsprechend höherer Ordnung.

Im \mathbb{R}^n konnten wir analog zu (2.1) einen Differentialoperator $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^\ell) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^s)$ als Operator der Form (2.1) definieren, wobei nun die $a_\alpha(x) \in \text{Hom}(\mathbb{K}^\ell, \mathbb{K}^s)$ waren. So können wir nun analog den Begriff des Differentialoperators auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten auch auf Vektorbündel übertragen:

^{*}https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembert_operator

[†]https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%E2%80%93Liouville_theory - Sturm-Liouville Probleme resultieren oft als resultierende Probleme nach Symmetriereduktion, z.B. Laplacegleichung auf \mathbb{R}^n nach Abtrennen der Radialsymmetrie. Ein Beispiel folgt später.

[‡]

2.1. Definitionen und erste Eigenschaften

Definition 2.1.5. Eine lineare Abbildung $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, die in Koordinaten, die E und F trivialisieren, die Form (2.1) mit $a_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$ (also insbesondere $a_\alpha(x) \in \text{Hom}(E_x, F_x)$) annimmt, ist ein *Differentialoperator* zwischen den Vektorbündeln E und F . Die Menge der Differentialoperatoren zwischen E und F der Ordnung ℓ bezeichnen wir mit $\text{Diff}^\ell(E, F)$. Ist $E = F$, so schreiben wir auch $\text{Diff}^\ell(E)$.

Beispiel 2.1.6. Die äußere Ableitung $d: \Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) = \Gamma(\Lambda^{k+1} M)$, definiert in [2, S.76], ist ein Differentialoperator erster Ordnung: In lokalen Koordinaten hat ein $\alpha \in \Omega^k(M)$ die Form $f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und damit ist $d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Also ist $d = b_a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}$ mit $b_a(x)(e \in \Lambda_x^k M) = dx^a|_x \wedge e \in \Lambda_x^{k+1} M$.

Beispiel 2.1.7.

$$g(\text{grad } f, \cdot) = df(\cdot)$$

definiert einen Differentialoperator erster Ordnung

$$\text{grad}: C^\infty(M) \cong \Gamma(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(TM).$$

Formal adjungierte Operatoren. Seien E, F Vektorbündel über einer Riemannschen Metrik (M, g) mit gewählten Bündelmetriken. Ist $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein Differentialoperator, dann ist sein *formal adjungierter Operator* der eindeutig bestimmte Differentialoperator $P^\dagger: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ für den

$$\int_M \langle \phi, P\psi \rangle d\text{vol}_g = \int_M \langle P^\dagger \phi, \psi \rangle d\text{vol}_g$$

für alle $\psi \in \Gamma_c(E)$ und $\phi \in \Gamma(F)$ gilt. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Bündelmetrik auf F bzw. E und $\Gamma_c(E)$ die kompakt getragenen glatten Schnitte von E .*

Ist $Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u$ für $u \in C^\infty(M, \mathbb{K})$, dann erhalten wir durch partielle Integration erhalten wir dann $P^\dagger v = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} (\det g)^{-1/2} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} \sqrt{\det g}) v$.

Analog definiert man auch formal adjungierte Operatoren für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Man muss dann nur $|\det g|$ in der lokalen Definition von $d\text{vol}_g$ verwenden. Dementsprechend muss man dann auch die Betragsstriche in der lokalen Darstellung von P^\dagger hinzufügen.

Beispiel 2.1.8. d^\dagger bezeichnen wir mit δ . Aus $d^2 = 0$ folgt $\delta^2 = 0$.

Ähnlich wie den formal adjungierten Operatoren kann man auch andere

Definition 2.1.9. Der *Laplaceoperator* Δ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist definiert durch

$$\int_M g(du, dv) d\text{vol}_g = \int_M u \Delta v d\text{vol}_g$$

für alle $u \in C_c^\infty(M)$ und $v \in C^\infty(M)$. Hierbei ist das Skalarprodukt g auf der linken Seite, die durch die Riemannsche Metrik g induzierte Bündelmetrik auf T^*M , vgl. Beispiel 1.2.26.

Der adjungierte Operator P^ von P als Operator auf $L^2(E)$ (im funktionalanalytischen Sinne) stimmt auf $\Gamma_c(F)$ mit P^\dagger überein. Hat i.A. allerdings einen größeren Definitionsbereich.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

D.h. insbesondere $\Delta = \delta d$. In lokalen Koordinaten der Laplaceoperator hat die Darstellung

$$\Delta f = -(\det g)^{-1/2} \partial_{x^i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_{x^j} f \right),$$

und in euklidischen Koordinaten stimmt der Laplaceoperator mit $-\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^i{}^2}$ aus Beispiel 2.1.1 überein.

Beispiel 2.1.10. Der *Laplaceoperator auf k -Differentialformen* wird definiert als

$$\Delta := (d + \delta)^2: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

Es gilt $\Delta = d\delta + \delta d$ und $\Delta^\dagger = \Delta$. Das formal adjungierte δ zu d ist erst einmal nur für k -Formen mit $k \geq 1$ definiert. Man setzt $\delta|_{C^\infty(M)} = 0$ und damit stimmt Δ auf glatten Funktionen mit der obigen Definition überein.

2.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Wir werden den Levi-Civita Zusammenhang auf TM zu Zusammenhängen auf Vektorbündeln verallgemeinern und Beispiele für Differentialoperatoren erster Ordnung auf Vektorbündeln erhalten.

Definition 2.2.1. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Gamma(E)$. Eine Abbildung $\nabla := \nabla^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ heißt (*affiner Zusammenhang*), falls gilt:

- (i) ∇ ist linear in beiden Argumenten.
- (ii) (Tensoriell in der ersten Komponente)

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s \quad (\text{also } (\nabla_{fX}s)(p) = f(p)(\nabla_X s)_p).$$

- (iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \text{also } (\nabla_X(fs))_p = d_p f(X(p))s(p) + f(p)(\nabla_X s)_p.$$

Die Menge aller affinen Zusammenhänge eines Vektorbündels $\pi: E \rightarrow M$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(E)$.

Ist zusätzlich eine Bündelmetrik h auf E gegeben, so nennen wir ∇^E *metrisch* (= kompatibel mit der Metrik), falls für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s, s' \in \Gamma(E)$

$$X.h(s, s') = h(\nabla_X s, s') + h(s, \nabla_X s')$$

wobei $X.f := X(f) := df(X): M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto d_p f(X(p))$ für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ im Falle eines komplexen Vektorbündels) ist.

2.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Bemerkung 2.2.2. (Lokale Darstellung) Seien x^i Koordinaten auf $U \subset M$ und sei s_α ein lokaler Rahmen für $E|_U$ (insbesondere ist dann $E|_U$ trivial). Für $X = X^i \partial_{x^i}$, $s = f^\alpha s_\alpha$ gilt

$$\nabla_X s = X^i (\partial_{x^i} f^\alpha) s_\alpha + X^i f^\alpha \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha}_{=: \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta}$$

mit $\Gamma_{i\alpha}^\beta \in C^\infty(U, \mathbb{K})$. Wie auch schon auf TM nennen wir die Γ *Christoffelsymbole*.

Ist ∇ metrisch bzgl. h und ist s_α ein lokaler orthonormaler Rahmen von $E|_U$, so gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x^i} (h(s_\alpha, s_\beta)) = h(\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha, s_\beta) + h(s_\alpha, \nabla_{\partial_{x^i}} s_\beta) = h(\Gamma_{i\alpha}^\gamma s_\gamma, s_\beta) + h(s_\alpha, \Gamma_{i\beta}^\gamma s_\gamma) \\ &= \Gamma_{i\alpha}^\beta + \overline{\Gamma_{i\beta}^\alpha} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bemerkung 2.2.3. Sei $\nabla \in \mathcal{A}(E)$.

- (i) Die Menge aller Zusammenhänge $\mathcal{A}(E)$ auf einem Vektorbündel E bilden mit der Addition $(\lambda \nabla^1 + \nabla^2)_X s := \lambda \nabla_X^1 s + \nabla_X^2 s$ einen affinen Raum. (Aber keinen Vektorraum, da die Nullabbildung kein Zusammenhang ist.)
- (ii) Seien $\nabla^1, \nabla^2 \in \mathcal{A}(E)$. Dann ist ω definiert durch $\omega(X) := \nabla_X^1 - \nabla_X^2$ eine 1-Form mit Werten in $\text{End}(E)$, also $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$. Die Abbildung $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X$ ist jedoch *kein* Element in $\Omega^1(M, \text{End}(E))$, da $\nabla_X(f s) \neq f \nabla_X s$ ist. Andersherum ist für $\nabla \in \mathcal{A}(E)$ und $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E))$ auch $\tilde{\nabla}_X s := \nabla_X s + \omega(X)s$ immer wieder ein affiner Zusammenhang auf E .

Beispiel 2.2.4.

- (i) Ein ausgezeichneter Zusammenhang auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der Levi-Civita Zusammenhang. Das ist der eindeutig bestimmte metrische Zusammenhang, der zusätzlich torsionsfrei ist, d.h. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]^\dagger$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- (ii) Für zwei metrische Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 auf TM gilt

$$g(\omega(X)Y, Z) = g(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) \stackrel{\text{metr.}}{=} g(Y, \nabla_X^1 Z - \nabla_X^2 Z) = g(Y, \omega(X)Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Wir können in diesem Fall also ω als Element in $\Omega(M, \mathfrak{o}(TM))$ auffassen, wobei $\mathfrak{o}(TM)$ die Abbildung auf TM bezeichnen, die faserweise orthogonal sind (also das Skalarprodukt g erhalten).

*Zum Vergleich: Für den Levi-Civita Zusammenhang hatten wir $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Dort folgte das aus der Torsionsfreiheit. Torsionsfreiheit ist nicht als Forderung für allgemeine Vektorbündel definierbar. Außerdem entstehen die Γ_{ij}^k bzgl. der Basis ∂_{x^i} zu gewählten Koordinaten, welche im Allgemeinen keine orthonormale Basis ist und weshalb im Allgemeinen nicht $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$ gilt.

†Die Lieklammer $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ ist definiert durch $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ für alle $f \in C^\infty(M)$, vgl. DGI ÜA 39.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

- (iii) Die *Torsion* eines Zusammenhangs ∇ auf TM ist ein $(0, 2)$ Tensor $T \in \mathfrak{T}_0^2(M)$:
 $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Für zwei Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 mit der gleichen Torsion ist $\omega(X)(Y) = \omega(Y)(X)$.

Satz 2.2.5 (Induzierte Zusammenhänge). *Seien E und V \mathbb{K} -Vektorbündel über M . Seien ∇^E und ∇^V affine Zusammenhänge auf E und V . Dann existieren auf $E \oplus V$, E^* , $E \otimes V$, $\text{Hom}(E, V)$ und $\Lambda^k E^*$ affine Zusammenhänge, so dass für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, $\omega \in \Gamma(E)^*$, $s, s_i \in \Gamma(E)$, $\tilde{s} \in \Gamma(V)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ gilt.**

$$\begin{aligned} X(\omega(s)) &= (\nabla_X^{E^*} \omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{E \oplus V}(s \oplus \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \oplus (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^{E \otimes V}(s \otimes \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \otimes \tilde{s} + s \otimes (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^{\text{Hom}(E, V)}(f(s)) &= (\nabla_X^{\text{Hom}(E, V)} f)(s) + f(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{\Lambda^{k+\ell} E^*}(\alpha \wedge \beta) &= (\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*} \beta). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha \right) (s_1, \dots, s_k) = X(\alpha(s_1, \dots, s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1, \dots, s_{j-1}, \nabla_X^E s_j, s_{j+1}, \dots, s_k).$$

Sind die Zusammenhänge ∇^E bzw. ∇^V metrisch bzgl. Bündelmetriken h^E bzw. h^V auf E bzw. V , so sind die obigen Zusammenhänge metrisch bzgl. der induzierten Bündelmetriken, vgl. Lemma 1.2.27, auf den jeweiligen Bündeln.

Beweis. Wir skizzieren hier nur die Argumente für den Zusammenhang auf E^* , vgl. auch Übungsaufgabe 11 und 12: Man rechnet nach, dass $(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) = X(\omega(s)) - \omega(\nabla_X^E s)$ die geforderten Eigenschaften in Definition 2.2.1, z.B. gilt für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{E^*} (f\omega))(s) &= X((f\omega)(s)) - (f\omega)(\nabla_X^E s) = X(f\omega(s)) - f\omega(\nabla_X^E s) \\ &= fX(\omega(s)) + df(X)\omega(s) - f\omega(\nabla_X^E s) = df(X)\omega(s) + f(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) \\ &= (df(X)\omega + f\nabla_X^{E^*} \omega)(s). \quad \square \end{aligned}$$

Woche 5 Es fehlt uns jetzt noch ein induzierter Zusammenhang auf dem Pullbackbündel. Dazu identifizieren wir zuerst Schnitte im Pullbackbündel f^*E für $\pi: E \rightarrow M$ und $f: M' \rightarrow M$. Sei $S \in \Gamma(f^*E)$. Dann hat $S(x)$ die Form $(x, s(x)) \in E_{f(x)}$. Die erste Komponente enthält also keine Informationen und wir haben eine glatte Abbildung $s: M' \rightarrow E$. Andersherum definiert jede glatte Abbildung $s: M' \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = f$ mittels $S(x) = (x, s(x))$ einen Schnitt in f^*E . Deshalb arbeitet man oft nicht direkt mit Schnitten von f^*E , sondern mit den Abbildungen $s: M' \rightarrow E$ von oben. Ein solches

Beachten Sie, dass $\Gamma(E^) \cong \Gamma(E)^*$ als $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Moduln ist und wir damit eine Paarung $\Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$, $(\omega, s) \mapsto \omega(s)$ haben (was einfach über jedem Punkt $x \in M$ einfach die Paarung/Auswertungsabbildung $E_x^* \times E_x \rightarrow \mathbb{K}$ ist). Insbesondere ist $\omega \in \Gamma(E^*)$ eindeutig bestimmt, wenn man $\omega(s)$ für alle $s \in \Gamma(E)$ kennt.

2.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

s nennt man einen *Schnitt von E entlang f* und die Menge aller solcher Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma_f(E)$. Nach obigen Überlegungen ist $\Gamma_f(E) \cong \Gamma(f^*E)$. Wir werden in Zukunft immer direkt $s: M' \rightarrow E$ als Schnitt in f^*E auffassen.

Man beachte, dass im Allgemeinen $\Gamma_f(E) \neq \Gamma(E|_{f(M')})$ ist – z.B. sei $f: M' \rightarrow M$ eine konstante Abbildung, dann kann ein Schnitt von E entlang f immer noch von $x \in M'$ abhängen, wogegen Schnitte in $\Gamma(E|_{f(M')=\{*\}})$ konstant sind. Die lokale Darstellung eines Elements in $\Gamma_f(E)$ über $U \subset M'$ ist $a^i(s_i \circ f)$, wobei $a^i \in C^\infty(U)$ und s_i ein lokaler Rahmen von E über $f(U) \subset M$ ist.

Um die richtige Definition für ∇^{f^*E} zu finden, schauen wir uns erst Spezialfälle an:

- (i) Sei $f: M' \rightarrow M$ eine Einbettung. Dann ist $f^*E \cong E|_{f(M')}$. Somit sollte

$$\nabla_X^{f^*E} s = \nabla_{df(X)}^E (s \circ f^{-1})$$

gelten.

- (ii) Bildet $f: M' \rightarrow M$ nur auf einen Punkt $p \in M$ ab. Dann ist $f^*E \cong M' \times \pi^{-1}(p)$ und $s \in \Gamma_f(E)$ hat lokal die Darstellung $a^i s_i(p)$ für $a^i \in C^\infty(U)$. Hier sollte

$$\nabla_X^{f^*E} (s) = X(a^\alpha) s_\alpha(p).$$

gelten.

Zusammen ergibt sich

Lemma 2.2.6. *Sei $f: M' \rightarrow M$ und $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E . Sei $s \in \Gamma_f(E)$ - lokal sei $s = a^i(s_i \circ f)$, $a^i \in C^\infty(U \subset M')$. Dann definiert*

$$\nabla_X^{f^*E} s|_U = X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f)$$

einen Zusammenhang auf f^*E , wobei $(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f)(p) = (\nabla_{d_p f(X(p))}^E s_i)(f(p))$.

Beweis. Man muss nachrechnen, dass die Definition unabhängig von der lokalen Darstellung ist und es sich wirklich um einen Zusammenhang handelt. Wir rechnen hier nur die Unabhängigkeit der lokalen Darstellung nach: Sei t_j ein weiterer lokaler Rahmen von E auf $f(U) \subset M$. Dann definieren $\phi_\alpha(t_i(y)) = (y, e_i)$ bzw. $\phi_\beta(s_i(y)) = (y, e_i)$ lokale Trivialisierungen. Sei $\mu_{\alpha\beta}$ die zugehörige Übergangsfunktion. Wir schreiben $\mu_{\alpha\beta}(y)(e_j) =: \mu_j^i(y)e_i$. Dann ist $t_j(y) = \phi_\beta^{-1}(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(y, e_j)) = \phi_\beta^{-1}(y, \mu_{\alpha\beta}(y)(e_j)) = \mu_j^i(y)s_i(y)$. Ein Rahmen entsteht aus einem alten also genau durch punktweisen Multiplikation mit der Matrix der Übergangsfunktion.

Soll also $b^j(t_j \circ f) = a^i(s_i \circ f)$ sein, dann muss $a^i(x) = b^j(x)\mu_j^i(f(x))$ gelten und wir haben:

$$\begin{aligned} X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f &= X(b^j(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f) \\ &= (X(b^j)(\mu_j^i \circ f) + b^j X(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f) \\ &= X(b^j)((\mu_j^i s_i) \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E (\mu_j^i s_i) \circ f) \\ &= X(b^j)(t_j \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E t_j \circ f). \end{aligned}$$

Damit ist ∇^{f^*E} wohldefiniert. □

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Bemerkung 2.2.7.

- (i) Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $\phi(t)$ ein Schnitt eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ entlang γ . Für den induzierten Zusammenhang auf dem Pullbackbündel γ^*E schreiben wir oft einfach $\frac{\nabla}{dt} := \nabla_{\partial_t}^{\gamma^*E}$. Ist γ eine reguläre Kurve dann gilt $\frac{\nabla}{dt}\phi = \nabla_{\dot{\gamma}}\phi$ wobei ϕ als ein Schnitt auf $E|_{\gamma(I)}$ begriffen wird. In Diffgeo I haben wir uns beim Ausdruck $\nabla_{\dot{\gamma}}$ immer nur auf reguläre Kurven beschränkt. Wenn man z.B. die Parallelverschiebung auf allgemeine glatte Kurven verallgemeinern will, benutzt man $\frac{\nabla}{dt}$, siehe Abschnitt 2.2.1.
- (ii) In lokalen Koordinaten haben wir für einen Schnitt $\phi \in \Gamma_f(E)$ entlang $\gamma: \phi(t) = \phi^i(t)s_i(\gamma(t))$. Wir kürzen ab $\check{s}_i = s_i \circ \gamma$ und $\check{\Gamma}_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k \circ \gamma$. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = \dot{\phi}^j(t)\check{s}_j(t) + \phi^i(\nabla_{\dot{\gamma}}s_i)(\gamma(t)) = (\dot{\phi}^j(t) + \phi^i(t)\dot{\gamma}^k(t)\check{\Gamma}_{ki}^j(t))\check{s}_j(t). \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.2.8. (Intrinsische Darstellung von Differentialoperatoren) Benutzen wir den durch ∇^g und ∇ auf dem Vektorbündel $T^*M \otimes E$ induzierten Zusammenhang, vgl. Satz 2.2.5, erhalten wir den Zusammenhang $\nabla: \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) = \Gamma(T^2M \otimes E)$ mittels:

$$\nabla_X^{T^*M \otimes E}(\alpha \otimes s) = (\nabla_X^{T^*M}\alpha) \otimes s + \alpha \otimes (\nabla_X^E s).$$

Auch das ist wieder ein Differentialoperator erster Ordnung. Induktiv können wir das fortführen (der Einfachheit halber bezeichnen wir auch diese ganzen Zusammenhänge einfach mit ∇):

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M^{\otimes 3} \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

Damit können wir diese Zusammenhänge insbesondere auch hintereinanderausführen und erhalten einen Differentialoperator durch

$$Pu := \sum a_k \nabla^k u \quad \text{mit } a_k \in \Gamma(\text{Hom}(T^*M^{\otimes k} \otimes E, F)) \cong \Gamma(TM^{\otimes k} \otimes \text{Hom}(E, F))$$

Hierbei wirkt der $TM^{\otimes k}$ -Anteil von a_k mit dem $T^*M^{\otimes k}$ -Anteil von $\nabla^k u$ mittels der natürlichen Paarung.

Alle Differentialoperatoren zwischen Vektorbündeln E und F kann man so schreiben. Z.B. seien $E = F = TM$ über (M, g) . Dann sollte z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = a_1 \nabla - a_0$$

für ein $a_1 \in \Gamma(TM \otimes \text{Hom}(TM, TM))$ und ein $a_0 \in \Gamma(\text{Hom}(TM, TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes TM)$ gelten. Wir bestimmen a_1 und a_0 : Für $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\nabla Y = dx^j \otimes \left(\frac{\partial Y}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^\ell Y^k \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right)$ und damit $a_1 = \partial_{x^1} \otimes \text{id}_{TM}$ sowie $a_0 = \Gamma_{1k}^\ell dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell}$.

2.2.1. Horizontaler Lift – Paralleltransport

Definition 2.2.9. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, ∇ ein affiner Zusammenhang auf E und $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Ein Lift ϕ von γ , d.h. ein Schnitt $\phi \in \Gamma_\gamma(E)$, heißt *horizontal*, falls $\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = 0$ gilt (vgl. Bemerkung 2.2.7 für die Definition).

Satz 2.2.10. In der Situation von Definition 2.2.9. Sei $t_0 \in I$. Zu $\phi_0 \in E_{\gamma(t_0)}$ gibt es genau einen horizontalen Lift ϕ längs γ mit $\phi(t_0) = \phi_0$.

Beweis. Der Beweis ist komplett analog zum Beweis für den Levi-Civita Zusammenhang in [2, Satz II.5.4] und beruht darauf, dass es sich hier um ein Anfangswertproblem für die ODE $\frac{\nabla}{dt}\phi(t) = 0$ handelt. \square

Definition 2.2.11. Sei $\gamma: I \rightarrow M$ wie oben. Seien $t_0, t_1 \in I$. Die Abbildung

$$\parallel_{t_0, t_1}^\gamma: E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \phi_0 \mapsto \phi(t_1),$$

wobei $\phi(t)$ der horizontale Lift von γ mit $\phi(t_0) = \phi_0$ ist, heißt *Paralleltransport* längs γ .

Bemerkung 2.2.12.

- (i) Der Paralleltransport stellt einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Fasern des Vektorbündels her. Beachte: Wie auch schon auf dem Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, ist der Paralleltransport abhängig von der Kurve entlang derer verschoben wird.
- (ii) Ist γ eine konstante Kurve, dann ist jeder horizontale Lift ein konstanter Schnitt entlang γ .
- (iii) Nach Picard-Lindelöf hängt der horizontale Lift auch glatt von den Anfangswerten ab.

Satz 2.2.13.

- (i) $\parallel_{t_0, t_1}^\gamma$ ist eine lineare Abbildung.
- (ii) $\parallel_{t_0, t_1}^\gamma: E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}$ ist ein Vektorraumisomorphismus. War der Zusammenhang metrisch, dann ist dieser Isomorphismus sogar eine Isometrie.
- (iii) $\parallel_{t_0, t_2}^\gamma = \parallel_{t_1, t_2}^\gamma \cdot \parallel_{t_0, t_1}^\gamma$. Insbesondere ist $\parallel_{t_0, t_0}^\gamma = \text{Id}$ und $\parallel_{t_0, t_1}^\gamma = (\parallel_{t_1, t_0}^\gamma)^{-1}$.

Beweis. (i) Linearität klar nach Linearität von ∇ .

(iii) Klar nach Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des AWP für horizontale Lifte.

(ii) Es ist eine lineare Abbildung zwischen gleich dimensionalen Vektorräumen. Es reicht also Injektivität zu zeigen: Sei $v \in E_{c(t_0)}$ mit $\parallel_{t_0, t_1}^c(v) = 0$. Dann ist $v = \parallel_{t_1, t_0}^c(0) = 0$. Ist der Zusammenhang metrisch, dann folgt isometrisch ganz analog zum Beweis im Fall des Levi-Civita Zusammenhangs, vgl. [2, Satz II.5.7]. \square

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Bemerkung 2.2.14. Insbesondere folgt aus dem letzten Satz: Betrachtet man eine Basis (e_1, \dots, e_r) von $E_{x=\gamma(t_0)}$. Dann ist $(e_1(t) := \parallel_{t_0,t}^\gamma e_1, \dots, e_r(t) := \parallel_{t_0,t}^\gamma e_r)$ wieder eine Basis von $E_{\gamma(t_1)}$. Wir nennen dann $(e_1(t), \dots, e_r(t))$ einen *parallelen Rahmen von E entlang γ* .

Satz 2.2.15. Für $\phi \in \Gamma_c(E)$ gilt

$$\left(\parallel_{s,t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \phi(s) \right) \parallel_{s,t}^c \circ \nabla_{\partial_s}^{c^* E} \phi(s) = \frac{d}{ds} \circ \parallel_{s,t}^c \phi(s).$$

Man beachte, dass $z(s) := \parallel_{s,t}^c \phi(s) \in E_{c(t)}$ für alle s und deshalb $\frac{d}{ds} \circ \parallel_{s,t}^c \phi(s) = \frac{d}{ds} z(s)$ als Differentiation im festen Vektorraum $E_{c(t)}$ sinnvoll ist.

Beweis. Sei $e_1(s), \dots, e_r(s)$ eine Basis von $E_{\gamma(s)}$. Sei $(e_1(t), \dots, e_r(t))$ der zugehörige parallele Rahmen längs γ . Sei $\phi(t) = \phi^j(t) e_j(t)$. Dann ist $\parallel_{s,t}^c \phi(s) = \phi^j(s) e_j(t)$ und damit $\frac{d}{ds} \parallel_{s,t}^c \phi(s) = \dot{\phi}^j(s) e_j(t)$. Andererseits ist

$$\frac{\nabla}{ds} (\phi^j(s) e_j(s)) = \phi^j(s) \underbrace{\frac{\nabla}{ds} e_j(s)}_{=0} + \dot{\phi}^j(s) e_j(s) = \dot{\phi}^j(s) e_j(s)$$

$$\parallel_{s,t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \phi(s) = \parallel_{s,t}^c (\dot{\phi}^j(s) e_j(s)) = \dot{\phi}^j(s) e_j(t). \quad \square$$

Man kann so aus dem Paralleltransport auch den Zusammenhang wieder konstruieren:

Folgerung 2.2.16. Es gilt

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \phi \right) (t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\parallel_{t,t_0}^c (\phi(t)) - \phi(t_0)}{t - t_0}$$

für jeden Schnitt ϕ längs c .

2.2.2. Krümmung

Definition 2.2.17. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang ∇ . Die Abbildung $F: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ mit

$$(X, Y, s) \mapsto F(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$$

heißt *Krümmung* von ∇ . Ist $F = 0$, dann nennen wir den Zusammenhang *flach*.

Bemerkung 2.2.18. Ist M eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang. Dann ist $R := F$ der *Riemannsche Krümmungstensor*.

Bemerkung 2.2.19. Man rechnet direkt nach, dass F $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten ist und $F(X, Y)s = -F(Y, X)s$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ gilt. Damit kann F als Element in $\Omega^2(M; \text{End}(E))$ aufgefasst werden.

2.2. Zusammenhänge von Vektorbündeln

Als nächstes wollen wir die Krümmung F als Quadrat einer geeigneten Abbildung definieren.

Definition 2.2.20. Wir definieren die lineare Abbildung $D: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ durch def_D.mp4

$$D(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $s \in \Gamma(E)$.

Bemerkung 2.2.21. (i) Wohldefiniertheit folgt, da $D((f\alpha) \otimes s) = D(\alpha \otimes (fs))$ für $f \in C^\infty(M)$ gilt.

(ii) Für $k = 0$ ist $D = \nabla: \Omega^0(M; E) \cong \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$.

(iii) Die Abbildung $D \circ D: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M; E)$ ist die Krümmung F .

Beweis. Wir rechnen lokal: Sei $e_i = \partial_{x^i}$ für lokale Koordinaten x^i . Dann ist $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_{e_i} s$ (denn $\nabla_X s = X^i \nabla_{\partial_{x^i}} s = dx^i(X) \nabla_{e_i} s$) und damit

$$\begin{aligned} D(dx^i \otimes \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) &= (-dx^i \wedge \nabla \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) \\ &= -dx^i(e_j) \nabla_{e_k} \nabla_{e_i} s + dx^i(e_k) \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s \\ &= -\nabla_{e_k} \nabla_{e_j} s + \nabla_{e_j} \nabla_{e_k} s = F(e_j, e_k)s. \quad \square \end{aligned}$$

Lokale Darstellung von ∇ und F mittels Differentialformen Sei s_i ein lokaler Rahmen des Vektorbündels E vom Rang r über $U \subset M$. Dann ist $\nabla_X s_k = \omega_k^i(X) s_i^*$ mit $\omega_k^i(X) \in C^\infty(U)$. Da ∇ tensoriell in der ersten Komponente ist, ist $\omega_k^i \in \Omega^1(U)$. Die Menge der ω_k^i enthalten alle Informationen über ∇ auf U . Wir fassen alle zu $\omega = (\omega_k^i)$ zusammen und erhalten eine 1-Form mit Werten in $r \times r$ -Matrizen, also $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ – die sogenannte *Zusammenhangsform von ∇ auf U bzgl. des lokalen Rahmen s_i* .

Analog haben wir $F(X, Y)(s_k) = \Omega_k^i(X, Y) s_i$ mit $\Omega_k^i(X, Y) \in C^\infty(U)$. Da $F(X, Y) = -F(Y, X)$ und F tensoriell in X , und Y ist, haben wir $\Omega_k^i \in \Omega^2(U)$. Wir fassen diese zu $\Omega = (\Omega_k^i) \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ zusammen und nennen dies die *Krümmungsform von F auf U bzgl. des Rahmen s_i* .

Satz 2.2.22 (Strukturgleichung (= die definierende Gleichung von F in der lokalen Darstellung)). *Es gilt $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$. Das ist Kurzschreibweise für*

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i.$$

Beweis. Vollständig analog zum Fall $E = TM$ aus [2, Lemma II.10.26]. □

Wir betrachten als nächstes die ω und Ω die zu verschiedenen Trivialisierungen gehören:

*Im Vergleich zu Christoffelsymbolen: Für Christoffelsymbole braucht man immer zusätzlich einen lokalen Rahmen auf TU - z.B. lokale Koordinaten: $\omega_k^i(X) = X^r \Gamma_{rk}^i$ mit $\nabla_{\partial_{x^r}} s_k = \Gamma_{rk}^i s_i$.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Seien $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und analog $\phi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^r$ mit den natürlichen Rahmen $s_i(x) := \phi_\beta^{-1}(x, e_i)$ und $t_i(x) := \phi_\alpha^{-1}(x, e_i)$, wobei e_i die Standardorthonormalbasis des \mathbb{R}^r ist. Sei $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ die Übergangsfunktion.

Die Zusammenhangsformen auf U_α, U_β bzgl. der Rahmen t_i bzw. s_i bezeichnen wir mit ω_α bzw. ω_β . Analog die Krümmungsformen mit Ω_α bzw. Ω_β .

Satz 2.2.23. *Es gilt*

$$\omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = \mu_{\alpha\beta} \omega_\alpha \mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^{-1} \quad (2.4)$$

$$\Omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\alpha \mu_{\beta\alpha}. \quad (2.5)$$

Beweis. Wir schreiben $\mu_{\beta\alpha}(x)(e_j) = \mu_j^i(x)e_i$.

Es ist $t_j(x) = \phi_\beta^{-1}(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, e_j)) = \phi_\beta^{-1}(x, \mu_{\beta\alpha}(x)(e_j)) = \mu_j^i(x)s_i(x)$, wobei die letzte Gleichheit folgt, da ϕ_β die Vektorraumstruktur auf den Fasern respektiert, vgl. Definition 1.1.4. Damit erhalten wir für $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{array}{ccc} \nabla_X t_j & = & \nabla_X (\mu_j^\ell s_\ell) \\ \parallel & & \parallel \\ (\omega_\alpha)_j^i(X) t_i & = & (d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X)) s_\ell \end{array}$$

und somit

$$(\omega_\alpha)_j^i(X) \mu_i^\ell = d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X),$$

also $\mu_{\beta\alpha} \omega_\alpha = d\mu_{\beta\alpha} + \omega_\beta \mu_{\beta\alpha}$. Mittels der äußeren Ableitung erhalten wir aus (2.4) zusammen mit $\Omega_\beta = d\omega_\beta + \omega_\beta \wedge \omega_\beta$ aus Satz 2.2.22:

$$\begin{aligned} \Omega_\beta &= d(\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) + (\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) \wedge (\mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}) \\ &= d\mu_{\beta\alpha}^{-1} \wedge \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge d\mu_{\beta\alpha} + d\mu_{\beta\alpha}^{-1} \wedge d\mu_{\beta\alpha} \\ &\quad + \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \wedge \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \wedge d\mu_{\beta\alpha} \\ &\quad + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \wedge \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \\ &= \mu_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\alpha \mu_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad \square$$

2.3. Hauptsymbol und Klassifikation

Wir werden spezielle Unterklassen von Differentialoperatoren kennenlernen. Diese werden durch das sogenannte Hauptsymbol identifiziert:

2.3.1. Hauptsymbol

Schon an der lokalen Darstellung des Zusammenhangs kann man sehen, dass der lokale Ausdruck je nach Wahl der Koordinaten stark variieren kann – so können z.B. niedrigere Ordnungsterme verschwinden oder auftauchen. Man kann allerdings den Termen mit den höchsten Ableitungen einen koordinatenunabhängigen Sinn geben.

2.3. Hauptsymbol und Klassifikation

Definition 2.3.1. Sei $P \in \text{Diff}^\ell(E, F)$. In lokalen Koordinaten um $x \in U$ sei $P = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, F)|_U)$. Dann sei das *Hauptsymbol* von P im Punkt $\xi = \xi_j dx^j \in T_x^* M$ definiert als

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) := i^\ell \sum_{|\alpha| = \ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Hierbei ist $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m}$ mit $m = \dim M$.

Bevor wir im nächsten Lemma zeigen, dass diese Definition koordinatenunabhängig ist, bemerken wir zunächst den Faktor i in der Definition. Das ist zwar Wahl der Definition, kommt aber daher, dass der Übergang von $\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha$ zum Hauptsymbol eine Fouriertransformation ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_{x^i} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (i \xi_i) f(x) dx$$

gilt.

Lemma 2.3.2. *Es gilt*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(x) \in \text{Hom}(E_x, F_x), *$$

wobei f eine Funktion mit $d_x f = \xi$ ist. Insbesondere ist damit das Hauptsymbol ein wohldefinierte glatte Funktion auf $T^* M$, die in jeder Faser ein homogenes Polynom in den ξ^i der Ordnung ℓ ist.

Beweis. Wir verwenden die Leibnizregel und sehen, dass $e^{-itf} \circ P \circ e^{itf}$ in t ein Polynom der Ordnung ℓ ist. Der Term der Ordnung ℓ in x hat die Form

$$(it)^\ell \sum_{|\alpha| = \ell} a_\alpha(x) \prod_{i=1}^m (\partial_{x^i} f(x))^{\alpha_i} = (it)^\ell \sum_{|\alpha| = \ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

(damit ist die rechte Seite im Lemma insbesondere unabhängig von der Wahl von f) und damit folgt die Behauptung. \square

Analog erhalten wir, vgl. Übungsaufgabe 14,

Lemma 2.3.3. *Es gilt für $z \in E_x$*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) z = \frac{i^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ und $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist.

*Hierbei ist e^{itf} als Multiplikationsoperator zu verstehen. D.h. ist $\phi \in \Gamma(E)$, dann ist $(P \circ e^{itf})(\phi) = P(e^{itf} \phi)$. Insbesondere sagt das Lemma also auch, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(\phi)(x)$ wirklich nur von $\phi(x)$ abhängt. Das ist für $(P\phi)(x)$ natürlich falsch, sobald P nicht Ordnung Null hat.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Beispiel 2.3.4. Für die ersten Beispiele aus 2.1.1 haben wir die Hauptsymbole

- (i) Laplaceoperator: $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = |\xi|^2$
- (ii) Wellenoperator: $-\xi_0^2 + |\xi|^2$ (wobei ξ_0 zu $t = x^0$ gehört)
- (iii) Wärmeoperator: $-|\xi|^2$
- (iv) Cauchy-Riemann-Operator: $\frac{i}{2}(\xi_1 + i\xi_2)$
- (v) Sturm-Liouville: $p\xi^2$
- (vi) Gradient: (ξ_1, ξ_2, ξ_3)
 Divergenz: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
 Rotation: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3$

Allgemein haben wir mittels Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})u &= (1 - itf - \frac{t^2}{2}f^2 + O(t^3))(Pu + itP(fu) - \frac{t^2}{2}P(f^2u) + O(t^3)u) \\ &= Pu + it(P(fu) - fPu) - \frac{t^2}{2}(P(f^2u) - 2fP(fu) + f^2Pu) + O(t^3)u \\ &= \left(P + it[P, f] - \frac{t^2}{2}[[P, f], f] + O(t^3) \right) u. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für Differentialoperatoren der Ordnung 1 bzw. 2:

$$\sigma_1(P)(x, \xi) = i[P, f]|_x, \quad \sigma_2(P)(x, \xi) = -\frac{1}{2}[[P, f], f]|_x.$$

Beispiel 2.3.5.

- (i) Das Hauptsymbol $\sigma_1(d)(x, \xi) \in \text{End}(T_x^*M)$ der äußeren Ableitung $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist $\sigma_1(d)(x, \xi)\alpha = i\xi \wedge \alpha$, vgl. Übungsaufgabe 14.
- (ii) Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Wir betrachten den Zusammenhang als Abbildung $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$. Sein Hauptsymbol ist

$$\sigma_1(\nabla)(x, \xi)v = i[\nabla, f]v|_x = i(\nabla(fv) - f\nabla v)|_x = id_x f \otimes v(x) = i\xi \otimes v(x)$$

für $v \in \Gamma(E)$ und $d_x f = \xi$.

Lemma 2.3.6. Seien $P, P_1 \in \text{Diff}^{\ell_1}(E_1, E_2)$ und $P_2 \in \text{Diff}^{\ell_2}(E_2, E_3)$. Dann ist

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi).$$

Außerdem gilt $\sigma_\ell(P^\dagger) = \sigma_\ell(P)^\dagger$.

Beweis. Direktes Einsetzen. □

Bemerkung 2.3.7. Für skalare Differentialoperatoren ($E_i = M \times \mathbb{R}$) ist

$$\sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi)$$

und damit

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_1 \circ P_2)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi),$$

obwohl i.A. $P_1 \circ P_2 \neq P_2 \circ P_1$ gilt.

2.3.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren

Das meiste was wir über (lineare) partielle Differentialgleichungen wissen, geht auf die folgenden drei Prototypen aus der klassischen Physik zurück, die wir hier jeweils für beschränkte Gebiete des \mathbb{R}^n formulieren. Aufgrund der Beschränktheit des Gebietes brauchen wir hier im Allgemeinen Zusatzbedingungen (sogenannte Randbedingungen) am Rand des Gebietes.

Woche 6

- (i) *Wellengleichung:* $(-\partial_t^2 + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$

Eine Lösung $u(x, t)$ in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (und glattem Rand) beschreibt die Bewegung einer Membran Ω am Punkt $x \in \Omega$ zur Zeit t . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wellengleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 && \text{Anfängliche Position} \\ \partial_t u(x, 0) &= u_1 && \text{Anfängliche Geschwindigkeit} \\ u(x, t) &= v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 && \text{Randbedingung.} \end{aligned}$$

Das Hauptsymbol des Wellenoperators ist $-\xi_0^2 + \sum_i \xi_i^2$. Da dessen Niveaumengen Hyperboloide in \mathbb{R}^{n+1} sind, nennt man die Differentialgleichung *hyperbolische*.

- (ii) *Wärmegleichung:* $(-\partial_t + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$ Eine Lösung $u(x, t)$ in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (und glattem Rand) beschreibt die Temperatur in $x \in \Omega$ zur Zeit t . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wärmegleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 && \text{Anfängliche Temperatur} \\ u(x, t) &= v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 && \text{(Dirichlet) Randbedingung.} \end{aligned}$$

Alternativ treten andere Randbedingung auf, z.B. *Neumannrand-Bedingung* $\partial_\nu u(x, t) = v$ für $x \in \partial\Omega, t \geq 0$, wobei ν das Einheitsnormalfeld von $\partial\Omega$ ist. Die Dirichletrandbedingung würde hier eine feste Temperatur am Rand modellieren, während die Neumannrandbedingung besagen würde, dass es keinen Wärmefluss durch den Rand gibt.

Das volle Symbol des Wärmeoperator (d.h. die Konstruktion wie bei Hauptsymbol nur mit der ganzen Summe $\sum_{|\alpha| < 2}$, also mit den Termen niedrigerer Ordnung)

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

ist $-\xi_0 + \sum_i \xi_i^2$. Die Niveaumengen sind Paraboloiden in \mathbb{R}^{n+1} , weshalb man die Wärmeleitung als *parabolisch* klassifiziert.

- (iii) Laplacegleichung: $\sum_i \partial_{x_i}^2 u = 0$. Lösungen der Laplacegleichung sind stationäre (zeitunabhängige) Lösungen der Wärmeleitung.

Das Hauptsymbol ist $\sum_i \xi_i^2$. Dessen Niveaumengen sind Ellipsoide in \mathbb{R}^{n+1} \rightsquigarrow *elliptische DGL*.

Auf Mannigfaltigkeiten sehen die Gleichungen analog aus (jeweils mit dem Laplaceoperator der Riemannschen Mannigfaltigkeit). Auf geschlossenen (=kompakt und ohne Rand) Mannigfaltigkeiten entfallen die Randwertbedingungen.

Die charakteristischen Eigenschaften der obigen drei Gleichungen sind sehr verschieden. Z.B. sind Lösungen der Laplacegleichung immer glatt, wogegen $u(x, t) = f(x - t)$ die Wellengleichung in \mathbb{R} löst, sobald f zweimal differenzierbar ist, vgl. auch ÜA 18.

Ein Großteil wichtiger Eigenschaften und Methoden für partielle Differentialoperatoren sind wahr oder falsch oder anwendbar je nachdem, ob das Hauptsymbol 'ähnlich' zu dem einer der obigen Gleichungen ist. Daher kommt es, dass Teilmenge von Differentialoperatoren in die Gruppe der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren eingeteilt werden:

Definition 2.3.8. Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r . Ein Differentialoperator zweiter Ordnung $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ heißt *elliptisch/hyperbolisch/parabolisch*, wenn in jedem Punkt $(x, \xi) \in T^*M$ das Hauptsymbol (nun lokal eine $r \times r$ -Matrix) positiv oder negativ definit ist/genau einen negativen und sonst nur positive Eigenwerte hat/genau einen Null Eigenwert hat und alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben.

Bemerkung 2.3.9. Es stellt sich heraus, dass die meisten Eigenschaften elliptischer Operatoren sich auf Differentialoperatoren $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ beliebiger Ordnung übertragen lassen, solange das Hauptsymbol invertierbar ist. Deshalb nennt man auch solche Operatoren *elliptisch*.

Auch viele (wenn auch nicht alle) der linearen partiellen Differentialgleichungen, die in der Geometrie auftauchen, sind von diesem Typ:

- (i) elliptisch: Laplace und Diracgleichung* auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
- (ii) parabolisch:
 - a) Wärmeleitung
 - b) Mittlerer Krümmungsfluss: Sei $F: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine zeitabhängige Einbettung einer Hyperfläche M in \mathbb{R}^{n+1} mit Normalenvektorfeld ν und mittlere Krümmung H . Dann ist der mittlere Krümmungsfluss Lösungen F von

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H\nu.$$

*kommt noch

c) Ricci(de Turk)fluss* ist eine Evolutionsgleichung für die Metrik:

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

(iii) hyperbolisch:†

- a) Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta_g)u = 0$ mit Δ_g Laplaceoperator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) .
- b) Auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit ist der zugehörige Laplaceoperator hyperbolisch und wird *D'Alembert Operator* genannt. Für den Spezialfall $(M \times \mathbb{R}, g - dt^2)$ ist $\partial_t^2 - \Delta_g$ der zugehörige D'Alembert Operator.
- c) Cauchyprobleme, z.B. in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

2.4. Elliptische Diffops

In Spezialfällen, z.B. vorliegen von genügend Symmetrien, vgl. z.B. ÜA 13, kann man elliptische Differentialgleichungen explizit lösen. Im Allgemeinen hat man da keine Chance. Deshalb geht es zumeist um Fragen, wie: Gibt es überhaupt eine Lösung? Ist diese eindeutig? Welche Eigenschaften (z.B. Glattheit) hat die Lösung?

Wir listen hier zumeist ohne Beweise einige Methoden und Begriffe auf, die gerade für elliptische Operatoren auf Verwendung finden.

Es gibt verschiedene Methoden Existenz von Lösungen zu elliptischen Differentialgleichungen über geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu zeigen. Wir werden hier die Fredholmalternative kennenlernen und Beispiele sehen, wo man nutzt, dass sich die Differentialgleichung als Euler-Lagrangegleichungen eines schönen Variationsproblems schreiben lässt (wie wir schon die Geodätengleichung in [2] als Euler-Lagrangegleichung des Energiefunktional verstanden haben).

Oft, und gerade im letzteren Fall der Euler-Lagrangegleichung, beweist man für eine elliptische Differentialgleichung selten direkt, dass sie eine Lösung hat, sondern man beweist zunächst, dass die Gleichung eine schwache Lösung besitzt:

Definition 2.4.1. Seien E, F Vektorbündel mit Bündelmetriken und über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein Differentialoperator der Ordnung ℓ und f eine Schnitt von F . Dann nennen wir ein u eine *schwache Lösung* von $Pu = f$, falls

$$\int_M \langle u, P^\dagger \phi \rangle d\text{vol}_g = \int_M \langle f, \phi \rangle d\text{vol}_g$$

für alle $\phi \in \Gamma_c(F)$ gilt.

Wir nennen u eine (*starke*) *Lösung* von $Pu = f$, falls u mindestens ℓ -mal stetig differenzierbar ist und $Pu = f$ gilt.

*https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_flow

†https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Jede starke Lösung ist auch eine schwache Lösung. Umgekehrt muss, dass nicht gelten. In vielen Fällen hilft aber die Elliptische Regularitätstheorie zu zeigen, dass u genügend Regularität (\sim Differenzierbarkeit) besitzt.

Selbst wenn man diese Regularitätsaussagen hat, muss man selbstverständlich noch zeigen, dass es überhaupt eine schwache Lösung in einem geeigneten Funktionenraum gibt.

Egal ob schwache Lösung oder direkt Existenz einer Lösung zeigen, i.A. benutzt man Funktionenräume, die sich mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden, leichter verwenden lassen als k -fach differenzierbare Funktionen.

2.4.1. Grundlagen und erste Anwendungen

Ab sofort sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Bündelmetrik h und Zusammenhang ∇ .

Betrachten wir aber zuerst eine zusammenhängende offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Der Raum $C^k(\bar{\Omega})$ ist der Raum aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen deren Norm $\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f|$ endlich ist. Das ist ein Banachraum (= vollständig normierter Raum).

Verallgemeinern wir das nun auf Vektorbündel:

$$\|s\|_{C^k(E)} := \max_{0 \leq \ell \leq k} \sup_{x \in M} |\nabla^\ell s|,$$

wobei $|\nabla^\ell s|$ die Norm bzgl. der induzierten Bündelmetrik auf $T^*M^{\otimes \ell} \otimes E$.

Der Raum $C^k(E)$ sind alle Schnitte mit $\|s\|_{C^k(E)} < \infty$. Der resultierende Raum ist wieder ein Banachraum und hängt (im Gegensatz zur Norm) bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten M nicht von gewähltem Zusammenhang ∇^E , der gewählten Bündelmetrik und der Riemannschen Metrik ab.

Um elliptische Differentialgleichungen zu behandeln werden allerdings oft Hilfsräume eingesetzt:

Für $s \in \Gamma_c(E)$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, sei

$$\|s\|_{W^{k,p}} := \left(\int_M \sum_{j=0}^k |\nabla^j s|^p \, d\text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hier ist $\nabla^j s \in \Gamma(T^*M^{\otimes j} \otimes E)$ und $|\nabla^j s|$ steht für die durch g und h auf $T^*M^{\otimes j} \otimes E$ induzierte Bündelmetrik.

Der *Sobolevraum* $W^{k,p}(E)$ ist die Vervollständigung von $\Gamma_c(E)$ in der $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ -Norm. Mit $W_0^{k,p}(E)$ bezeichnen wir die Vervollständigung von $\Gamma_c(E)$ in der $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ -Norm. Im Falle von vollständigen Mannigfaltigkeiten ist $W^{k,p}(E) = W_0^{k,p}(E)$. Für $k = 0$ erhalten

wir die L^p -Räume $L^p(E) := W^{0,p}(E)$. Die $W^{k,p}$ ($1 \leq p < \infty$) sind alle Banachräume, im Falle $p = 2$ sogar Hilberträume* (in dem Falle schreiben wir kurz $H^k(E) := W^{k,2}(E)$). Ist die Mannigfaltigkeit kompakt, dann sind die $W^{k,p}$ -Normen zu verschiedenen Riemannschen Metriken g , Zusammenhängen ∇^E und Bündelmetriken äquivalent. (Das ist falsch bei nichtkompakten Mannigfaltigkeiten.)[†]

Für L^p -Räume gilt die Hölder-Ungleichung[‡]: Ist $f_1 \in L^p(E)$, $f_2 \in L^q(E)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, folgt $\langle f_1, f_2 \rangle \in L^1(M)$ und

$$\int_M |\langle f_1, f_2 \rangle| \, d\text{vol}_g \leq \|f_1\|_{L^p} \|f_2\|_{L^q}.$$

2.4.2. Wichtige Begriffe der Funktionalanalysis

Seien X, Y Banachräume. Die zugehörigen Normen bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_X$ bzw. $\|\cdot\|_Y$. Der (topologische) Dualraum $X^* := \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear}\}$ ist zusammen mit der Norm $\|f\|_{X^*} := \sup\{|f(x)| \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ wieder ein Banachraum.

Ein Banachraum heißt *reflexiv*, falls $X^{**} = X$ gilt. Z.B. sind die Sobolevräume $W^{k,p}$ für $1 < p < \infty$ reflexiv. Hilberträume sind immer reflexiv (Das folgt aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz).

Bemerkung 2.4.2. (Oft genutzte Lemmata der Funktionalanalysis zu Banachräumen)

- (i) Jede nichtleere beschränkte und abgeschlossene Menge eines Hilbertraumes (oder allgemeiner eines reflexiven Banachraumes) X enthält eine schwach konvergente Teilfolge. Hierbei heißt $v_i \rightarrow v$ *schwach konvergent* in X , wenn $\langle u, v_i \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ für alle $u \in X^*$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die duale Paarung von X und seinem Dual X^* ist, also $\langle f \in X^*, x \in X \rangle := f(x)$.

Im Falle eines Hilbertraumes kann jedes $f \in X^*$ als $\langle y, \cdot \rangle: X \rightarrow \mathbb{K}$ für ein $y \in X$ dargestellt werden (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz). Dann ist die duale Paarung einfach das Skalarprodukt.

*Hilbertraum = Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt kommt. Z.B. $s, s' \in L^2(E)$ hat das L^2 -Skalarprodukt $(s, s')_{L^2} := \int_M \langle s, s' \rangle_E \, d\text{vol}_f$ – also einfach immer die polarisierte Norm.

†Es gibt alternative Definitionen in lokalen Koordinaten und lokalen Trivialisierungen. Setzt man $\tilde{W}^{k,p}(E)$ die Vervollständigung von $C_c^\infty(E)$ in der Norm

$$\|f\|_{\tilde{W}^{k,p}} := \left(\sum_i \|(\xi_i)_* (\rho_i f)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^m)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $\kappa_i: U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^m$ Koordinaten auf einer lokal endlichen Überdeckung U_i von M mit zugehöriger Zerlegung der Eins ist, $\theta_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$ lokale Trivialisierungen von E sind und $\xi_i := (\kappa_i \times \text{id}) \circ \theta_i: E|_{U_i} \rightarrow V_i \times \mathbb{K}^r$. Im Falle von geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist diese Norm äquivalent zur obigen Norm und unabhängig, ansonsten braucht man Annahmen an die Karten und Trivialisierungen.

‡Beweis mit der Youngschen Ungleichung - ganz analog zum Fall $M = \mathbb{R}$

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Konvergiert $v_i \rightarrow v$ schwach in $W^{k,p}(E)$, dann konvergiert v_i auch schwach zu v in $W^{\ell,p}(E)$ für alle $0 \leq \ell \leq k$. Das folgt, da $W^{k,p}(E)^* \subset W^{\ell,p}(E)^*$ wegen $W^{\ell,p}(E) \subset W^{k,p}(E)$ gilt.

- (ii) Konvergiert v_i schwach in X gegen v , dann gilt $\|v\|_X \leq \liminf \|v_i\|_X$.
- (iii) Jede in der Norm konvergente Folge in X^* , konvergiert auch schwach und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht: Ein Beispiel ist $H = L^2(\mathbb{R})$. Sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } u \in [0, 1]$. Setze $v_i(x) := u(x - i)$. Dann konvergiert v_i schwach gegen 0 (Es reicht, gegen $C_c^\infty(\mathbb{R})$ -Funktionen zu testen, da diese dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen.) Aber die Norm von v_i ist konstant, und damit kann nicht $v_i \rightarrow 0$ in H gelten.

Sei $A: X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Obwohl als Abbildung geschrieben bedeutet das im Allgemeinen nicht, dass Ax für alle $x \in X$ definiert ist. Ein linearer Operator kommt mit einem Definitionsbereich $\text{dom } A: \text{dom } A \subset X \rightarrow Y$. Wir betrachten hier nur *dicht definierte* Operatoren, d.h. die Vervollständigung

$$\overline{\text{dom } A}^X := \{x \in X \mid \exists x_i \in \text{dom } A : \|x_i - x\|_X \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0\}$$

des Definitionsbereich bzgl. der Norm auf X gibt ganz X .

Betrachten wir unsere Differentialoperatoren $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ als Operatoren auf L^2 , d.h. $P: \Gamma_c(E) \subset L^2(E) \rightarrow L^2(F)$, für (M, g) vollständig, dann ist P ein dicht definierter Operator. Genauso könnten wir P aber auch als Operator $P: \Gamma_c(E) \subset W^{k,p}(E) \rightarrow W^{\ell,p}(F)$ für $1 \leq p < \infty$ betrachten und auch dieser wäre über vollständigen Mannigfaltigkeiten dicht-definiert.

Ein dicht-definierter Operator $A: \text{dom } A \subset X \rightarrow Y$ heißt *stetig* oder *beschränkt*, falls es ein $c > 0$ gibt, so dass $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in \text{dom } A$ gilt.

Man kann zeigen, dass für beschränkte Operatoren Ax für alle $x \in X$ durch folgende Konstruktion wohldefiniert werden kann durch: Sei $x_i \in \text{dom } A \rightarrow x$ in X . Dann konvergiert Ax_i zu einem $y \in Y$. Dann setzt man $Ax = y$.[†]

Bemerkung 2.4.3. Unsere Differentialoperatoren $P: \Gamma_c(E) \subset L^2(E) \rightarrow \Gamma_c(F) \subset L^2(F)$ der Ordnung $k \geq 1$ sind immer unbeschränkt als Operator von L^2 nach L^2 , d.h. die Operatornorm $\|P\| = \sup_{s \in \Gamma_c(E), \|v\|_{L^2(E)}=1} \|Pv\|_{L^2(F)}$ ist ∞ . Als Operatoren $P: H^k \rightarrow L^2$ sind sie allerdings beschränkt: Z.B. für $Pf := f'$ für $f \in C^\infty(S^1)$ gilt

$$\|P: H^1 \rightarrow L^2\| = \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f'\|_{L^2(S^1)} \leq \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f\|_{H^1(S^1)} = 1.$$

*Das ist die Standardkonvergenz in X , d.h. $\|x_i \rightarrow x\|_X \rightarrow 0$.

[†]*Beweis.* Ax_i konvergiert in Y : Wegen $\|Ax_i - Ax_j\|_Y \leq c\|x_i - x_j\|_X$ ist Ax_i eine Cauchyfolge und konvergiert damit in Y .

Wohldefiniertheit: Seien x_i, y_i zwei Folgen in X mit $x_i \rightarrow x$ und $y_i \rightarrow x$ in X . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Ay_i - y\|_Y &\leq \|Ay_i - Ax_i\|_Y + \|Ax_i - y\|_Y \leq c\|y_i - x_i\|_X + \|Ax_i - y\|_Y \\ &\leq c(\|x_i - x\|_X + \|y_i - x\|_X) + \|Ax_i - y\|_Y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist $A: X \rightarrow Y$ auf ganz X definiert und bleibt ein beschränkter linearer Operator.

Insbesondere sagt uns das, dass wir f' für alle $f \in H^1$ definieren können. Das war anfangs nicht klar, da f um f' zu bilden ja differenzierbar sein muss.

Ähnlich sieht man, dass für einen Differentialoperator $P: L^p(E) \rightarrow L^p(F)$ der Ordnung ℓ über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $W^{\ell,p}(E)$ eine Teilmenge des maximal möglichen Definitionsbereich ist.

Ein Operator $A: X \rightarrow Y$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $x_i \in \text{dom } A$ die Folge Ax_i eine in Y konvergente Teilfolge besitzt.

Kompakte Operatoren sind insbesondere beschränkt. Die Hintereinanderausführung eines kompakten und eines stetigen Operators ist wieder kompakt.

Kompaktheit ist eine wichtige Eigenschaft, die oft verwendet wird. In unserem Kontext werden dafür oft Soboleveinbettungssätze oder Arzela-Ascoli verwendet:

Satz 2.4.4 (Einbettungen). *Sei M^m geschlossen. Sei $\sigma(p, k) := k - \frac{m}{p}$, $0 \leq \ell \leq k$, $f \in W^{k,p}(E)$. Dann gilt*

- (i) *Für $k < \ell$ mit $\sigma(q, \ell) \leq \sigma(p, k)$, dann ist die Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow W^{\ell,q}(E)$ stetig. Gilt zusätzlich $\sigma(q, \ell) < \sigma(p, k)$, dann ist diese Inklusion ein kompakter Operator.*
- (ii) *Ist $\sigma(p, k) \geq \ell$, dann ist die Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$ stetig. Ist sogar $\sigma(p, k) > \ell$, dann ist Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$ kompakt.*

Einige wichtige Spezialfälle:

- (i) *Ist $f \in H^k(E)$ und $k > m$, dann ist $f \in C^{k-m}(E)$.*
- (ii) *$C^\infty = \bigcap_k H^k$.*

Satz 2.4.5 (Arzela-Ascoli). *Sei M kompakt und $k > \ell$. Dann ist die Inklusion $C^k(E) \hookrightarrow C^\ell(E)$ kompakt.*

2.4.3. Elliptische Abschätzungen

Satz 2.4.6. *Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung k über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es Konstanten c_i so dass*

- (i) *(Schauder Abschätzung)*

$$\|u\|_{C^{k+\ell}} \leq c_1 \|Pu\|_{C^\ell} + c_2 \|u\|_{C^0} \leq c_3 \|u\|_{C^{k+\ell}}$$

für alle $u \in C^{k+\ell}(E)$ und

- (ii) *(L^p -Abschätzung)*

$$\|u\|_{W^{k+\ell,p}} \leq c_4 \|Pu\|_{W^{\ell,p}} + c_5 \|u\|_{L^1} \leq c_6 \|u\|_{W^{k+\ell,p}}$$

für alle $u \in W^{k+\ell,p}(E)$ gilt.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Insbesondere folgt für $Pu = f$: Ist $f \in W^{\ell,p}(F)$ und $u \in W^{k,p}(E)$, dann ist $u \in W^{k+\ell,p}(E)$. Ist $f \in C^\ell(F)$ und $u \in C^0(E)$, dann ist $u \in C^{k+\ell}(E)$.

Folgerung 2.4.7. Sei P elliptisch und sei u eine schwache Lösung in L^2 von $Pu = \lambda u$. Dann ist $u \in C^\infty$. Eigenwerte elliptischer Operatoren sind also immer glatt.

Bemerkung 2.4.8. (i) Die linken Teile der Ungleichungen sind die eigentlichen elliptischen Abschätzungen. Die rechten Ungleichungen folgen direkt, da P von k -ter Ordnung ist, vgl. Bemerkung 2.4.3.

(ii) Betrachten wir einen Differentialoperator P der Ordnung s als Operator zwischen Sobolevräumen

$$P: \Gamma_c(E) \subset W^{k,p}(E) \rightarrow W^{k-s,p}(F).$$

Da $\Gamma(E)$ nie der maximale Definitionsbereich ist, könnte es a priori sein, dass es ein $u \in W^{k,p}(E)$ mit $Pu = 0$ gibt, aber u nicht glatt ist. Der letzte Satz sagt uns, dass das nicht passieren kann, und u immer glatt ist. Insbesondere sagt uns das, dass für die Bestimmung von $\ker P$ es nicht darauf ankommt, ob wir P als Operator auf $W^{k,p}(E)$ auffassen oder dessen der Einschränkung auf $W^{k+\ell,p}(E)$ betrachten.

2.4.4. Existenz von Lösungen in Sobolevräumen - Fredholmalternative

Die Fredholmalternative ist eine Möglichkeit Existenz von Lösungen zu elliptischen Differentialgleichungen zu beweisen. Wir geben hier nur die Fredholmalternative für Differentialoperatoren zwischen Hilberträumen an:

Satz 2.4.9 (Fredholm-Alternative). Seien $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow M$ Vektorbündel mit Bündelmetrik über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung ℓ . Dann gilt

(i) Sowohl $\ker P$ als auch $\ker P^\dagger$ sind endlich dimensional.

(ii) Ist $f \in H^\ell(F)$, dann existiert genau dann eine schwache Lösung u von $Pu = f$, wenn f orthogonal (in $L^2(F)$) zu $\ker P^\dagger$. Diese Lösung ist eindeutig, falls u orthogonal (in $L^2(E)$) zu $\ker P$ ist.

(iii) Für skalare elliptische Differentialoperatoren gilt $\dim \ker P = \dim \ker P^\dagger$.

Ist $E = F$, dann sind insbesondere die Eigenräume $\ker(P - \lambda Id)$ endlich dimensional.

Um die Fredholmalternative zu beweisen, braucht man insbesondere ein Kriterium, wann der Kern vom elliptischen Operator endlich dimensional ist. Ein solches Kriterium kommt mit folgendem allgemeinem Lemma aus der Funktionalanalysis:

Lemma 2.4.10. Seien X, Y, Z reflexive Banachräume. Sei $X \hookrightarrow Y$ eine kompakte Inklusion und $L: X \rightarrow Z$ ein beschränkter Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Das Bild $L(X)$ ist in Z abgeschlossen und der Kern $\ker L$ ist endlich dimensional.

(ii) Es gibt Konstanten c_1 und c_2 so dass

$$\|x\|_X \leq c_1 \|Lx\|_Z + c_2 \|x\|_Y$$

für alle $x \in X$ ist.

Das heißt die Hauptarbeit für die Fredholmalternative ist der Beweisen der elliptischen Abschätzungen aus dem letzten Abschnitt. Wir beweisen das hier alles nicht, sondern schauen uns ein paar Beispiele an:

Beispiel 2.4.11. (Gewöhnliche Differentialgleichungen auf $S^1 = [0, 2\pi]/\sim$) Sei $Pu = u' + a(x)u$, $u, a \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$. Dann ist P elliptisch und $P^\dagger u = -u' + a(x)u$. Aus $P^\dagger u = 0$ folgt $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}$. Damit $u \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ gilt, muss für a die Bedingung $\int_0^{2\pi} a(y)dy = 0$ gelten. Es ist also $\dim \ker P^\dagger \leq 1$. (Für $a(x) = \sin x$ ist z.B. $\ker P^\dagger = \text{span}\{e^{1-\cos x}\}$.) Die Fredholmalternative sagt also, wir können genau dann $Pu = f \in C^\infty(S^1)$ für u lösen, wenn $f \perp_{L^2} \ker P^\dagger$ steht. In diesem Fall ist die Lösung, dann auch eindeutig.

Beispiel 2.4.12. Sei (M, g) eine geschlossene zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der Laplace auf Funktionen. Wir betrachten $Pu = \Delta u + c(x)u$ mit $c(x) \geq 0$, $c \not\equiv 0$, und wollen $Pu = f$ lösen. Als erstes zeigen wir, dass $\ker P = \{0\}$ ist. Sei dazu $Pu = 0$. Dann gilt

$$0 = \int_M u(\Delta u + cu) d\text{vol}_g = \int_M (|du|_g^2 + cu^2) d\text{vol}_g \geq 0.$$

Also muss u konstant und da $c \not\equiv 0$ ist, damit $u \equiv 0$ sein. Wegen $P = P^\dagger$ können wir die Fredholmalternative anwenden und erhalten, dass $\Delta u + cu = f$ für alle $f \in C^\infty(M)$ eine eindeutige Lösung in $H^\ell(M)$ für alle ℓ hat. Damit ist die Lösung insbesondere auch glatt.

Ist $c \equiv 0$, ergibt obige Methode, dass $\Delta u = f$ genau dann eine Lösung hat, falls $\int_M f d\text{vol}_g = 0$ gilt.

Analoge Argumente funktionieren auch für vektorwertige Funktionen und c eine positiv definite Matrix oder auf Vektorbündeln mit geeigneten c , vgl. Abschnitt 2.4.5.

Beispiel 2.4.13 (Hodge-Zerlegung). Sei (M, g) eine geschlossene zusammenhängende orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ der Hodge-Laplace. Sei $\mathcal{H}^k := \ker \Delta \subset \Omega^k(M)$ der Raum der *harmonischen* k -Formen. Nach Satz 2.4.9 ist \mathcal{H}^k endlich dimensional. Wegen

$$\int_M g(h, \Delta h) d\text{vol}_g = \int_M g(h, (d\delta + \delta d)h) d\text{vol}_g = \int_M (|dh|_g^2 + |\delta h|_g^2) d\text{vol}_g$$

ist

$$\mathcal{H}^k = \{h \in \Omega^k(M) \mid dh = 0 \text{ und } \delta h = 0\}.$$

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Für $\phi \in \Omega^k(M)$ sei $\phi = \psi + h$ die Zerlegung mit $h \in \mathcal{H}^k$ und $\psi \perp \mathcal{H}^k$. Senkrecht bezieht sich hier auf die durch g auf $\Omega^k(M)$ induzierte Bündelmetrik. Nach der Fredholmalternative gibt es damit ein $\omega \in \Omega^k(M)$ mit $\Delta\omega = \psi$, und damit

$$\phi = \Delta\omega + h = d\delta\omega + \delta d\omega + h = d\alpha + \delta\beta + h$$

mit $\alpha = \delta\omega$ und $\beta = d\omega$. Wegen $d^2 = 0$ ist $d\alpha \perp \delta\beta$. Weiterhin ist $d\alpha \perp h$ und $\delta\beta \perp h$. Wir haben also damit eine orthogonale Zerlegung einer p -Form in exakte, ko-exakte und harmonische Formen - die sogenannte *Hodge-Zerlegung*.

Sei nun $\phi = d\alpha + \delta\beta + h$ geschlossen, d.h. $d\phi = 0$. Dann ist $0 = d\delta\beta$ und somit $\|\delta\beta\|_{L^2}^2 = \int_M \beta d\delta\beta d\text{vol}_g = 0$, also $\delta\beta = 0$. Jede geschlossene Form hat also eine Hodge-Zerlegung der Form $\phi = d\alpha + h$. Also ist h die eindeutige harmonische Form in der de-Rham Kohomologiekategorie von ϕ : $[\phi] \in H_{dR}^p(M) := \frac{\ker d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)}{\text{im } d: \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)}^*$.

Weiterhin sieht man wegen $\Delta = d\delta + \delta d$ und $\delta = (-1)^{mp-1} * d*$: $\Omega^{p+1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$, dass der Hodge-Laplace mit dem Hodge-Stern Operator kommutiert. Also bildet $*$ harmonische Formen auf harmonische Formen ab. Da $*$ eine Isometrie (bzgl. der L^2 -Norm) ist, ist $*$: $\mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^{m-p}$ eine Isometrie - das entspricht der *Poincaré Dualität* auf der de-Rham Kohomologie.

2.4.5. Laplace-artige Operatoren

Woche 7 Eine wichtige Klasse von elliptischen Operatoren zu denen auch der Laplaceoperator auf Funktionen gehört sind Laplace-artige Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

Definition 2.4.14. Ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem reellen Vektorbündel $E \rightarrow M$ über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist *Laplace-artig* (vom *Laplace-Typ*), wenn sein Hauptsymbol in $\xi \in T_x^*M$ die skalare Multiplikation mit $|\xi|_g^2$ ist.

Bemerkung 2.4.15. Ist (M, g) Riemannsch, ist der Laplace-artige Operator damit automatisch elliptisch; ist (M, g) Lorentzsch, dann hyperbolisch. Nach Beispiel 2.3.4 ist P genau dann Laplace-artig, wenn $[[P, f], f] = -2|df|_g^2$ gilt.

In lokalen Koordinaten $x \in U$ hat ein Laplace-artiger Operator die Form

$$P = -g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + a^k \partial_{x^k} + b$$

mit $a^k, b \in \Gamma(\text{End}(E)|_U)$.

Beispiel 2.4.16 (Der Hodge-Laplace ist Laplace-artig). Der Hodge-Laplace $\Delta := d\delta + \delta d$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ ist Laplace-artig: Nach Beispiel 2.3.5 ist $\sigma_1(d)(x, \xi)\alpha = i\xi \wedge \alpha$. Mit $\delta = (-1)^{m(k-1)-1} * d*$ und $\iota_v \alpha = *(v^b \wedge * \alpha)$ folgt $\sigma_1(\delta)(x, \xi)\alpha = -i\iota_{\xi^\sharp} \alpha$ und somit

$$\sigma_2(d\delta + \delta d)(x, \xi)\alpha = \xi \wedge (\iota_{\xi^\sharp} \alpha) + \iota_{\xi^\sharp} (\xi \wedge \alpha).$$

*https://en.wikipedia.org/wiki/De_Rham_cohomology - Wegen $d^2 = 0$ ist das Bild wirklich eine Teilmenge von des Kerns.

2.4. Elliptische Diffops

Um zu sehen, dass die rechte Seite gleich $|\xi|_g^2 \alpha$ ist, betrachten wir beide k -Formen für α die eine Basis bilden. Dazu wählen wir lokal einen orthonormalen Rahmen e_i von T^*M mit $e_1 = \frac{\xi}{|\xi|_g}$. Sei $\alpha = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$. Dann ist

$$\xi \wedge (\iota_{\xi^\sharp} \alpha) + \iota_{\xi^\sharp} (\xi \wedge \alpha) = |\xi|_g^2 \left(e_1 \wedge (\iota_{e_1^\sharp} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) + \iota_{e_1^\sharp} (e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \right)$$

Ist $1 \in \{i_1, \dots, i_k\}$ ist der zweite Summand gleich Null und der erste eins, sonst ist es genau anders herum. Damit ist $\sigma_2(\Delta)(x, \xi) = |\xi|_g^2$ und der Hodge-Laplace ist Laplace-artig.

Beispiel 2.4.17. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über (M, g) und Zusammenhang ∇^E . Wir definieren den *Zusammenhangs-Laplace* (*Bochner-Laplace*) durch

$$\Delta := -\text{Tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E): \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E).$$

Die Spur geht hier über die beiden Faktoren T^*M im Bild von $\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$. Man beachte, dass die Spur hier als Spur einer Bilinearform metrikabhängig ist.

Wir haben

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= (\nabla^{T^*M \otimes E} (dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s))(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla^{T^*M} dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + dx^i \otimes \nabla^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + \delta_k^i \nabla_{\partial_{x^\ell}}^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \end{aligned}$$

Mit $0 = \partial_{x^k}(dx^i(\partial_{x^\ell})) = (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) + dx^i(\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M}(\partial_{x^\ell}))$ folgt $(\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) = -\Gamma_{kl}^i$ und damit

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= \nabla_{\partial_{x^\ell}}^E \nabla_{\partial_{x^k}}^E s - \Gamma_{kl}^i \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \\ \text{also } (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(X, Y) &= (\nabla_Y^E \nabla_X^E - \nabla_{\nabla_X Y}^E) s \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta s = -g^{ij} (\nabla_{\partial_{x^i}}^E \nabla_{\partial_{x^j}}^E - \Gamma_{ij}^k \nabla_{\partial_{x^k}}^E) s.$$

Insbesondere ist der Bochner-Laplace also auch vom Laplace Typ. Man kann nachrechnen, dass $\Delta = -(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$ ist.

Als nächstes werden wir sehen, dass jeder Laplace-artige Operator bis auf einen nullte Ordnung Operator die Form eines Zusammenhangs-Laplace hat:

Satz 2.4.18. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über (M, g) . Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein Operator vom Laplace-Typ. Dann gibt es einen eindeutigen Zusammenhang ∇^E auf E und ein eindeutiges $Q \in \Gamma(\text{End}(E))$ mit $P = \Delta^E + Q$, wobei Δ^E der Bochner-Laplace zu ∇^E ist.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Beweis. Es reicht ein ∇^E zu finden, so dass $[P - \Delta^E, f] = 0$ ist, denn dann ist $P - \Delta^E$ nach Beispiel 2.3.4 ein Operator 0-ter Ordnung. Allgemein ist

$$\begin{aligned} [\Delta^E, f]s &= (\Delta f)s + 2df(\partial_{x^i})\nabla_{\partial_{x^i}}^E s =: (\Delta f)s + 2\langle df, \nabla^E s \rangle \\ [P - \Delta^E, f]s &= [P, f]s - (\Delta f)s - 2\langle df, \nabla^E s \rangle. \end{aligned}$$

Wir suchen also ∇^E , so dass $2\langle df, \nabla^E s \rangle = [P, f]s - (\Delta f)s$ gilt. Diese Gleichung definiert einen eindeutigen Zusammenhang ∇^E und zeigt damit die Behauptung. \square

Beispiel 2.4.19. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der induzierte Zusammenhang auf $\Lambda^k M$. Sei $\Delta = d\delta + \delta d$ der Hodge-Laplace auf $\Omega^k(M)$. Dann ist

$$\Delta = -(\nabla)^\dagger \nabla + Q$$

mit $Q = -e_i^b \wedge \iota(e_j)R(e_i, e_j)$, wobei e_i ein lokaler Orthonormalrahmen auf TM ist, vgl. Übungsaufgabe 17.* Mehr solcher Identitäten in Satz 2.4.31.

Spektrum des Laplaceoperators auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Es gibt allgemeine abstrakte Sätze mit denen man einen Spektralsatz für den Laplaceoperator zeigen kann, siehe Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren in der Funktionalanalysis [8]. Um zu sehen was passiert und weil es einige oft auftretende Methoden verwendet, beweisen wir hier den Spektralsatz für den Laplaceoperator von Funktionen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu Fuß:

Satz 2.4.20. *Der Laplaceoperator $\Delta: C^\infty(M) \subset L^2(M) \rightarrow C^\infty(M) \subset L^2(M)$ auf einer zusammenhängenden geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) besitzt eine unendliche Folge von Eigenwerten $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit zugehörigen L^2 -orthonormalen glatten Eigenfunktionen ϕ_j :*

$$\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j. \tag{2.6}$$

Weiterhin ist der einzige Häufungspunkt der Eigenwerte $+\infty$. Insbesondere sind die Eigenräume endlich dimensional, und die Eigenfunktionen bilden eine Basis in L^2 .[†] Ist f glatt, dann konvergiert seine Zerlegung in Eigenfunktionen uniform in C^k für alle k .

Beweis.

- (i) Wir bemerken zunächst, dass aufgrund der Sätze zur elliptischen Regularität aus $\phi_j \in L^2$ erfüllt schwach $(\Delta - \lambda_j)\phi_j = 0$, folgt dass ϕ_j glatt ist.

*Hier ist R der Krümmungstensor zu ∇ auf $\Lambda^k M$, d.h. $R(e_i, e_j): \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$.

[†]Zum Begriff der Basis eines Banachraumes: In LinAlg lernt man als Basisbegriff für (unendlich dimensionale) Vektorräume den Begriff der Hamelbasis, d.h. jedes Element des Vektorraumes muss eindeutig als endliche Linearkombination von Basiselementen darstellbar sein. Das ist nicht der Basisbegriff, den man in der Funktionalanalysis braucht. Dort ist es der Begriff der Schauderbasis, der benötigt wird. Das heißt jeder Vektor hat eine eindeutige Darstellung als unendliche Linearkombination, im Sinne, dass die Reihe in der Norm des Banachraumes zu dem Vektor konvergieren muss.

https://en.wikipedia.org/wiki/Schauder_basis

(ii) ($\lambda_j \geq 0$) Wir multiplizieren (2.6) mit ϕ_j und integrieren:

$$0 \leq \int_M |d\phi_j|_g^2 d\text{vol}_g = \int_M \phi_j \Delta \phi_j d\text{vol}_g = \lambda_j \int_M |\phi_j|^2 d\text{vol}_g = \lambda_j.$$

(iii) ($\lambda_0 = 0$) Wähle $\phi_0 = \text{vol}(M, g)^{-1/2}$.

(iv) (Endlich-dimensionale Eigenräume und keinen endlichen Häufungspunkt) Sei

$$E_m := \{\phi \mid \exists \lambda_j \leq m: (\Delta - \lambda_j)\phi = 0\}.$$

Es reicht zu zeigen, dass E_m endlich dimensional ist. Wie in (i) erhalten wir $\int_M |d\phi|_g^2 d\text{vol}_g \leq m$ für $\phi \in E_m$ und somit $\|\phi\|_{H^1}^2 \leq m + 1$. Damit ist E_m in $H^1(M)$ beschränkt. Nehmen wir an, dass E_m unendlich dimensional wäre, dann gibt es eine Orthonormalfolge $u_i \in E_m$. Diese in H^1 beschränkte Folge, hat nach dem Soboleveinbettungssatz für $H^1 \hookrightarrow L^2$ eine in L^2 konvergente Teilfolge $u_{i_{j_k}}$. Der Limes sei $\phi \in L^2$. Damit muss auch $\|\phi\|_{L^2} = 1$ sein. Da die u_i aber alle orthonormal sind, gilt $\|u_i - u_j\|_{L^2}^2 = 2$. Keine Teilfolge von u_i kann also eine L^2 -Cauchyfolge sein, was den Widerspruch gibt.

(v) (Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal) Der Beweis ist wie bei symmetrischen Matrizen und benutzt die formale Selbstadjungiertheit von Δ :

$$\lambda_j \int_M \phi_k \phi_j d\text{vol}_g = \int_M \phi_k \Delta \phi_j d\text{vol}_g = \int_M (\Delta \phi_k) \phi_j d\text{vol}_g = \lambda_k \int_M \phi_k \phi_j d\text{vol}_g.$$

(vi) (Existenz der Eigenfunktionen und Häufungspunkt bei unendlich.) Wir haben schon gesehen, dass ϕ_0 existiert. Nehmen wir nun an wir haben die Existenz von $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ gezeigt (die zugehörigen ortho-normalisierten Eigenfunktionen heißen ϕ_j) und das sind insbesondere alle Eigenwerte (jeweils gezählt mit Multiplizität) $< \lambda_k$ und ein paar $= \lambda_k$ (Das müssen noch nicht alle sein – kann sein, dass wir da noch nicht alle gefunden haben).

Sei $E_k := \text{span}\{\phi_j \mid j \leq k\}$ und $E_k^{\perp L^2}$ das zu E_k orthogonale Komplement in L^2 . Wir setzen $E_k^{\perp} := H^1 \cap (E_k^{\perp L^2})$. Sei $v \in E_k^{\perp}$. Wegen $\int_M \phi_j \Delta v = \lambda_j \int_M \phi_j v$ ist $\Delta v \in E_k^{\perp L^2}$. Sei nun

$$\lambda := \inf_{v \in E_k^{\perp}} \frac{\|dv\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}. \quad (2.7)$$

Der Quotient rechts heißt *Rayleigh-Ritz-Quotient* und ist im Fall $v \in H^2$ gleich $\inf_{v \in E_k^{\perp}} \frac{\int_M v \Delta v d\text{vol}_g}{\|v\|_{L^2(g)}^2}$. Analog zur min-max Charakterisierung von Eigenwerten von Matrizen (Satz von Courant-Fischer) erwarten wir, dass λ der $(k+1)$ -te Eigenwert ist:

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Sei nun $u_j \in E_k^\perp$ eine minimierende Folge für λ , also $\|u_j\|_{L^2(g)} = 1$ und $\|du_j\|_{L^2(g)}^2 \rightarrow \lambda$. Damit ist u_j in H^1 beschränkt und damit enthält u_j eine schwach konvergente Teilfolge in H^1 (die wir im Folgenden auch wieder mit u_j bezeichnen). D.h. es gibt ein $u \in H^1$ mit $(z, u_j - u)_{H^1} \rightarrow 0$ für alle $z \in H^1$. Auch konvergiert u_j schwach in L^2 zu u , und damit gilt $\|u\|_{L^2} \leq 1$. Daraus folgt, dass auch du_j schwach in L^2 zu du konvergiert und dass $\|du\|_{L^2} \leq \liminf \|du_j\|_{L^2} = \sqrt{\lambda}$.

Wir überlegen uns als nächstes, dass $u \in E_k^\perp$: Da $u \in L^2$ ist, hat u insbesondere die Form $u = \sum_{j \leq k} a_j \phi_j + \bar{u}$ mit $\bar{u} \in E_k^\perp$ und $a_j \in \mathbb{R}$. Damit gilt $(\phi_\ell, u_j - u)_{L^2} = -(\phi_j, u)_{L^2} = -a_\ell$ und wegen $(\phi_\ell, u_j - u)_{L^2} \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$ folgt damit $a_\ell = 0$ und somit $u \in E_k^\perp$.

Des Weiteren sagt der Soboleveinbettungssatz, dass u_j in L^2 gegen u schon in der Norm konvergiert. Damit ist auch $\|u\|_{L^2} = 1$ und damit sagt die Definition von λ , dass $\|du\|_{L^2(g)} \geq \sqrt{\lambda}$ ist. Also gilt schon Gleichheit und $u \in E_k^\perp$ minimiert (2.7). D.h. wie bei den kritischen Punkten aus der endlich dimensional Analysis, gilt für alle $v \in E_k^\perp$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\|d(u + \epsilon v)\|_{L^2}^2}{\|u + \epsilon v\|_{L^2}^2} = \frac{\int_M g(du, dv) d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^2} - \frac{\|du\|_{L^2}^2 \int_M uv d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^4} \\ &= \int_M (g(du, dv) - \lambda uv) d\text{vol}_g. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da $u \in E_k^\perp$ ist, gilt die letzte Gleichung auch für alle $v \in E_k$ und damit insgesamt für alle $v \in H^1$. Also auch insbesondere für $v \in C^\infty(M)$ und damit ist u eine schwache Lösung von $\Delta u = \lambda u$. Somit ist $u \in C^\infty$ mittels elliptischer Regularität.

Insbesondere ist $\lambda \geq \lambda_k$ und wir haben gesehen, dass es immer noch einen weiteren Eigenwert gibt. Da die Eigenräume endlich-dimensional sind, bedeutet das auch, dass unendlich ein Häufungspunkt der Eigenwerte ist.

(vii) (L^2 -Vollständigkeit und L^2 -uniforme Konvergenz der Eigenfunktionen)

Sei $\Pi_N: L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum, der durch die ersten N Eigenfunktionen von Δ aufgespannt wird:

$$\Pi_N \phi := \sum_{j \leq N} (\phi, \phi_j)_{L^2} \phi_j.$$

Wir werden zeigen, dass $\phi - \Pi_N \phi \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ und $\phi \in L^2(M)$. Damit bilden dann die ϕ_j eine Orthonormalbasis in L^2 . Dazu schränken wir uns zuerst auf den

Fall $\phi \in C^\infty(M)$ ein. Es gilt, vgl. (v),

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} &\leq \frac{\int_M (\phi - \Pi_N \phi) \Delta (\phi - \Pi_N \phi) d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \\ &\stackrel{\Pi_N \Delta \equiv \Delta \Pi_N}{=} \frac{\int_M (\phi - \Pi_N \phi) \Delta \phi - (\phi - \Pi_N \phi) \Pi_N \Delta \phi d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \\ &\stackrel{\Pi_N = \Pi_N^\dagger = \Pi_N^2}{=} \frac{\int_M |d\phi|^2 + |d\Pi_N \phi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2} \leq \frac{2 \int_M |d\phi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\begin{aligned} \|d\phi\|_{L^2}^2 &= \|d\Pi_N \phi\|_{L^2}^2 + \|d(1 - \Pi_N)\phi\|_{L^2}^2 + \underbrace{(d\Pi_N \phi, d(1 - \Pi_N)\phi)_{L^2}}_{=(\Pi_N \Delta \phi, (1 - \Pi_N)\phi)_{L^2} = 0} \\ &\geq \|d\Pi_N \phi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

verwendet haben. Da $\lambda_{N+1} \rightarrow \infty$, folgt $\|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$.

Sei nun $\phi \in L^2$. Wir wissen, dass glatte Funktionen in L^2 dicht sind. D.h. es gibt $\phi^i \in C^\infty$ mit $\phi^i \rightarrow \phi$ in L^2 und wir haben

$$\begin{aligned} \|\phi - \Pi_N \phi\|_{L^2} &\leq \|\phi - \phi^i\|_{L^2} + \|\phi^i - \Pi_N \phi^i\|_{L^2} + \|\Pi_N(\phi^i - \phi)\|_{L^2} \\ &\leq 2\|\phi - \phi^i\|_{L^2} + \|\phi^i - \Pi_N \phi^i\|_{L^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(viii) (Ist f glatt, dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in C^k .)

Wir zeigen die allgemeinere Aussage: Ist $f \in H^{2k}$, dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in H^{2k} . Daraus folgt mit der Soboleveinbettung dann die Behauptung in C^k .

Den Fall $k = 0$ haben wir schon in (vii) abgehandelt.

Wir definieren $|u|_{H^{2k}} := \|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2}$ für $u \in C^\infty(M)$. Es gilt

$$\|u\|_{L^2} \|(\Delta + \text{Id})u\|_{L^2} \geq \int_M u(\Delta + \text{Id})u d\text{vol}_g = \int_M |du|^2 d\text{vol} + \int_M u^2 d\text{vol}_g \geq \|u\|_{L^2}^2$$

und damit $\|(\Delta + \text{Id})^\ell u\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Da $(\Delta + \text{Id})^\ell$ als Hintereinanderausführung des elliptischen Operators $\Delta + \text{Id}$ noch immer ein elliptischer Operator ist, folgt:

$$\|u\|_{H^{2k}} \leq c(\|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq c'|u|_{H^{2k}} \leq c''\|u\|_{H^{2k}}.$$

Damit sind $\|\cdot\|_{H^{2k}}$ und $|\cdot|_{H^{2k}}$ äquivalente Normen.

Sei nun $u \in H^{2k}$, dann ist $v := (\Delta + \text{Id})^k u \in L^2$. Dann ist

$$\|u - \Pi_N u\|_{H^{2k}} \leq C\|(\Delta + \text{Id})^k(u - \Pi_N u)\|_{L^2} \stackrel{\Pi_N \Delta \equiv \Delta \Pi_N}{=} C\|v - \Pi_N v\|_{L^2} \stackrel{(vii)}{\rightarrow} 0.$$

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(ix) Es fehlt noch, dass $\lambda_1 > 0$ ist. Da $\phi_1 \perp \phi_0$ und damit $\int_M \phi_1 d\text{vol}_g = 0$, folgt das aus der folgenden Poincaré-Ungleichung. \square

Satz 2.4.21 (Poincaré-Ungleichung). [3, Thm. 2.10] Sei (M^m, g) eine geschlossene zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $q \in [1, m)$. Dann gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|u - \bar{u}\|_{L^q} \leq c \|du\|_{L^q}$$

für alle $u \in H^q(M)$, wobei $\bar{u} := \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \int_M u d\text{vol}_g$ ist.

Bemerkung 2.4.22. Im Beweis des letzten Satzes haben wir Eigenwerte als kritische Punkte eines Variationsproblems dargestellt - dem Rayleigh-Ritz-Funktional:

$$R: v \in H^1(M) \mapsto \frac{\int_M |dv|_g^2 d\text{vol}_g}{\int_M v^2 d\text{vol}_g}$$

dargestellt.

Der Vorteil ist, dass man sich kritischen Punkten (insbesondere Infima oder Suprema) durch eine approximative Folge annähern kann und durch funktionalanalytische Methoden ggf. Konvergenz und damit die Existenz eines solchen kritischen Punktes zeigen kann.

In Übungsblatt 7 sehen wir ein anderes Beispiel für die Verwendung eines Variationsproblems, wenn wir beweisen, dass auf einer geschlossenen zusammenhängenden zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik Null jede glatte Funktion auf M , die irgendwo das Vorzeichen wechselt, Gaußkrümmung einer geeigneten Riemannschen Metrik auf M ist.

Bemerkung 2.4.23. Wir überlegen uns als nächstes, was vom Beweis von Satz 2.4.20 auch für den Zusammenhangslaplace $-(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$ eines Vektorbündels mit Bündelmetrik auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten gilt bzw. angepasst werden kann:

(i) ✓ (ii) ✓, weil

$$0 \leq \int_M |\nabla^E \phi_j|^2 d\text{vol}_g = \int_M \langle \phi_j, \Delta^E \phi_j \rangle d\text{vol}_g = \lambda_j \int_M |\phi_j|^2 d\text{vol}_g = \lambda_j.$$

(iii) 0 muss im Allgemeinen kein Eigenwert sein - Bsp. in ÜA 23.ii

(iv) ✓ (v) ✓, da auch $\Delta^E = -(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$.

(vi) ✓ ganz analog, wenn man statt $\|dv\|_{L^2}$ im Rayleigh-Ritz-Quotient $\|\nabla^E v\|_{L^2}$ benutzt.*

(vii+viii) ✓

(ix) Es kann sein, dass $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ ist. Beispiel später

Insgesamt hat also auch der Zusammenhangslaplace auf geschlossenen Mannigfaltigkeit ein Basis von L^2 aus L^2 -orthonormalen Eigenschnitten ϕ_j von Δ^E , also $\Delta^E \phi_j = \lambda_j \phi_j$, für $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$

*Bei $v \in C^\infty(M)$ macht das keinen Unterschied, da $g(\nabla f, \nabla f) = g(df, df)$.

2.4.6. Dirac-artige Operatoren

Eine sehr wichtige Klasse von elliptischen Differentialoperatoren erster Ordnung sind Dirac-artige Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

Definition 2.4.24. Seien $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow M$ Vektorbündel über einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Ein Differentialoperator $D \in \text{Diff}^1(E, F)$ ist *Dirac-artig* (vom *Dirac-Typ*), wenn $D^\dagger D$ und DD^\dagger Laplace-artige Operatoren sind.

Beispiel 2.4.25. (i) Für den Diracoperator aus Beispiel 2.1.1(vii) gilt $D = D^\dagger$ und D^2 wirkt komponentenweise als Wellenoperator. Damit ist der Diracoperator auf Minkowski Dirac-artig. Wir werden sehen, dass er nicht elliptisch ist. Aber ganz analog kann man mit der Forderung $D^2 = \Delta: C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)^*$ einen Diracoperator erhalten, der dann elliptisch ist.

(ii) Ist $D \in \text{Diff}^1(E, F)$ vom Dirac-Typ, dann ist auch

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix} \in \text{Diff}^1(E \oplus F)$$

Dirac-artig, und es gilt $\tilde{D} = \tilde{D}^\dagger$.

(iii) *De Rham Operator:* $d + \delta \in \text{Diff}^1(\Omega^* M := \bigoplus_k \Omega^k(M))$ ist Dirac-artig: Denn $(d + \delta)^\dagger = \delta + d$ und $(d + \delta)^2 = d\delta + \delta d = \Delta$ ist der Hodge-Laplace.

Bemerkung 2.4.26. Sei D ein symmetrischer (d.h. $D = D^\dagger$) Dirac-artiger Operator auf $E \rightarrow M$ zur (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $\sigma_1(D)(x, \xi): E_x \rightarrow E_x$ sein Symbol. Für festes x setzen wir $\text{cl}(\xi) = i\sigma_1(D)(x, \xi)$. Aus $D = D^\dagger$ folgt $\text{cl}(\xi) = -\text{cl}(\xi)^\dagger$. Da D Dirac-artig ist, gilt weiterhin $\text{cl}(\xi)\text{cl}(\eta) = -|\xi|_g^2 \text{Id}_{E_x}$. Insbesondere sehen wir hier, dass für g Riemannsch D elliptisch ist. Polarisieren ergibt für $\xi, \eta \in T_x^* M$

$$\text{cl}(\xi)\text{cl}(\eta) + \text{cl}(\eta)\text{cl}(\xi) = -2g(\xi, \eta)\text{Id}_{E_x}.$$

Diese lineare Abbildung $\text{cl}: T_x^* M \rightarrow \text{End}(E_x)$ nennen wir *Cliffordmultiplikation* und definieren $\text{cl}(v \in T_x M) := \text{cl}(v^\flat \in T_x^* M)$.

Definition 2.4.27. Ein Vektorbündel E über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) zusammen mit einer Cliffordmultiplikation

$$\text{cl}: \Gamma(T^* M) \rightarrow \text{End}(E)$$

zur quadratischen Form $q = g$ heißt *Cliffordmodul*.

Ein Zusammenhang ∇^E heißt *kompatibel mit der Cliffordmultiplikation* bzw. *Clifford-zusammenhang*, falls für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X).$$

* Δ wirkt hier komponentenweise als Laplace auf Funktionen.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Das ist kurz für $\nabla_Y^E(\text{cl}(X)s) - \text{cl}(X)(\nabla_Y^E s) = \text{cl}(\nabla_Y X)s$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$, wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Eine Bündelmetrik h_E ist *kompatibel* mit der Cliffordmultiplikation, falls

$$h_E(\text{cl}(\theta)s_1, s_2) = -h_E(s_1, \text{cl}(\theta)s_2)$$

für alle $s_i \in \Gamma(E)$ und $\theta \in \Omega^1(M)$ gilt.

Ein *Diracbündel* ist ein Cliffordmodul $E \rightarrow M$ mit Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, die mit der Cliffordmultiplikation kompatibel ist, und metrischen Cliffordzusammenhang ∇^E .

Bemerkung 2.4.28. Jedes Diracbündel besitzt einen Operator vom Dirac-typ $D \in \text{Diff}^1(E)$:

$$D: \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\text{cl}} \Gamma(E).$$

In lokalen Koordinaten $x \in U$ ist

$$D = \text{cl}(dx^i)\nabla_{\partial_{x^i}} = g^{ij}\text{cl}(\partial_{x^j})\nabla_{\partial_{x^i}}.$$

Bzw. bzgl eines lokalen orthonormalen Rahmens gilt $D = \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i}$.

Wir berechnen D^\dagger —es reicht, das lokal mittels geodätischer Normalkoordinaten um $x \in U$ zu tun. Sei $e_i := \partial_{x^i}$, $s_i \in \Gamma_c(E|_U)$. Dann ist $\nabla_{e_i} e_j|_x = 0$. Dann gilt in x :

$$\begin{aligned} \langle Ds_1, s_2 \rangle &= \langle \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i} s_1, s_2 \rangle \stackrel{\text{cl und } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ kompatibel}}{=} -\langle \nabla_{e_i} s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle \\ &\stackrel{\text{metr.}}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_{e_i}(\text{cl}(e_i)s_2) \rangle \\ &\stackrel{[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X)}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle + \langle s_1, \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i} s_2 \rangle = -\text{div}V + \langle s_1, Ds_2 \rangle \end{aligned}$$

mit $V = V^i e_i$ und $V^i = \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle$. Damit ist

$$\int_M \langle Ds_1, s_2 \rangle \text{dvol}_g = \int_M \langle s_1, Ds_2 \rangle \text{dvol}_g, \text{ also } D = D^\dagger.$$

Weiterhin ist $\sigma_1(D)(x, \xi) = i[D, f] = \text{icl}(\xi)$. Also ist $\sigma_2(D^2)(x, \xi) = |\xi|_g^2$.

Beispiel 2.4.29. Für den de-Rham Operator aus Beispiel 2.4.25 ist die Cliffordmultiplikation mit einer 1-Form $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ durch $\text{cl}(\omega) = \omega \wedge \cdot - \iota_{\omega^\sharp}$ gegeben. Wir haben somit, s. auch Beispiel 2.3.5 und 2.4.16, $\text{cl} \circ \nabla = d + \delta$.

In Satz 2.4.18 haben wir gesehen, dass sich jeder Laplace-artige Operator $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ als $\Delta^E + Q$ für einen geeigneten Zusammenhang ∇^E plus einen nullte Ordnungsoperator Q schreiben lässt. Im Falle des Hodge-Laplace haben wir in Beispiel 2.4.19 gesehen, dass Q aus dem Krümmungstensor bestimmt wird.

Wir wollen im Folgenden ähnliches für Diracoperatoren eines Diracbündels finden.

Bemerkung 2.4.30. Ein $K \in \Omega^2(M, \text{End}(E))$ definiert eine Abbildung $K: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ durch

$$(Ks)(p) := \sum_{i,j} \text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)K(e_i, e_j)s$$

für eine lokale Orthonormalbasis e_i von $T_p M$. Man überprüft, dass die Definition unabhängig vom gewählten Orthonormalbasis ist. Dann gilt nach Übungsaufgabe 19.

Lemma 2.4.31. (Weitzenböck-Formel) Sei $E \rightarrow M$ ein Diracbündel. Der Zusammenhang sei ∇^E . Dann gilt $D^2 = \Delta^E + R^E$, wobei R^E die Krümmung von ∇^E ist.

2.4.7. Etwas Funktionalkalkül

Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein elliptischer Operator der Ordnung ℓ auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit für den es eine Basis aus orthonormalen Eigenfunktionen mit endlich-dimensionalen Eigenräumen gibt (z.B. P ist ein Zusammenhangs-Laplace).

Sei $\sigma(P) \subset \mathbb{R}$ die Menge der Eigenwerte von P . Ein $s \in L^2(E)$ hat dann eine Zerlegung $s = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} s_\lambda$ mit s_λ der Anteil von s im Eigenraum zu λ . Da die Zerlegung orthogonal ist, ist insbesondere $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} \leq \|s\|_{L^2(g)}$.

Satz 2.4.32. Ein Schnitt $s \in L^2(E)$ ist genau dann glatt, wenn $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} = O(|\lambda|^{-k})$ für alle k gilt (Man sagt, die Zerlegung ist schnell abfallend (rapidly decreasing)).

Beweis. Sei s glatt, dann ist auch $P^r s$ glatt für alle $r \in \mathbb{N}$, also insbesondere $P^r s \in L^2$. Aus $\|P^r s\|_{L^2}^2 = \sum_\lambda \lambda^r \|s_\lambda\|_{L^2}^2$ folgt direkt, dass die Zerlegung schnell abfallend ist.

Sei die Zerlegung nun schnell abfallend. Da s_λ eine Eigenfunktion von P ist, folgt mittels elliptischer Abschätzung: $\|s_\lambda\|_{H^{k+\ell}} \leq C_k (\|P s_\lambda\|_{H^k} + \|s_\lambda\|_{L^2}) \leq C_k (1 + |\lambda|) \|s_\lambda\|_{H^k}$. Mehrfaches Anwenden liefert $\|s_\lambda\|_{H^{k\ell}} \leq \tilde{c}_k (1 + |\lambda|)^k \|s_\lambda\|_{L^2}$. Damit ist

$$\|s\|_{H^{k\ell}} \leq \sum_\lambda \|s_\lambda\|_{H^{k\ell}} \leq \tilde{c}_k (1 + |\lambda|)^k \sum_\lambda \|s_\lambda\|_{L^2}.$$

Die Abfallbedingung zeigt somit, dass $s \in H^r$ für alle r ist. Mittels der Soboleveinbettung ist dann s glatt. \square

Sei nun f eine beschränkte Funktion auf $\sigma(P)$. Wir definieren $f(P)$ durch

$$f(P)s := \sum_{\lambda \in \sigma(P)} f(\lambda) s_\lambda,$$

wobei $s = \sum_\lambda s_\lambda$ die Zerlegung von s in Eigenfunktionen ist. Achtung: $f(P)$ ist i.A. kein Differentialoperator mehr, nicht mal ein lokaler Operator*.

Satz 2.4.33. Die Abbildung $f \mapsto f(P)$ ist ein unitärer Ringhomomorphismus vom Ring der beschränkten Funktionen auf $\sigma(P)$ in die beschränkten Operatoren auf $L^2(E)$. Es gilt $\|f(P)\| := \sup_{v \in \Gamma(E), \|v\|_{L^2} = 1} \|Pv\|_{L^2} \leq \sup |f|$. Weiterhin bildet $f(P)$ glatte Schnitte von E auf glatte Schnitte ab.

Beweis. Sei $s \in L^2(E)$, also $\|s\|_{L^2}^2 = \sum_\lambda \|s_\lambda\|_{L^2}^2 < \infty$. Dann ist

$$\|f(P)s\|_{L^2}^2 = \sum_\lambda |f(\lambda)|^2 \|s_\lambda\|_{L^2}^2 \leq \sup |f|^2 \|s\|_{L^2}^2.$$

Damit ist $f(P)$ ein beschränkter Operator auf $L^2(E)$ mit $\|f(P)\| \leq \sup |f|$. Dass $f(P)$ glatte Schnitte auf glatte Schnitte abbildet, folgt aus Satz 2.4.32 und f beschränkt. \square

*Ein Operator D ist lokal, wenn $Ds(x)$ nur von s auf einer Umgebung von x abhängt.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Approx_WK.mp4 bis Minute 7:30

Bemerkung 2.4.34. Ist f selbst schnell abfallend, d.h. $|f(\lambda)| = O(|\lambda|^{-k})$ für alle k , dann ist $f(P)(L^2(E)) \subset \Gamma(E)$. Insbesondere hat $f(P)$ einen glatten Kern*, d.h. es gibt ein $k \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$ mit

$$f(P)s(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy.$$

Das Integral wird immer noch mit dem Volumenelement $d\text{vol}_g$ ausgeführt, aber wir schreiben dy um zu zeigen, dass über y integriert wird. Weiterhin ist $E \boxtimes E^* := \pi_1^* E \otimes \pi_2^* E^*$ mit $\pi_i: M \times M \rightarrow M$ die Projektion auf die i -te Komponente ein Vektorbündel über $M \times M$. Operatoren mit glattem Kern werden *Glättungsoperatoren* genannt.

2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Wärmeleitungsgleichung als Beispiel einer parabolischen Differentialgleichung betrachten:

Im ganzen Abschnitt gelte: Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und sei P ein Laplace-artiger Operator auf E mit $\sigma(P) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer Basis von L^2 -orthonormalen Eigenschnitten (z.B. der Hodge-Laplace).

Satz 2.5.1. Die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}s + Ps = 0$ mit Anfangswert $s(\cdot, 0) = s_0 \in \Gamma(E)$ hat eine eindeutige Lösung, die glatt in M und differenzierbar in t ist. Sei $s_t := s(\cdot, t)$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt weiterhin $\|s_t\|_{L^2(g)} \leq \|s_0\|_{L^2(g)}$.

Beweis. Angenommen es gibt eine glatte Lösung s_t . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|s_t\|_{L^2}^2 &= \int_M \left\langle \frac{\partial}{\partial t} s_t, s_t \right\rangle d\text{vol}_g + \int_M \left\langle s_t, \frac{\partial}{\partial t} s_t \right\rangle d\text{vol}_g \\ &= - \int_M \langle P s_t, s_t \rangle d\text{vol}_g - \int_M \langle s_t, P s_t \rangle d\text{vol}_g \stackrel{\sigma(P) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}}{\leq} 0, \end{aligned}$$

*Die Existenz eines Kernes an sich, kommt häufig vor: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_kernel_theorem. Ob der bzw. oft der differenzierbar ist, ist eine andere Frage. Aber Glättungsoperatoren haben einen glatten Kern:

Sei $\mathcal{D}'(E)$ der Raum der Distributionen auf E , also allen linearen Funktionalen $T: \Gamma_c(E) \rightarrow \mathbb{K}$ für die für alle Kompakta $K \subset M$ es ein $C > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ mit $|T s| \leq C \|s\|_{C^k}$ gibt. Auf $\mathcal{D}'(E)$ wählen wir die schwache Topologie, d.h. $T_i \rightarrow T$, falls $T_i(s) \rightarrow T(s)$ für alle $s \in \Gamma_c(E)$ gilt.

Satz 2.4.35. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit. Sei $A: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein stetiger Operator. Dann sind äquivalent:

- (i) A erweitert sich zu einem stetigen Operator $A: \mathcal{D}'(E) \rightarrow \Gamma(E)$.
- (ii) A erweitert sich zu einem stetigen Operator $A: H^s(E) \rightarrow H^t(E)$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$ (Hierbei ist $H^{-s}(E)$ für $s > 0$ dual zu $H^s(E)$.)
- (iii) A hat einen glatten Kern $K_A \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$.

Der Satz gilt im Prinzip auch auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten, man muss nur auf den Support der Funktionen aufpassen.

2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

und damit $\|s_t\|_{L^2} \leq \|s_0\|_{L^2}$. Weiterhin ergibt sich damit die Eindeutigkeit.

Um die Existenz zu zeigen, setzen wir $s_t = e^{-tP} s_0$, wobei e^{-tP} mittels des Funktionalkalküls aus Abschnitt 2.4.7 definiert ist. Dann ist $s(x, t) = s_t(x)$ glatt, und es gilt $\frac{\partial}{\partial t} s_t = -P s_t$, denn für die Eigenzerlegung $s_0 = \sum_{\lambda} s_{\lambda}$ haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t} s_t = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-tP} s_0) = \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t\lambda} s_{\lambda}) = \sum_{\lambda} -\lambda e^{-t\lambda} s_{\lambda} = -P e^{-tP} s_0 = -P s_t. \quad \square$$

Vom Funktionalkalkül wissen wir sogar, dass e^{-tP} für alle $t > 0$ ein Glättungsoperator ist, also einen zeitabhängigen Schnitt $k_t \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$ für $t > 0$ besitzt, den *Wärmeleitungskern*, so dass für alle $u \in \Gamma(E)$ und $t > 0$ gilt:

$$e^{-tP} u(x) = \int_M k_t(x, y) u(y) dy.$$

Beispiel 2.5.2. (Wärmeleitungskern für den Laplaceoperator auf Funktionen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n) \mathbb{R}^n ist nichtkompakt und Δ besitzt dort keine L^2 -Eigenwerte. Trotzdem kann man $e^{-t\Delta}$ definieren. Das ist wieder ein Glättungsoperator mit glattem Kern

$$k_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}.*$$

[Approx_WK.mp4](#) ab Minute 7:30

Satz 2.5.3. *Der Wärmeleitungskern hat die folgenden Eigenschaften:*

(i)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) k_t(x, y) = 0,$$

wobei der Index x an P bedeutet, dass P nur auf die x -Variable wirkt. D.h für jedes y erfüllt $k_t(\cdot, y) \in \Gamma(E \otimes E_y^* \rightarrow M)$ die Wärmegleichung.

(ii) Für $u \in \Gamma(E)$ konvergiert $\int_M k_t(x, y) u(y) dy \rightarrow u(x)$ für $t \rightarrow 0$ uniform in x .

Insbesondere ist der Wärmeleitungskern der eindeutige zeitabhängige Schnitt in $E \boxtimes E^*$, der C^2 in (x, y) und C^1 in t ist sowie die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

Beweis. Das (i) und (ii) gilt, folgt direkt aus den Eigenschaften von e^{-tP} von oben.

Habe nun k_t die Eigenschaften (i) und (ii), dann betrachten wir die zugehörigen Operatoren $u_t(x) := (K_t u)(x) := \int_M k_t(x, y) u(y) dy$ für $t > 0$. Es ist $K_t : L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ ein beschränkter Operator, da k_t stetig ist, Übungsaufgabe 22(ii). Wegen (i) gilt $(\partial_t + P)u = 0$ für $t > 0$ und $u(x, t) := u_t(x)$. Wegen Eindeutigkeit, vgl. Satz 2.5.1, muss $K_t u = e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} u$ für alle $t > t_0 > 0$ gelten. Für $t_0 \rightarrow 0$ folgt aus (ii) $K_{t_0} u \rightarrow u$ uniform in x . Weiterhin gilt

$$\|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})u\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} |e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}|^2 \|u_{\lambda}\|_{L^2}^2 \leq C_{t,t_0}^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

*Man kann andersherum auch dieses k_t nutzen, um $e^{-t\Delta}$ zu definieren und dann sehen, dass dieser Operator die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

wobei C_{t,t_0} das Maximum von $\lambda \mapsto e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}$ ist. Dieses wird bei $\lambda = -t_0^{-1} \ln(1 - t_0/t)$ angenommen, ist durch $C_{t,t_0} = (1 - t_0/t)^{t/t_0} ((1 - t_0/t)^{-1} - 1)$ gegeben und geht gegen Null für $t_0 \rightarrow 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} s - e^{-t_0 P} s\|_{L^2} &\leq \|e^{-(t-t_0)P} K_{t_0} s - e^{-(t-t_0)P} s\|_{L^2} + \|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})s\|_{L^2} \\ &\stackrel{UA\ 22(i)}{\leq} \|K_{t_0} s - s\|_{L^2} + \|(e^{-t_0 P} - 1)s\|_{L^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $t_0 \rightarrow 0$. Also ist $K_t s = e^{-tP} s$ für alle s . \square

2.5.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns

Bedingung (ii) aus dem letzten Satz sagt, dass für t gegen Null, der Wärmeleitungskern zu einer δ -Distribution* wird. Ziel dieses Abschnitts ist es eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns für $t \rightarrow 0$ zu finden. Was ist das?

Definition 2.5.4. Sei $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$ eine Funktion mit Werten im Banachraum B (bei uns wird $f(t) = k_t$ und damit $B = C^r(E \boxtimes E^*)$ sein). Eine formale Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$ heißt *asymptotische Entwicklung* von f nahe $t = 0$, falls für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ es ein ℓ_n gibt, so dass für alle $\ell \geq \ell_n$

$$\|f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k(t)\|_B \leq C_{\ell,n} |t|^n$$

für geeignete Konstanten $C_{\ell,n}$ und genügend kleine t gilt.

Bemerkung 2.5.5. Jede Taylorreihe ist eine asymptotische Entwicklung. Asymptotische Entwicklungen müssen also nicht konvergieren und wenn sie konvergieren, müssen sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.

Um eine Asymptotik des Wärmeleitungskerns zu erhalten, betrachtet man nicht den echten Wärmeleitungskern sondern einen *approximativen Wärmeleitungskern*:

Definition 2.5.6. Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Ein *approximativer Wärmeleitungskern* der Ordnung m ist ein zeitabhängiger Schnitt $\tilde{k}_t(x, y)$ in $E \boxtimes E^*$, der C^1 in t und C^2 in (x, y) ist, Bedingung (ii) aus Satz 2.5.3 erfüllt und für den es einen C^m -Schnitt $r_t(x, y)$ in $E \boxtimes E^*$ gibt, der

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x\right) \tilde{k}_t(x, y) = t^m r_t(x, y),$$

für alle $t > 0$ erfüllt und der für $t \geq 0$ stetig in t ist.

Die Asymptotik von solchen approximativen Wärmeleitungskernen wird leichter zugänglich sein, weil sie lokal berechenbar ist, und wir werden sehen, dass approximative Wärmeleitungskerne im folgendem Sinne die gleiche Asymptotik wie der echte Wärmeleitungskern besitzen:

*https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

Satz 2.5.7. Sei k_t der echte Wärmeleitungskern. Dann gibt es für jedes m ein $m' \geq m$, so dass für jeden approximativen Wärmeleitungskern \tilde{k}_t der Ordnung m'

$$k_t(x, y) - \tilde{k}_t(x, y) = t^m \tilde{r}_t(x, y)$$

für alle $t > 0$ und für einen geeigneten zeitstetigen ($t \geq 0$) C^m -Schnitt \tilde{r}_t von $E \boxtimes E^*$ gilt.

Direkt von der Definition einer asymptotischen Entwicklung folgt:

Folgerung 2.5.8. Sei $\sum_k a_k t^k$ eine formale Reihe in $C^r(E \boxtimes E^*)$, für die $\tilde{k}_t := \sum_k^{m-1} a_k t^k$ ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung m ist. Dann ist $\sum_k^\infty t^k a_k$ eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns.

Um Satz 2.5.7 zu zeigen, benötigen wir:

Lemma 2.5.9 (Duhamelsche Prinzip). Sei s_t eine in t stetige Familie von C^2 -Schnitten von E . Dann ist $\tilde{s}_t = \int_0^t e^{-(t-u)P} s_u du$ die eindeutige Familie von glatten Schnitten von E , die in t differenzierbar ist, für die $\tilde{s}_0 = 0$ gilt und die die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P \right) \tilde{s}_t = s_t$$

für alle $t > 0$ erfüllt. Insbesondere gilt $\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t C_k \sup\{\|s_u\|_{H^{2k}} \mid 0 \leq u \leq t\}$ für alle $k \geq 0$.

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung, vgl. Satz 2.5.1. Dass \tilde{s}_t glatt ist, folgt, da $e^{-(t-u)P}$ ein Glättungsoperator ist. Der Rest folgt mit

$$\frac{\partial \tilde{s}_t}{\partial t} = s_t + \int_0^t -P e^{-(t-u)P} s_u du = s_t - P \tilde{s}_t.$$

Um die Sobolevnorm abzuschätzen, überlegen wir uns zunächst, dass e^{-tP} ist auch als Operator von $H^{2k} \rightarrow H^{2k}$ für alle $k \leq 0$ beschränkt ist:

$$\|e^{-tP} s\|_{H^{2k}} \leq C(\|P^k(e^{-tP} s)\|_{L^2} + \|e^{-tP} s\|_{L^2}) \leq C(\|P^k s\|_{L^2} + \|s\|_{L^2}) \leq \|s\|_{H^{2k}},$$

wobei die erste Ungleichung eine elliptische Abschätzung ist, die zweite Gleichung verwendet, dass P und e^{-tP} kommutieren und ÜA 22(i) und die letzte Ungleichung folgt, da P^k ein Differentialoperator der Ordnung $2k$ ist. Wir haben also

$$\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t \sup_{0 \leq u \leq t} \|e^{-(t-u)P} s_u\|_{H^{2k}} \leq t C_k \sup_{0 \leq u \leq t} \|s_u\|_{H^{2k}}. \quad \square$$

Beweis von Satz 2.5.7. Sei $m > 0$ und sei \tilde{k}_t ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung $m' \geq m$. Nach Definition gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) \tilde{k}_t(x, y) = t^{m'} r_t(x, y)$$

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

für einen $C^{m'}$ -Schnitt r_t in $E \boxtimes E^*$. Nach dem Duhamelschen Prinzip gibt es eine eindeutige Lösung $\hat{s}_t(x, y)$ (y hier als Parameter behandelt) von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x\right) \hat{s}_t(x, y) = -t^{m'} r_t(x, y)$$

mit $\hat{s}_0 = 0$ und

$$\|\hat{s}_t\|_{H^{m'}} \leq C_{m'} t^{m'+1} \sup\{\|r_u\|_{H^{m'}} \mid 0 \leq u \leq t\} \leq \hat{C}_{m'} t^{m'+1}.$$

Ist nun $m' > m + \dim M$, so folgt aus der Soboleveinbettung, dass $t^{-m'-1} \hat{s}_t$ in C^m ist. Wegen Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleichung folgt $\tilde{k}_t(x, y) + \hat{s}_t(x, y) = k_t(x, y)$ und damit die Behauptung. \square

Als nächstes bauen wir uns einen approximativen Wärmeleitungskern. Während der Wärmeleitungskern ein globales Objekt ist, werden lokale Daten der Mannigfaltigkeit reichen, um einen approximativen Wärmeleitungskern zu konstruieren.

Sei (M^m, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d . Wir setzen (in Anlehnung an den Wärmeleitungskern vom Laplace im Euklidischen)

$$h_t(x, y) = (4\pi t)^{-m/2} \exp(-d(x, y)^2/4t).$$

und betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um y mit $r^2 = g_{ij} x^i x^j$. Direktes (längeres) Nachrechnen, [9, Lemma 7.12] ergibt:

Lemma 2.5.10. *Sei $h(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp(-r^2/4t)$ mit $r = d(x, y)$. Dann gilt*

- (i) $\text{grad} h = -\frac{h}{2t} r \partial_r$
- (ii) $\frac{\partial h}{\partial t} + \Delta h = \frac{r h}{4gt} \frac{\partial g}{\partial t}$ wobei $g = \det g_{ij}$ ist.

Satz 2.5.11. *Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Sei P ein Laplace-artiger Operator auf E und k_t der zugehörige Wärmeleitungskern.*

- (i) *Die asymptotische Entwicklung von k_t ist von der Form $h_t(x, y) \sum_j t^j t(\Theta_j(x, y))$ für glatte Schnitte Θ_j von $E \boxtimes E^*$.*
- (ii) *Diese Entwicklung gilt im Banachraum $C^r(E \boxtimes E^*)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und kann formal differenziert werden um die asymptotische Entwicklung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen des Wärmeleitungskerns zu erhalten.*
- (iii) *Für $P = \Delta^E + Q$ mit $Q = R^E$ oder $Q = 0$ sind die $\Theta_j(x, x)$ algebraische Ausdrücke in der Metrik und den Zusammenhangskoeffizienten von ∇^E und deren Ableitungen.*

Beweisskizze für (i). Weiß man, dass $\tilde{k}_t^n(x, y) := h_t(x, y) \sum_{j=0}^{n-1} t^j \Theta_j(x, y)$ ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung n ist, dann folgt aus Folgerung 2.5.8, dass es sich hier um eine asymptotische Entwicklung von k_t handelt. Die Frage ist also,

2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

ob man glatte Schnitte Θ_j so finden kann, dass $\tilde{k}_t(x, y)^k$ ein solcher approximativer Wärmeleitungskern für alle k groß genug ist.

Um für $t \rightarrow 0$ die Delta-Distribution zu erhalten, also Bedingung (ii) aus Satz 2.5.3 zu erfüllen, reicht es wenn $\Theta_j(x, y)$ nahe der Diagonalen glatt sind und $\Theta_0(x, x) = 1$ ist. Um approximativ die Wärmegleichung zu lösen, schauen wir uns das Problem zunächst nur in der Umgebung eines festen $y \in M$ an: $s(x) := \Theta_t(x, y)$ in geodätischen Normalkoordinaten um y und $h(x) = h_t(x, y)$ wie im letzten Lemma. Einen Schnitt in E betrachten wir dann als Schnitt in $E \otimes E^*$. Dann ist

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = h^{-1}(\partial_t h)s + \partial_t s + Ps + h^{-1}[P, h]s = h^{-1}(\partial_t h)s + \partial_t s + Ps + h^{-1}[\Delta^E, h]s.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $P = \Delta^E + Q$ für einen geeigneten Zusammenhangs-Laplace und einen nullte Ordnung-Operator Q ist (und damit Q mit Multiplikation mit h kommutiert). Weiterhin ist mit letztem Lemma $[\Delta^E, h]s = (\Delta h)s - 2\nabla_{\nabla h}^E s = -\frac{\partial h}{\partial t}s + \frac{rh}{4gt}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{h}{t}\nabla_{r\partial_r}^E s$ und damit

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = \partial_t s + Ps + \frac{r}{4gt}\frac{\partial g}{\partial r}s + \frac{1}{t}\nabla_{r\partial_r}^E s. \quad (2.9)$$

Wir setzen eine asymptotische Entwicklung $s \sim u_0 + tu_1 + t^2u_2 + \dots$ an und wollen $(\partial_t + P)(hs) = 0$ lösen – dann wäre bei Abbruch der Entwicklung bei t^{n-1} dies eine Lösung zur Inhomogenität $\sim t^n$. Setzen wir die Entwicklung ein und vergleichen Potenzen in t , erhalten wir

$$\nabla_{r\partial_r}^E u_j + \left(j + \frac{r}{4g}\frac{\partial g}{\partial r}\right)u_j = -Pu_{j-1} \text{ (bzw. äquivalent } \nabla_{r\partial_r}(r^j g^{\frac{1}{4}}u_j) = -r^{j-1}g^{\frac{1}{4}}Pu_{j-1})$$

mit $u_{-1} = 0$. Wenn man u_{j-1} kennt, ist das nur noch eine gewöhnliche DGL für u_j . Man kann das induktiv lösen, und die Lösung ist bis auf ein Vielfaches von $r^{-j}g^{-\frac{1}{4}}$ eindeutig lösbar. Da die Lösung glatt, also auch insbesondere glatt in $r = 0$, sein soll, muss dieses Vielfache für verschwinden und $u_0(r = 0) = 1$ sein. Damit sind die u_j eindeutig.

Sei ϵ der Injektivitätsradius von M und sei $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion mit $\psi(r \leq \epsilon/2) = 1$ und $\psi(r \geq \epsilon) = 0$. Wir definieren $\theta_j(x, y)$ als die $E \boxtimes E^*$ -wertige Funktion für alle $d(x, y) < \epsilon$, die in geodätischen Normalkoordinaten nahe y durch $u_j(x)$ gegeben ist, und setzen $\Theta_j(x, y) = \psi(d(x, y)^2)\theta_j(x, y)$. Wegen glatter Abhängigkeit der Lösungen der Differentialgleichungen an den Anfangswerten, ist $\Theta_j \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$. Dann ist $\Theta_0(y, y) = \text{Id}$ und $h_t(x, y) \sum_{j=0}^k t^j \Theta_j(x, y)$ konvergiert zu einer δ -Distribution für $t \rightarrow 0$. Für $d(x, y) > \epsilon/2$ ist $\tilde{k}_t^n(x, y)$ glatt und kann $|(\partial_t + P_x)\tilde{k}_t(x, y)|$ durch $\sum_i t^i C_i$ abgeschätzt werden. Damit ist $\tilde{k}_t^n(x, y)$ ein approximativer Wärmeleitungskern. \square

Beispiel 2.5.12. Wir haben gesehen, dass $u_0(r = 0) = 1$. Man kann die Rekursionsformeln nutzen, um alle $\Theta_j(y, y) = u_j(r = 0)$ zu berechnen. Es wird nur aufwändiger je höher j wird. Wir berechnen hier noch $\Theta_1(y, y)$ - mit (2.9) folgt:

$$u_1(r = 0) = -(Pu_0)(0) = ((\Delta^E + Q)u_0)(0) = (\Delta^E u_0)(0) + Q1.$$

2. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Für $P = D^2$, D der Diracoperator zu einem Diracbündel $E \rightarrow M$, ist nach der Weitzenböck-Formel, vgl. Lemma 2.4.31, $Q = R^E$. Aus der Darstellung der Metrik in geodätischen Normalkoordinaten [2, Satz II.7.7] kann man $(\Delta^E u_0)(0) = (\sum_i \partial_i^2 g^{-1/4})(0)$ und damit $u_1(0) = \frac{1}{6} \text{scal} + R^E$ berechnen.

2.5.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz

Woche 9 Mit Hilfe der asymptotischen Expansion des Wärmeleitungskerns kann man Aussagen zum Wachstum der Eigenwerte des Laplaceoperators und damit zu geometrischen Größen der unterliegenden Mannigfaltigkeit machen. Wir werden hier die folgenden zwei Beispiele betrachten:

Satz 2.5.13. * Das Spektrum des Laplaceoperators Δ auf Funktionen einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit bestimmt deren Dimensionen, Volumen und totale Skalarkrümmung $\int_M \text{scal}_g d\text{vol}_g$. In Dimension zwei bestimmt es damit außerdem die Topologie von M .

Satz 2.5.14 (Weylsches Gesetz). Sei (M^m, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten den Laplace auf Funktionen. Sei $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq \lambda$ (mit Vielfachheiten gezählt). Dann gilt

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(4\pi)^{m/2} \Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) \lambda^{m/2}$$

für $\lambda \rightarrow \infty$.[†] (bzw. äquivalent zur obigen Aussage: Sind $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ die durchnummerierten Eigenwerte mit Vielfachheiten, dann gilt

$$\lambda_j \sim 4\pi \left(\frac{1}{\Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) j \right)^{2/m} .)$$

Um diese Sätze zu beweisen, brauchen wir die Spur von Operatoren: Für eine Matrix A auf \mathbb{R}^n ist die Spur einfach $\text{Tr } A = \sum_i \langle A e_i, e_i \rangle$ für eine Orthonormalbasis e_i . Für einen Operator $A: H \rightarrow H$ (H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ - bei uns $H = L^2(E)$) wollen wir die Spur analog definieren: e_i sei eine Orthonormalbasis von H und $\text{Tr } A = \sum_i \langle A e_i, e_i \rangle_H$. Da es sich um eine unendliche Summe handelt, muss diese nicht konvergieren. Solche beschränkten Operatoren für welche Tr existiert, nennt man *Spurklasseoperatoren*. Wir werden hier zeigen, dass Glättungsoperatoren dazu gehören:

Lemma 2.5.15. Sei $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ ein beschränkter Operator mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren e_i zu Eigenwerten λ_i . A haben einen Kern k , der ein stetiger Schnitt in $E \boxtimes E^*$ ist - also $(As)(x) = \int_M k(x, y) s(y) dy$. Dann ist $k(x, y) = \sum_j \lambda_j e_j(x) \otimes e_j(y)^*$ und $\text{Tr } A = \int_M k(x, x) dx = \sum_i \lambda_i$

*Can you hear the shape of a drum? https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_the_shape_of_a_drum

[†] Γ ist die Gammafunktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$, vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion>. Es gilt insbesondere $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

2.5. Parabolisch: die Wärmeleitungsgleichung

Beweis. Die Darstellung von k folgt direkt aus

$$\int_M \sum_j \lambda_j (e_j(x) \otimes e_j(y)^*) e_k(y) dy = \sum_j e_j(x) \int_M \langle e_j(y), e_k(y) \rangle dy = \lambda_k e_k(x)$$

und der Eindeutigkeit des Kerns. Die Spur wird in Übungsaufgabe 18(iii) berechnet. \square

Für $t > 0$ ist e^{-tP} ein Glättungsoperator und passt in das letzte Lemma und wir haben

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta}) = \sum_i e^{-t\lambda_i} \sim (4\pi t)^{-m/2} (a_0 + ta_1 + \dots) \quad (2.10)$$

mit $a_j = \int_M \Theta_j(x, x) dx$. Mit Beispiel 2.5.12 haben wir somit Satz 2.5.13.

Beweis von Satz 2.5.14. Um $N(\lambda) = \sum_{j; \lambda_j \leq \lambda} 1$ abzuschätzen, definieren wir uns eine Hilfsfunktion. Für $r < 1$ sei $f_r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f|_{[0, r/e]} = 0$, $f(x \in [1/e, 1]) = 1/x$ und linear auf $[r/e, 1/e]$. Weiterhin sei $\phi_{j,r}(t) := f_r(e^{-t\lambda_j})e^{-t\lambda_j}$ und $\phi_r(t) := \sum_j \phi_{j,r}(t)$. Dann ist $0 \leq \phi_{j,r} \leq 1$ und

$$\phi_{j,r}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda_j \geq t^{-1}(1 - \ln r) \\ 1 & \text{für } \lambda_j \leq t^{-1}. \end{cases}$$

Somit haben wir

$$\phi_r \left(\frac{1}{r\lambda} \right) \leq \sum_{j; (1-\ln r)r\lambda \geq \lambda_j} 1 = N((1 - \ln r)r\lambda) \text{ und } \phi_r \left(\frac{1}{\lambda} \right) \geq \sum_{j; \lambda_j < \lambda} 1 = N(\lambda).$$

Es bleibt $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{m}{2}} \phi_r(t)$ zu bestimmen. Dazu sei $\phi_f(t) = \sum_j f(e^{-t\lambda_j})e^{-t\lambda_j}$ für eine stetige Funktion f auf $[0, 1]$. Wir zeigen, dass $t^{\frac{m}{2}} \phi_f(t) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f(e^{-r}) r^{\frac{m}{2}-1} e^{-r} dr$ gilt: Wegen der Linearität in f reicht es nach Stone-Weierstrass dies für $f(x) = x^n$ zu überprüfen. Dann ist $t^{\frac{m}{2}} \phi_f(t) = t^{\frac{m}{2}} \sum_j e^{-(n+1)t\lambda_j}$, was nach (2.10) für $t \rightarrow 0$ gegen $A(n+1)^{-\frac{m}{2}}$ mit $A := (4\pi)^{-m/2} \text{vol}(M)$ konvergiert. Das rechnet man auch für die rechte Seite nach: $\frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty r^{\frac{m}{2}-1} e^{-(n+1)r} dr = \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} (n+1)^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt = A(n+1)^{-\frac{m}{2}}$.

Damit haben wir

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N((1 - \ln r)r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{m}{2}}} \geq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt \geq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} dt = \frac{A}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})}$$

und

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{m}{2}}} \leq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt \leq \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{1-\ln r} t^{\frac{m}{2}-1} dt = \frac{A(1 - \ln r)^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

Für $r \rightarrow 1$ erhalten wir somit $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\frac{m}{2}} N(\lambda) = \frac{A}{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{A}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$. \square

3. Hauptfaserbündel

3.1. Vom Tangential- zum Repèrebündel

Sei M^m eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei

$\text{GL}(M, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) \mid \nu_x \text{ ist Basis in } T_x M\}$ und $\text{GL}(M) := \sqcup_{x \in M} \text{GL}(M, x)$.

Wir setzen $\pi: \text{GL}(M) \rightarrow M$, $\nu_x \in \text{GL}(M, x) \mapsto x$, und überlegen uns, dass das ein Faserbündel (Strukturgruppe $\text{GL}_m(\mathbb{R})$) ist – das *Repèrebündel* (*Rahmenbündel*) von M : Seien ϕ_α lokale Trivialisierungen von TM und $\mu_{\alpha\beta}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Da $\phi_\alpha|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$ ein Vektorraumisomorphismus ist, gibt es einen Vektorraumisomorphismus $A_\alpha(x): T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\phi_\alpha(v) = (x, A_\alpha(x)v)$. Dann ist $\mu_{\alpha\beta}(x) = A_\beta(x)A_\alpha(x)^{-1} \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} \text{GL}(M, x) \rightarrow U_\alpha \times \text{GL}_m(\mathbb{R}) \\ \nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) &\mapsto (x, A_\alpha(x)(\nu_1, \dots, \nu_m)). \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1}(x \in U_\alpha \cap U_\beta, B \in \text{GL}_m(\mathbb{R})) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)B)$. Dies bestimmt nach Satz 1.1.15 die Topologie und glatte Struktur von $\text{GL}(M)$ und macht es zu einem Faserbündel. Aber wir haben hier sogar mehr: Da die Übergangsfunktionen die gleichen wie von TM sind, gilt $\mu_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}_m(\mathbb{R}) \subset \text{Diff}(\text{GL}_m(\mathbb{R}))$.

Beachte: $\text{GL}(M)$ ist i.A. kein Vektorbündel, da es i.A. keine globalen Rahmen auf M und damit überhaupt keine globalen Schnitte gibt.

Ganz analog können wir aus einem Vektorbündel E vom Rang r mittels

$$\text{GL}(E, x) := \{\nu_x \mid \nu_x \text{ ist Basis von } E_x\} \text{ und } \text{GL}(E) := \sqcup_{x \in M} \text{GL}(E, x)$$

und die analogen Definitionen für π und ϕ_α das Faserbündel $\text{GL}(E)$ mit Faser und Strukturgruppe $\text{GL}_r(\mathbb{R})$.

Haben wir allerdings eine Bündelmetrik h auf einem reellen/komplexen E (im Falle von TM z.B. eine Riemannsche Metrik) können wir sogar folgendes Faserbündel definieren:

$$\text{O}(E, x) := \{\nu_x \mid \nu_x \text{ ist orthonormale Basis von } E_x\} \text{ und } \text{O}(E) := \sqcup_{x \in M} \text{O}(E, x),$$

da wir aus einer lokalen Trivialisierung ϕ_α von E auch immer eine erhalten, für die eine Orthonormalbasis f_i bzgl. h auf die Standardbasis e_i des \mathbb{R}^r bzw. \mathbb{C}^r abgebildet wird. Für eine solche Trivialisierung haben die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}(x)$ sogar Werte in $O(r)$ (für reelle Vektorbündel) bzw. $U(r)$ (für komplexe Vektorbündel), da Orthonormalbasen wieder auf Orthonormalbasen abgebildet werden müssen. D.h. ganz analog wie oben erhalten wir, dass $\text{O}(E) \rightarrow M$ bzw. $U(E) \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp und Strukturgruppe $O(r)$ bzw. $U(r)$ ist.

3.2. Definition

Definition 3.2.1. Ein $(G-)$ Hauptfaserbündel (G -principal bundle) ist ein Faserbündel $\pi: E \rightarrow M$, dessen Fasertyp eine Liegruppe G ist und für welches es lokale Trivialisierungen gibt, deren Übergangsfunktionen Werte in G annehmen. Dabei wird G mittels $g \mapsto (L_g: h \mapsto g \cdot h)$ als Teilmenge von $\text{Diff}(G)$ verstanden. Solche Übergangsfunktionen nennen wir dann G -Kozykel.

Bemerkung 3.2.2. Achtung: Es wird nicht gefordert, dass für jede Wahl von lokalen Trivialisierungen, die Übergangsfunktionen Werte in G annehmen.

Bemerkung 3.2.3 (G wirkt auf den Fasern). Seien ϕ_α lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels, deren Übergangsfunktionen Werte in G annehmen. Wir definieren $\Psi: G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto \Psi(g, e) =: e \cdot g$ durch

$$(g \in G, e \in \pi^{-1}(\{x\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)) \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_\alpha} (g, (x, h)) \mapsto (x, h \cdot g) \mapsto \phi_\alpha^{-1}(x, hg). \quad (3.1)$$

Wohldefiniertheit folgt, da dies als Rechtswirkung mit der Linkswirkung von $\mu_{\alpha\beta}(x)$ kommutiert.

Mit letzter Bemerkung findet man äquivalente Definitionen eines G -Hauptfaserbündels:

Satz 3.2.4. Sei G eine Liegruppe und $\pi: E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) $\pi: E \rightarrow M$ ist ein G -Hauptfaserbündel.
- (2) Es gibt eine Rechtswirkung $G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto e \cdot g$ und G -äquivalente lokale Trivialisierungen (d.h. es gibt eine offene Überdeckung U_α von M und Diffeomorphismen $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ mit $\text{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ und $\phi_\alpha(e \cdot g) = \phi_\alpha(e) \cdot g$ für alle $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ und $g \in G$, wobei G auf $U_\alpha \times G$ mittels $(x, h) \cdot g = (x, hg)$ wirkt.)
- (3) Es gibt eine Rechtswirkung $G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto e \cdot g$, die fasertreu* und einfach-transitiv auf den Fasern † ist, und eine offene Überdeckung U_α von M , so dass es für alle α einen lokalen Schnitte $U_\alpha \rightarrow E$ gibt.

Beweis. (1) \rightarrow (2) Mit der Rechtswirkung aus (3.1) sind die ϕ_α direkt G -äquivalent.
 (2) \rightarrow (1) Die ϕ_α aus (2) ergeben schon die richtigen Übergangsfunktionen: Es ist $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, h) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(h))$ mit $\mu_{\alpha\beta}(x): G \rightarrow G$. Wegen der G -Äquivarianz folgt $\mu_{\alpha\beta}(x)(hg) = \mu_{\alpha\beta}(x)(h) \cdot g$ und damit $\mu_{\alpha\beta}(x) = L_{\mu_{\alpha\beta}(x)(e)}$.
 (2) \rightarrow (3) Fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt, da diese Eigenschaften für die Wirkung auf $U_\alpha \times G$ gelten, und aus der G -Äquivarianz der lokalen Trivialisierungen. Lokale Schnitte erhält man z.B. durch $x \in U_\alpha \mapsto \phi_\alpha^{-1}(x, 1 \in G)$.
 (3) \rightarrow (2) Aus den lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow E$ wollen wir uns geeignete lokale Trivialisierungen bauen - wir definieren die Inversen $\psi_\alpha: (x, g) \in U_\alpha \times G \mapsto s_\alpha(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Die ψ_α sind glatt. Aus fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt insbesondere, dass $\pi^{-1}(\pi(e)) = \{e \cdot g \mid g \in G\}$ und ψ_α ein G -äquivarianter Diffeomorphismus ist. Damit sind $\phi_\alpha := \psi_\alpha^{-1}$ die gesuchte lokalen Trivialisierungen. \square

* = bildet Fasern auf Fasern ab

† = Für alle $x \in M$ und alle $e, e' \in \pi^{-1}(x)$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $e \cdot g = e'$.

Beispiel 3.2.5. Sei G eine Liegruppe und M eine Mannigfaltigkeit.

- (i) Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $f: M' \rightarrow M$ glatt. Dann ist f^*E ein G -Hauptfaserbündel über M' .
- (ii) Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G , dann ist $\pi: G \rightarrow G/H$ nach Satz A.2.4 und Folgerung A.2.6 ein Faserbündel mit Fasertyp H , lokale Schnitte $s: U_{[g]} \rightarrow G$ und lokalen Trivialisierungen $\phi(g \in U_{[g]}) = (gH, s(gH)^{-1}g) \in U_{[g]} \times H$. Weiterhin wirkt H von rechts auf G , diese Wirkung respektiert die Fasern von $\pi: G \rightarrow G/H$ und auf jeder Faser $\pi^{-1}(gH)$ diese Wirkung ist einfach-transitiv (dafür $h \in H$, $gh_1, gh_2 \in \pi^{-1}(gH)$ ist $gh_1h = gh_2$ genau dann, wenn $h = h_1^{-1}h_2$ ist). Zusammen mit Satz 3.2.4 ist $\pi: G \rightarrow G/H$ damit ein H -Hauptfaserbündel. Alternativ kann man auch direkt überprüfen, dass die Übergangsfunktionen zu obigen Trivialisierungen in H landen.
- (iii) Sei $G \times E \rightarrow E$ eine freie und eigentliche Rechtswirkung. Dann ist $M := E/G$ versehen mit der glatten Struktur aus Satz A.2.8 eine Mannigfaltigkeit, die kanonische Projektion $\pi: E \rightarrow M$ eine Submersion und $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel.

Andererseits sind alle G -Hauptfaserbündel von dieser Form: Freiheit der Wirkung ist klar. Es bleibt also zu zeigen, dass die Wirkung auch eigentlich ist. Betrachten wir dafür die Abbildung $\iota: G \times E \rightarrow E \times E$, $(g, e) \mapsto (e \cdot g, e)$. Sei K ein Kompaktum von $E \times E$. Sei $(g_i, e_i) \in \iota^{-1}(K)$. Dann ist $(e_i \cdot g_i, e_i) \in K$ und es gibt Teilfolgen e_{i_j} bzw. $e_{i_j} \cdot g_{i_j}$, die wegen der Kompaktheit von K in E gegen ein e bzw. f konvergieren. Sei $x = \pi(e)$ und damit $\pi(f) = x$. Sei $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ eine G -äquivalente lokale Trivialisierung von E mit $x \in U$. Dann ist für j groß genug $e_{i_j}, e_{i_j} \cdot g_{i_j} \in \pi^{-1}(U)$, d.h. $e_{i_j} = \phi(x_{i_j}, h_{i_j})$ und $e_{i_j} \cdot g_{i_j} = \phi(x_{i_j}, h'_{i_j})$. Da $e_{i_j} \rightarrow e = \phi(x, h)$, geht $x_{i_j} \rightarrow x$ in M und $h_{i_j} \rightarrow h$ in G . Analog $h'_{i_j} \rightarrow h'$ mit $f = \phi(x, h')$. Wegen der G -Äquivarianz von ϕ ist $h'_{i_j} = h_{i_j} \cdot g_{i_j}$ und damit konvergiert g_{i_j} gegen $h^{-1}h'$ in G und $\iota^{-1}(K)$ ist kompakt.

Definition 3.2.6. Zwei G -Hauptfaserbündel $\pi: E \rightarrow M$ und $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$ heißen *isomorph*, falls es einen G -äquivalenten* Diffeomorphismus $f: E \rightarrow \tilde{E}$ mit $\tilde{\pi} \circ f = \pi$ gibt. Die Menge der Isomorphieklassen von G -Hauptfaserbündel über M bezeichnen wir mit $\text{Prin}_G(M)$.

Sind $E = \tilde{E}$ und $\pi = \tilde{\pi}$ mit zwei verschiedenen G -Wirkungen isomorph, so nennt man den Isomorphismus einen *vertikalen Automorphismus*[†]. Die Menge der vertikalen Automorphismen bezeichnen wir mit $\text{Aut}_M(E)$.

* G -äquivalent bezieht sich auf die Rechtswirkung aus (3.1), also $f(e \cdot g) = f(e) \cdot g$ für alle $g \in G$, $e \in E$.

[†]Das 'vertikal' steht hier nur dabei, da viele Quellen bei Isomorphismen von Bündeln auch Diffeomorphismen auf M zulassen und nicht nur die Identität wie bei uns. Deshalb sind bei uns Automorphismen automatisch vertikal (auf M die Identität), wogegen es sonst extra gefordert werden muss.

3. Hauptfaserbündel

Sind zwei G -Hauptfaserbündel isomorph (als G -Hauptfaserbündel), dann sind sie auch als Faserbündel isomorph. Andererseits können zwei G -Hauptfaserbündel als Faserbündel isomorph sein, aber nicht als G -Hauptfaserbündel.

Satz 3.2.7. *Ein Hauptfaserbündel ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.*

Beweis. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Ist E trivial, dann gibt es einen Hauptfaserbündelisomorphismus $f: G \times M \rightarrow E$ und mit $s(x) = f(1, x)$ einen globalen Schnitt in E . Gibt es umgekehrt einen globalen Schnitt in E . Dann definiert $f: G \times M \rightarrow E, (x, g) \mapsto s(x) \cdot g$ einen Hauptfaserbündelisomorphismus.

Beispiel 3.2.8. (i) Das Hopfbündel ist nicht trivial, da sonst S^3 diffeomorph zu $S^1 \times S^2$ sein müsste.*

(ii) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Dann ist $\pi^*E \rightarrow E$ trivial: Es ist $e \in E \mapsto (e, e) \in \pi^*E = \{(e, e') \in E \times E \mid \pi(e) = \pi(e')\}$ ein globaler Schnitt.

Wir wollen als nächstes vertikale Automorphismen charakterisieren: Wir betrachten dazu G als rechte G -Mannigfaltigkeit mit der Konjugationswirkung: $(g, h) \mapsto h^{-1}gh$. Sei $\text{Hom}^G(E, G)$ die Menge der G -äquivarianten Abbildungen $u: E \rightarrow G$, also alle Abbildungen u mit $u(e \cdot h) = h^{-1}u(e)h$ für $h \in G$ und $e \in E$. Mit der punktweisen Multiplikation ist $\text{Hom}^G(E, G)$ eine Gruppe:

$$\text{abgeschlossen: } (uv)(e \cdot h) = h^{-1}u(e)hh^{-1}v(e)h = h^{-1}(uv)(e)h$$

$$\text{Einselement: } e \in E \mapsto 1 \in G \quad \text{Inverses zu } u: \quad u^{-1}: e \in E \mapsto u(e)^{-1} \in G$$

Lemma 3.2.9.

(i) Für $u \in \text{Hom}^G(E, G)$ definiert $f_u(e) := e \cdot u(e)$ einen vertikalen Automorphismus von E .

(ii) Die Abbildung $u \in \text{Hom}^G(E, G) \mapsto f_u \in \text{Aut}_M(E)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. (i) Das Inverse zu f_u ist $f_{u^{-1}}$. Damit ist f_u ein Diffeomorphismus. Es bleibt die G -Äquivarianz:

$$f_u(e \cdot h) = e \cdot h \cdot u(e \cdot h) = e \cdot u(e) \cdot h \stackrel{\text{Rechtsw.}}{=} f_u(e) \cdot h.$$

(ii) Gruppenmorphismus klar. Injektivität folgt, da die Gruppenwirkung Ψ frei ist. Surjektivität: Sei $f \in \text{Aut}_M(E)$ und $p \in M$. Dann liegen $f(p)$ und p in der gleichen Faser und es gibt ein $u(p) \in G$ mit $f(p) = \Psi(u(p), p)$. Dies definiert eine Abbildung $u: E \rightarrow G$. Es bleibt zu zeigen, dass $u \in \text{Hom}^G(E, G)$ gilt, dann folgt Surjektivität mit $e \cdot u(e) \cdot h = f(e) \cdot h = f(e \cdot h) = e \cdot h \cdot u(e \cdot h)$. Damit ist $u(e)h = hu(e \cdot h)$, da die Wirkung frei ist. \square

Wir erinnern uns, dass sowohl Faserbündel als auch Vektorbündel aus ihren Übergangsfunktionen wieder rekonstruiert werden konnten. Das gleiche gilt für Hauptfaserbündel:

*Das sieht man z.B. daran, dass beide Mannigfaltigkeiten verschiedene Fundamentalgruppen haben.

Satz 3.2.10. (Hauptfaserbündelversion von Satz 1.1.8) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges G -Hauptfaserbündel, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

Satz 3.2.11. (Hauptfaserbündelversion von Folgerung 1.1.13) Seien $E_i \rightarrow M$, $i = 0, 1$, G -Hauptfaserbündel, lokalen Trivialisierungen ϕ_α^i und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$. Für alle α, β seien die $\mu_{\alpha\beta}^0$ und $\mu_{\alpha\beta}^1$ homotope Abbildungen mit Homotopie $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, so dass zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind E_0 und E_1 isomorph.

Folgerung 3.2.12. Sei H eine Lieuntergruppe von G , so dass es eine Homotopieäquivalenz $F: G \times [0, 1] \ni (g, t) \mapsto F_t(g) := F(g, t) \in G$ von H nach G gibt, so dass F_t für alle t ein Gruppenhomomorphismus ist. Dann ist $\text{Prin}_G(M) \cong \text{Prin}_H(M)$.

Beweisskizze. Seien nun $\mu_{\alpha\beta}$ die Übergangsfunktionen eines G -Hauptfaserbündels E über M . Wir setzen $\mu_{\alpha\beta}^t = F_t \circ \mu_{\alpha\beta}$. Dann ist nach letztem Satz E isomorph zum G -Hauptfaserbündel mit Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^1 = F_1 \circ \mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H \subset G$. Zu diesen gehört aber auch ein eindeutig bestimmtes H -Hauptfaserbündel. \square

Beispiel 3.2.13. $H = O(n) \subset G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann impliziert $F_t(g \in O(n)) = (1 - t + t|\det g^{-1}|^{\frac{1}{n}})g \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, dass $\text{Prin}_{\text{GL}_n(\mathbb{R})}(M) \cong \text{Prin}_{O(n)}(M)$ gilt.

3.2.1. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel

In Abschnitt 3.1 haben wir aus dem TM bzw. einem Vektorbündel vom Rang r , die $\text{GL}_m(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel $\text{GL}(M)$ bzw. $\text{GL}(E)$ konstruiert. Nun wollen wir sehen, wie man zurückkommt: Sei $\text{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die definierende Darstellung von $\text{GL}_m(\mathbb{R})$: $\rho = \text{id}: \text{GL}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{R})$. Auf der Menge $\text{GL}(M) \times \mathbb{R}^m$ betrachten wir die $\text{GL}_m(\mathbb{R})$ -Wirkung

$$((s_1, \dots, s_m) \in \text{GL}(M, x), y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m) \cdot g := ((s_1, \dots, s_m) \cdot g, \rho(g^{-1})y)$$

und setzen $E := (\text{GL}(M) \times \mathbb{R}^m) / \text{GL}_m(\mathbb{R})$ mit $\hat{\pi}: E \rightarrow M$, $[(s, y)] \mapsto \pi(s)$. Die Abbildung

$$f: (\text{GL}(M) \times \mathbb{R}^m) / \text{GL}_m(\mathbb{R}) \rightarrow TM, [(s_1, \dots, s_m), y = (y^1, \dots, y^m)] \mapsto y^i s_i$$

erfüllt $\pi \circ f = \hat{\pi}$ und ist bijektiv. Wir werden später noch sehen, dass f sogar ein Vektorbündelisomorphismus ist. Dies ist ein allgemeines Konstruktionsprinzip:

Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und sei $\rho: G \times F \rightarrow F$ eine Linkswirkung auf einer Mannigfaltigkeit F . Auf dem Produkt $P \times F$ haben wir mittels

$$(p, v) \cdot g := (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

eine freie G -Rechtswirkung, da die G -Wirkung auf P schon frei ist. Es bezeichne

$$E := (P \times F) / G =: P \times_\rho F$$

3. Hauptfaserbündel

den zugehörigen Quotientenraum (versehen mit der Quotiententopologie), $[(p, v)]$ die Äquivalenzklasse von (p, v) und $\hat{\pi}: E \rightarrow M$, $[(p, v)] \mapsto \pi(p)$ die zugehörige Projektion.

Satz 3.2.14. $\pi: E \rightarrow M$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp F – das zu P und ρ assoziierte Faserbündel.

Beweisskizze. Da P ein G -Hauptfaserbündel ist, gibt es G -äquivariante lokale Trivialisierungen

$$\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), \psi_\alpha(p)).$$

Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Wir setzen

$$\hat{\phi}_\alpha: \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, \quad [(p, v)] \mapsto (\pi(p), \psi_\alpha(p) \cdot v).$$

Es ist $\hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow F$, $[p, v] \mapsto \psi_\alpha(p) \cdot v$, eine Bijektion und macht damit $\hat{\pi}^{-1}(x)$ zu einer Mannigfaltigkeit (man überprüft, dass die glatte Struktur unabhängig von der Wahl von α ist). Damit ist $\hat{\phi}_\alpha|_{\hat{\pi}^{-1}(x)}: [(p, v)] \in \hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$ glatt. Die Übergangsfunktionen sind $\hat{\mu}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$, $x \mapsto L_{\mu_{\alpha\beta}(x)}$, und erfüllen damit die Kozykelbedingung. Nach dem Bündeltrivialisierungslemma 1.1.15 folgt die Behauptung. \square

Satz 3.2.15. In obiger Situation, sei weiterhin $V := F$ ein Vektorraum ($\dim V = r$) und $\rho: G \times V \rightarrow V$ eine Darstellung. Dann ist das assoziierte Bündel $P \times_\rho V$ ein Vektorbündel vom Rang r .

Beweisskizze. Wir versehen die Fasern von $P \times_\rho V$ mit einer Vektorraumstruktur, indem wir fordern, dass für $p \in P$ die Abbildungen $\iota_p: V \rightarrow P \times_\rho V$, $v \mapsto [(p, v)]$, linear und damit Vektorraumisomorphismen sind. Damit dies wohldefinierte Vektorraumstrukturen auf den Fasern E_p gibt, ist zu zeigen, dass für $E_p = E_{p'}$ die Abbildung ι_p genau dann linear ist, wenn $\iota_{p'}$ linear ist: Wegen $E_p = E_{p'}$ gibt es ein $g \in G$ mit $p \cdot g = p'$. Es gilt

$$\iota_{p'=p \cdot g}(v) = [(p \cdot g, v)] = [(p, \rho(g)v)] = \iota_p \circ \rho(g)v.$$

Da die $\rho(g)$ Vektorraumisomorphismen sind, folgt die obige Behauptung.

Man zeigt dann noch, dass die Abbildungen $\text{pr}_2 \circ \phi_\alpha|_{E_p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow V$ für alle α und $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ linear sind. \square

Folgerung 3.2.16. Die Isomorphieklassen von $GL_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln über einer Mannigfaltigkeit M stehen in 1 : 1 Beziehung zu Isomorphieklassen von zu $GL_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln und $\rho: GL_r(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$ assoziierten Vektorbündeln über M von Rang r (hier isomorph als Vektorbündel) und damit ins 1 : 1 Beziehung zu den Isomorphieklassen von Vektorbündeln über M vom Rang r .

Beweis. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r . Dann haben wir $E \mapsto \text{GL}(E) \mapsto \text{GL}(E) \times_\rho \mathbb{K}^r$. Da E und $\text{GL}(E) \times_\rho \mathbb{K}^r$ die gleichen Übergangsfunktionen haben, sind sie isomorph. \square

3.2.2. Exkurs: Čech-Kohomologie

Wir betrachten die Hauptfaserbündelversion von Satz 1.1.9:

README_10.pdf Woche 10
Čech-Kohom.mp4

Satz 3.2.17. Gegeben zwei G -Hauptfaserbündel E, E' über M . Zu einer gegebenen Überdeckung $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die G -Hauptfaserbündel genau dann isomorph (als G -Hauptfaserbündel), falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, G)$ mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta. \quad (3.2)$$

Insbesondere ist das Hauptfaserbündel E trivial, wenn $\mu_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Wir betrachten eine Familie von $h = \{h_\alpha\}_\alpha$ als 'Čech' 0-Kokette mit Koeffizienten in G und eine Familie $\mu = \{\mu_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha\beta}$ als 'Čech' 1-Kokette mit Koeffizienten in G . Das heißt Übergangsfunktion $\mu_{\alpha\beta}$ bilden eine 1-Kokette, der die Kozykelbedingung erfüllt. Wir sagen zwei 1-Koketten $\mu_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha\beta}$ sind genau dann äquivalent oder kohomolog, wenn es eine 0-Kokette gibt, so dass (3.2) erfüllt ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen von Übergangsfunktionen, also 1-Kozyklen, die die Kokettenbedingung erfüllen, bezeichnen wir mit $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$. Nach Konstruktion repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von Vektorbündeln über M vom Rang r , welche über den offenen Mengen von \mathfrak{U} trivialisiert werden können.

Sei (\mathfrak{V}, ι) eine Verfeinerung von \mathfrak{U} , d.h. \mathfrak{V} ist eine offene Überdeckung von M und $\iota : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ mit $V \subset \iota(V)$ für alle $V \in \mathfrak{V}$. Durch Einschränkung der Kozyklen erhalten wir eine Abbildung $r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} : \check{H}^1(\mathfrak{U}; G) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{V}; G)$. Man kann zeigen, dass diese Abbildung unabhängig von der Wahl von ι ist und dass $r_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} = r_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}} r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$ für eine Folge von Verfeinerungen $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ gilt.

Nun können wir den direkten Limes nehmen

$$\check{H}^1(M; G) := \varinjlim \check{H}^1(\mathfrak{U}; G).$$

Nun repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von G -Hauptfaserbündeln über M . Sind alle $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ zusammenziehbar. Dann ist $\check{H}^1(M; G) = \check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$.

Ganz analog kann man sehen, dass $\check{H}^1(M; \text{Gl}_r(\mathbb{K}))$ bijektiv zur Menge der \mathbb{K} -Vektorbündel über M vom Rang r ist.

Aus einer 0-Kokette h kann man durch $(d_1 h)_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ einen 1-Kokette machen. 1-Kokette μ für die es einen 0-Kokette h mit $\mu = d_1 h$ gibt, nennt man Korand.

Man kann die Definitionen zu 2-Koketten $\xi = (\xi_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow G)_{\alpha\beta\gamma}$ mit $(d_2 \mu)_{\alpha\beta\gamma} := \mu_{\gamma\beta} \mu_{\gamma\alpha}^{-1} \mu_{\beta\alpha}$ erweitern. D.h. $d_2 \mu = 0$ ist äquivalent zu unserer Kozykelbedingung.

Insgesamt erhalten wir so aber keine exakte Sequenz $0 \xrightarrow{d_0=0} \{h\} \xrightarrow{d_1} \{\mu\} \xrightarrow{d_2} \{\xi\} \dots$, denn ist G nicht abelsch, ist der Randoperator d von oben i.A. kein Gruppenhomomorphismus

*Wir nehmen bei Hauptfaserbündel immer implizit an, dass wir die lokalen Trivialisierungen immer schon so gewählt haben, dass die Übergangsfunktionen in G abbilden.

3. Hauptfaserbündel

und damit $\ker d_k$ bzw. im d_k keine Untergruppen. Insbesondere kann $d^2h = d_{k+1}d_k h = 1$ nur für abelsche Gruppen garantiert werden.

Ist G abelsch, gibt die Definition $\check{H}^k(\mathfrak{U}; G) := \ker d_{k+1} / \text{im } d_k$ Gruppen, die k -te Čech-Kohomologiegruppe von M mit Koeffizienten in G .

Im Allgemeinen? Da $d_0 = 0$ ist, spielt das für \check{H}^0 keine Rolle und wir haben $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G) = \ker d_1$ und sehen $h \in \ker d_1$ genau dann, wenn $h_\alpha = h_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt. Damit können wir $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G)$ mit $C^\infty(M, G)$ identifizieren.

Passt auch unser \check{H}^1 von oben in diesen Rahmen? Ist G nicht abelsch, ist weder $\ker d_2$ noch im d_1 eine Gruppe. Aber die 0-Koketten wirken auf den 1-Koketten

$$(h \cdot \mu)_{\alpha\beta} = h_\alpha \mu_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}.$$

Man rechnet nach, dass diese Wirkung die Kozykelbedingung erhält, damit ist $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G) = \ker d_2 / \sim$, wobei \sim obige Wirkung ist. Ist G nicht abelsch, dann ist $\check{H}^1(M; G)$ jedoch keine Gruppe. Es ist nur eine Menge, die aber ein ausgezeichnetes Element besitzt (eine punktierte Menge) – das triviale Vektorbündel vom Rang r .

Zusammenhang zur singulären Kohomologie: Ist G abelsch* und diskret, dann ist $\check{H}^1(M; G)$ einfach die erste Čech-Kohomologie von M mit Koeffizienten in G . Insbesondere ist $\check{H}^1(M; G)$ dann eine Gruppe und stimmt mit der singulären Kohomologiegruppe $H_{\text{sing}}^1(M, G)$ überein. Nur abelsch reicht nicht: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (mit der kontinuierlichen Topologie†) ist $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = 0$ für alle M und $i > 0$ ([4, Thm. 2.11.1 und Thm. 2.11.2] für garbentheoretische Argumente - folgt im Prinzip, da \mathbb{R} und \mathbb{C} eine Zerlegung der Eins erlauben.)

Beispiel 3.2.18.

$$\begin{aligned} \text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(M) &\stackrel{\text{Folg 3.2.16}}{\cong} \text{Prin}_{\text{GL}_1(\mathbb{R})}(M) \stackrel{\text{Bsp 3.2.13}}{\cong} \text{Prin}_{O(1) \cong \mathbb{Z}_2}(M) \\ &\cong \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong H_{\text{sing}}^1(M, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

(Die \mathbb{Z}_2 -Hauptfaserbündel über M entsprechen den zweifachen Überlagerungen von M .) Insbesondere ist $\text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong H_{\text{sing}}^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ – das sind die Isomorphieklassen des trivialen Bündels und des Möbiusbandes. In diesem Falle kann man auch $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ auch direkt ausrechnen, haben wir sogar schon in Beispiel 1.1.14.

Was aber immer noch gilt (mit dem gleichen Beweis wie in der standard Čech-Kohomologietheorie [4, Chapter I.§2]): Ist $1 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G' \rightarrow 1$ eine exakte Folge von topologischen Gruppen, dann gibt es eine exakte Folge von punktierten Mengen

$$\{*\} \rightarrow \check{H}^0(M; K) \xrightarrow{i} \check{H}^0(M; G) \xrightarrow{j} \check{H}^0(M; G') \rightarrow \check{H}^1(M; K) \xrightarrow{i} \check{H}^1(M; G) \xrightarrow{j} \check{H}^1(M; G').$$

*Jede kompakte zusammenhängende abelsche Liegruppe ist ein Torus. Fordert man nur kompakt und abelsch, erhält man auch noch Produkte von Tori mit diskreten abelschen Gruppen. Bei fehlender Kompaktheit kann man noch Produkte mit \mathbb{R}^n bilden.

†Versehen mit der diskreten Topologie erhält man $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = H_{\text{deRham}}^i(M, \mathbb{K})$. Der Unterschied liegt in der Menge der erlaubten Abbildungen $U \subset M \rightarrow \mathbb{K}$. Bei der diskreten Topologie sind stetige Abbildungen automatisch lokal konstant.

Beispiel 3.2.19. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit $\check{H}^i(M, \mathbb{C}) = 0$ folgt, dass $\check{H}^1(M; \mathbb{C}^* = \text{Gl}_1(\mathbb{C})) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist. Damit ist die Menge der Isomorphieklassen von komplexen Geradenbündeln (bzw. der Isomorphieklassen von $\text{Gl}_1(\mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel) über M , zu $H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ isomorph.

Ist $M = S^1$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^1; \mathbb{Z}) = 0$ und alle komplexen Geradenbündel über S^1 sind trivial (Es gibt also insbesondere keine 'komplexe Variante' des Möbiusbandes).

Ist $M = S^2$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Ist $M = S^n$ für $n > 2$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^n; \mathbb{Z}) = 0$. D.h. alle komplexen Geradenbündel über S^n , $n > 2$, sind trivial. Das kann man auch direkt mit dem Kriterium für die Clutchingfunktionen ($\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(S^m) \cong [S^{m-1}, \text{Gl}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*]$) in Übungsaufgabe 8 ablesen.

Beispiel 3.2.20. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit $\check{H}^i(M, \mathbb{R}) = 0$ folgt, dass $c_1: \check{H}^1(M; S^1) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist - die sogenannte *erste Chern Klasse*. Insbesondere sehen wir, dass $\text{Prin}_{S^1}(M) \cong H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ist.

Ist $M = S^2$, dann ist $\text{Prin}_{S^1}(S^2) \cong H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Man kann zeigen, dass der Erzeuger das Hopfbündel ist, [10, Kapitel 3.5].

3.2.3. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln

Definition 3.2.21. Sei $\pi_P: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\lambda: H \rightarrow G$ ein Liegruppenmorphismus. Eine λ -Transformation von P besteht aus einem H -Hauptfaserbündel $\pi_Q: Q \rightarrow M$ und einer glatten Abbildung $f: Q \rightarrow P$ mit $\pi_P \circ f = \pi_Q$ und $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$. Für eine Lieuntergruppe $H \subset G$ und λ die Inklusion, nennt man Q auch H -Reduktion von P . Für λ surjektiv nennt man Q eher einen (H) -Lift von P . Wir nennen zwei λ -Transformationen (Q, f) , bzw. (Q', f') von P äquivalent, wenn es einen H -Hauptfaserbündel-isomorphismus $\phi: Q \rightarrow Q'$ mit $f' \circ \phi = f$.

Beispiel 3.2.22 (Reduktionen des Repèrebündels $\text{GL}(M)$). Für die Wahl einer Riemannschen Metrik auf M^m haben wir in Abschnitt 3.1 das $O(m)$ -Hauptfaserbündel $O(M) := O(TM)$ konstruiert. Für die Inklusionen $O(m) \subset \text{Gl}_m(\mathbb{R})$ und $f: O(M) \rightarrow \text{GL}(M)$ ist $O(M)$ eine $O(m)$ -Reduktion von $\text{GL}(M)$. Die $O(m)$ -Hauptfaserbündel $O(M)_i$ zu zwei verschiedenen Riemannschen Metriken g_i auf M sind äquivalente Reduktionen (Wähle $\phi: O(M)_1 \rightarrow O(M)_2$ faserweise die Gram-Schmidt Orthonormalisierung bzgl. g_2 .)

Ist M orientierbar, dann können wir $\text{GL}_+(M) = \sqcup_{x \in M} \{\text{pos. or. Basen von } T_x M\}$ definieren und analog wie in Abschnitt 3.1 ist das dann ein $\text{GL}_+(\mathbb{R}^m)$ -Hauptfaserbündel.

3. Hauptfaserbündel

Es $GL_+(M)$ eine $GL_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion von $GL(M)$. Weiß man andererseits, dass für eine Mannigfaltigkeit M eine $GL_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion (Q, f) von $GL(M)$ gibt, dann ist M schon orientierbar: Als erstes sehen wir, dass aus $f(q \cdot h) = f(q) \cdot h$ folgt, dass f injektiv ist. D.h. wir nehmen o.B.d.A. an, dass $f: Q \rightarrow GL(M)$ die Inklusion ist. Wir nennen eine Basis ν von $T_x M$ positiv orientiert, falls $\nu \in f(Q)$ gilt. Das definiert eine Orientierung auf M .

Im allgemeinen führt eine Zusatzstruktur auf M oder dem Vektorbündel E , wie Bündelmetrik und Orientierung, zu einer Reduktion von $GL(M)$. Nicht alle Zusatzstrukturen existieren auf allen Mannigfaltigkeiten oder Bündeln (z.B. Orientierung). Dann wird diese Bündelreduktionen nicht immer existieren. Untersuchungen der Existenz der Bündelreduktion führen (falls solche Strukturen nicht immer existieren) dann zu topologischen Obstruktionen für die jeweilige Struktur. Ähnlich ist es bei der Existenz von Liften:

Beispiel 3.2.23. Für $n \geq 3$ hat $SO(n)$ immer Fundamentalgruppe \mathbb{Z}_2 (Beweis siehe [7, Lem. 1.4]). Die universelle Überlagerung* nennen wir $Spin(n)$. Das ist nach Konstruktion erst einmal nur eine Mannigfaltigkeit besitzt aber auch eine Gruppenstruktur, die die Projektion $Spin(n) \rightarrow SO(n)$ zu einem Liegruppenmorphismus macht.†

Am Beispiel $n = 3$: Wir identifizieren die Standardsphäre S^3 mit der Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1, und $SO(3)$ sei die spezielle orthogonale Gruppe, die auf $\text{span}\{i, j, k\} \cong \mathbb{R}^3$ wirkt. Sei $\rho: S^3 \times \text{span}\{i, j, k\} \rightarrow \text{span}\{i, j, k\}$, $\rho(p)q = pqp^{-1}$ (Multiplikation als Quaternionen). Dann kann man nachrechnen, dass $\rho(p)$ ein Element in $SO(3)$ ist. Damit ist $\rho: S^3 \rightarrow SO(3)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus und eine zweifache Überlagerung. Also ist $Spin(3) = SU(2)$.

Hat man eine orientierte Mannigfaltigkeit M^m , dann gibt es dazu ein $SO(m)$ -Hauptfaserbündel $SO(M) := SO(TM) := \{\text{pos. or. ONB von } T_x M\}$. Gibt es einen Lift von $SO(M)$ bzgl. der zweifachen Überlagerung $\lambda: Spin(m) \rightarrow SO(m)$, so nennt man die Mannigfaltigkeit *spin* und die Wahl eines solchen Liftes nennt man *Spinstruktur* von M .

Beispiele: S^n, \mathbb{T}^n sind immer spin, $\mathbb{R}P^n$ ist spin für $n = 4k + 3$ (für n gerade ist es noch nicht mal orientierbar), $\mathbb{C}P^n$ ist spin für ungerade n . Die Spinstruktur muss, selbst wenn sie existiert, nicht eindeutig sein, z.B. besitzt \mathbb{T}^n 2^n -Spinstrukturen, S^n für $n \geq 2$ aber nur eine.

Satz 3.2.25. Sei $\lambda: H \rightarrow G$ ein Liegruppenmorphismus und $\rho: G \times V \rightarrow V$ eine Darstellung. Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und (Q, f) ein λ -Transformation von P . Dann sind die assoziierten Vektorbündel $P \times_{\rho} V$ und $Q \times_{\rho\lambda} V$ isomorph.

*Eine Überlagerung $\pi: X \rightarrow Y$ heißt *universell*, falls X zusammenhängend und einfach-zusammenhängend (d.h. $\pi_1(X) = \{e\}$) ist.

†Das folgt aus:

Satz 3.2.24. Sei G eine Liegruppe und $p: \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung. Wählt man $e \in p^{-1}(1 \in G)$, dann besitzt L eine eindeutige Gruppenstruktur mit e als neutrales Element, die L zu einer Liegruppe macht und p zu einem Liegruppenmorphismus.

Beweisskizze. Sei $m: G \times G \rightarrow G$ die Gruppenmultiplikation in G . Sei $f: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$ definiert durch $f = m \circ (p \times p)$. Da $\tilde{G} \times \tilde{G}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ von f , d.h. $p \circ \tilde{f} = f$ mit $\tilde{f}(e, e) = e$. Dieses \tilde{f} definiert die gesuchte Gruppenstruktur auf \tilde{G} . \square

3.2. Definition

Beweis. Wir setzen $\Psi: Q \times_{\rho\lambda} V \rightarrow P \times_{\rho} V, [(q, v)] \mapsto [(f(q), v)]$. Wohldefiniertheit folgt aus:

$$\begin{aligned} \Psi([(qh, (\rho\lambda)(h^{-1})v)]) &= [(f(qh), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] \\ &= [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q), v)] = \Psi([(q, v)]). \end{aligned}$$

Linear und fasertreu ist klar.

Injektivität: Sei $\Psi([(q, v)]) = \Psi([(q', v')])$ für $q, q' \in Q$ und $v, v' \in V$. Dann ist $\pi_Q(q) = \pi_Q(q')$ und es gibt ein $h \in H$ mit $q' = q \cdot h$. Damit ist $f(q') = f(q) \cdot \lambda(h)$ und

$$[(f(q'), v')] = [(f(q), v)] = [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q'), \rho(\lambda(h)^{-1})v)].$$

Da die G -Wirkung frei auf den Fasern von P ist, muss $v' = \rho(\lambda(h)^{-1})v$ und damit $[(q', v')] = [(q \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(q, v)]$ gelten.

Surjektivität: Sei $[(p, v)] \in P \times_{\rho} V$ mit $p \in P_x$. Wir wählen $q \in Q_x$. Da die G -Wirkung auf P einfach transitiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $f(q) = p \cdot g$. Damit ist

$$\Psi([(q, \rho(g^{-1})v)]) = [(f(q), \rho(g^{-1})v)] = [(p \cdot g, \rho(g^{-1})v)] = [(p, v)].$$

Glattheit von Ψ und Ψ^{-1} sieht man direkt in den Bündelkarten aus Satz 3.2.14. \square

Beispiel 3.2.26. Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r und ρ die definierende Darstellung von $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Sei $\iota: O(r) \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ die Inklusion. Nach Abschnitt 3.1 haben wir das $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel $\mathrm{GL}(E)$ und zu einer Bündelmetrik ein $O(r)$ -Hauptfaserbündel $O(E)$ konstruiert. Nun ist $\mathrm{GL}(E) \times_{\rho} \mathbb{R}^r \cong E \cong O(E) \times_{\rho\iota} \mathbb{R}^r$.

3.2.4. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

3.2.4.1. Motivation

In Abschnitt 3.1 haben wir aus einem reellem Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ vom Rang r das $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel $\mathrm{GL}(E)$ konstruiert. Wir nehmen nun einen affinen Zusammenhang ∇^E auf E . Gibt es einen natürlichen Weg dazu einen 'Zusammenhang' auf $\mathrm{GL}(E)$ zu konstruieren bzw. gibt es eine gute Zusammenhangsdefinition auf $\mathrm{GL}(E)$? Ganz naiv – auf einem formalen Level – könnte man sagen der Zusammenhang auf E ist eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$. Aber $\Gamma(\mathrm{GL}(E))$ ist oft leer, z.B. ist $\Gamma(\mathrm{GL}(M))$ nur dann nicht leer, wenn das Tangentialbündel trivial ist. Aber das bildet nur ein formales Level des Zusammenhangs ab. Andererseits kommt der Zusammenhang auf E immer mit einem Paralleltransport, vgl. Abschnitt 2.2.1.

Da es lokal auch in $\mathrm{GL}(E)$ Schnitte gibt und die einfach aus einer (lokalen) Basis von Schnitten auf E bestehen. Können wir einfach einen (lokalen) Paralleltransport auf $P := \mathrm{GL}(E)$ definieren, in dem wir jedes Basiselement einzeln mittels transportieren:

Sei $p \in P_x$. Dann ist $p = (p_1, \dots, p_m)$ mit $p_i \in E_x$. Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$. Dann haben wir auf E einen Paralleltransport $\parallel_{0,t}^{\gamma}$, womit wir jedes p_i entlang γ transportieren können. Wir definieren

$$p(t) := \parallel_{0,t}^{\gamma} p := (\parallel_{0,t}^{\gamma} p_1, \dots, \parallel_{0,t}^{\gamma} p_m).$$

3. Hauptfaserbündel

Da $\|_{0,t}^\gamma: E_{x=\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(t)}$ ein Vektorraumisomorphismus ist, vgl. Satz 2.2.13 und p eine Basis von E_x ist, ist $\|_{0,t}^\gamma p \in P_{\gamma(t)}$ und damit $\|_{0,t}^\gamma p$ ein Paralleltransport auf P .

Nach Folgerung 2.2.16 und darüber ist $\frac{d}{dt}|_{t=0}(p_i(t)) := \|_{0,t}^\gamma p_i \in T_{p_i}E$ nur von $\dot{\gamma}(0) \in T_xM$ aber nicht der konkreten Wahl von γ abhängig. Damit gilt das auch für $\frac{d}{dt}|_{t=0}p(t)$ und wie in Übungsaufgabe 25 erhalten wir den entsprechenden *horizontalen Lift* $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$ für unser Hauptfaserbündel. Die Linearität des horizontalen Lifts und $d_p\pi(X^*(p)) = X(\pi(p))$ erhält man wie in Übungsaufgabe 25. Das reicht aber noch nicht, um damit einen Zusammenhang auf $GL(M)$ zu definieren: (Zur Unterscheidung bezeichnen wir den horizontalen Lift auf E mit \hat{X} und den auf P noch immer mit X^*)

$$X^*(p \cdot g) = X^*((p_1 \cdot g, \dots, p_r \cdot g)) = (\hat{X}(p_1 \cdot g), \dots, \hat{X}(p_r \cdot g))$$

$$\stackrel{\text{Lin. von } \nabla^E}{=} (\hat{X}(p_1) \cdot g, \dots, \hat{X}(p_r) \cdot g) = X^*(p) \cdot g \stackrel{\text{Bsp. A.1.9.i}}{=} d_p R_g(X^*(p))$$

Hierbei wird die Linearität des Zusammenhangs ∇^E genutzt um die Kompatibilität des Liftes mit der Rechtswirkung der $GL_r(\mathbb{K})$ zu folgern.

Analog erhält man auch die horizontalen Tangentialräume $Q_p P := \{X^*(p) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\} \subset T_p P$ mit der vertikalen und horizontalen Projektionsabbildung und aus die Kompatibilität mit der Rechtswirkung kann man $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$ folgern.

Da $\nabla_X(s = (s_1, \dots, s_m)) := (\nabla_X s_1, \dots, \nabla_X s_m)$ zumindest lokal noch sinnvoll ist, haben wir die gleichen lokalen Zusammenhangseinsformen $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ mit den gleichen Transformationsformeln wie in (2.4) (da die Übergangsfunktionen von E und $P = GL(E)$ übereinstimmen).

Wir werden noch sehen, dass man auf dem Hauptfaserbündel aus den lokalen Zusammenhangseinsform immer eine globale *Zusammenhangsform* $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ definieren kann.

zshg.mp4

3.2.4.2. (Äquivalente) Definitionen für Zusammenhänge

Definition 3.2.27. Ein *Zusammenhang* auf dem G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M^m$ ist ein glatter Schnitt Q in $\text{Gr}_m(TP)$ (dem Grassmannbündel zu $TP \rightarrow P$, vgl. 1.2.2.7) $Q: p \in P \mapsto Q_p P \in \text{Gr}_m(T_p P)$, so dass $T_p P = Q_p P \oplus T_p(P_{\pi(p)})$ gilt und so dass Q rechtsinvariant ist, d.h., für alle $g \in G$ und $p \in P$ gilt $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$. Wir nennen $Q_p P$ einen *horizontalen Tangentialraum an P in $p \in P$* und $T_p(P_{\pi(p)}) \subset T_p P$ den *vertikalen Tangentialraum an P in $u \in P$* . Die Projektionen auf die einzelnen Komponenten von $T_p P$ bezeichnen wir mit $\text{ver}: T_p P \rightarrow T_p(P_{\pi(p)})$ und $\text{hor}: T_p P \rightarrow Q_p P$

Lemma 3.2.28. (i) $T_p(P_{\pi(p)}) = \ker d_p \pi$

(ii) Für $X \in \mathfrak{g}$ sei $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ definiert durch $\tilde{X}(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \exp(tX)) \in T_p(P_{\pi(p)})$ (\tilde{X} heißt von X erzeugtes fundamentales Vektorfeld.) Es gilt

$$d_g \Psi_p(X(g)) = \tilde{X}(\Psi_p(g)),$$

wobei $\Psi: G \times P \rightarrow P$ die Rechtswirkung auf P und $\Psi_p(\cdot) = \Psi(\cdot, p) = p \cdot \cdot$ ist.

3.2. Definition

(iii) $\mathfrak{g} \rightarrow \{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\}$, $X \mapsto \tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$, ist ein linearer Isomorphismus* (insbesondere ist $\{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\} \subset \mathfrak{X}(P)$ ein Untervektorraum).

(iv) $T_p(P_{\pi(p)}) = \{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\}$

Beweis. (i) Es ist $\pi^{-1}(x) = P_x$, und die Behauptung folgt aus dem Satz vom regulären Wert, vgl. auch [2, I.1].

(ii)

$$\begin{aligned} d_g \Psi_p(X(g)) &\stackrel{\text{linsinv}}{=} d_g \Psi_p d_1 L_g(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi_p \circ L_g(\exp tX) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p \cdot g) \cdot \exp tX = \tilde{X}(p \cdot g) \end{aligned}$$

(iii) Linearität folgt aus(ii) und der Linearität von $d_g \Psi_p$. Surjektivität ist klar nach Konstruktion. Es ist noch die Injektivität zu zeigen: Sei $\tilde{X} = 0$. Nach Definition ist $\gamma(t) = p \cdot \exp(tX)$ Lösung von $\dot{\gamma}(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$ mit Anfangswert $\gamma(0) = p$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung dieses Anfangswertproblems ist $\gamma(t)$ wegen $\tilde{X} = 0$ konstant gleich p und damit ist $p \cdot \exp(tX)$ konstant in t . Da die Wirkung von G frei ist und \exp in einer Umgebung der Null ein Diffeomorphismus aufs Bild ist, folgt $X = 0$.

(iv) Mit (i) und

$$d_p \pi(\tilde{X}(p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi(p \cdot \exp tX) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi(p) = 0$$

folgt $\{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\} \subset T_p(P_{\pi(p)})$. Da beides Vektorräume von gleicher Dimension sind, folgt die Gleichheit. \square

Haben wir einen Zusammenhang Q auf P gegeben, definieren wir $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_p P$. Das definiert ein $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und man rechnet nach, dass

- (i) $R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ für alle $g \in G$, d.h. $\omega_{p \cdot g}(d_p R_g(Z)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$ für alle $p \in P$ und $Z \in T_p P$.
- (ii) $\omega(\tilde{X}) = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ (Erst einmal ist $\omega(\tilde{X}) \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$, d.h. die rechte Seite der Gleichung ist als konstante Funktion mit Wert X aufzufassen.)

gilt, vgl. Übungsaufgabe 29.

Wie muss man die Wirkung von $\text{Ad}(g^{-1})$ hier verstehen? Nach Definition A.1.17 ist $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto (R_{g^{-1}} \circ L_g)_*$. Haben wir eine Basis a_i von \mathfrak{g} , dann ist $\omega = \omega^i \otimes a_i$ für $\omega^i \in \Omega^1(P)$. D.h. wir verstehen die Wirkung von $\text{Ad}(g^{-1})$ auf $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ (und analog für alle anderen Operationen auf \mathfrak{g}) hier immer so, dass er nur auf den Liealgebraanteil wirkt – also $\text{Ad}(g^{-1})\omega(X) = \omega^i(X)\text{Ad}(g^{-1})(a_i)$. Analog wirken Operationen, die standardmäßig auf Differentialformen definiert sind, auf liealgebrawertigen Differentialformen, in dem Sie nur auf die ω^i wirken.

*sogar ein Liealgebrenisomorphismus, dazu muss man nur $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ nachrechnen (dabei benutzt man wieder (ii))

3. Hauptfaserbündel

Definition 3.2.29. Ein Element $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, für welches die beiden obigen Bedingungen gelten, nennt man *Zusammenhangsform* dem G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M$. Die Menge der Zusammenhangsformen auf P bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(P)$.

Die Bedingungen (i) und (ii) bleiben unter Addition und skalarer Multiplikation erhalten, damit ist $\mathcal{A}(P)$ ein affiner Raum (aber kein Vektorraum, da $\omega = 0$ keine Zusammenhangsform ist). Andersherum gehört zu einer Zusammenhangsform auch wieder ein Zusammenhang – in Übungsaufgabe 29 zeigen wir:

Satz 3.2.30. Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Sei $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf P . Dann definiert

$$u \in P \mapsto Q_u P := \ker \omega_u$$

einen Zusammenhang auf P . Insbesondere ist die Abbildung invers zur obigen Zuordnung $Q \mapsto \omega$.

Beispiel 3.2.31. Wir betrachten das Hopfbündel $S^3 \rightarrow S^2$. Das ist ein $S^1 = U(1)$ -Hauptfaserbündel und damit $\mathfrak{g} \cong i\mathbb{R}$. Sei $p \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das reelle Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Dann ist $\omega_p(Y \in T_p S^3 \subset \mathbb{R}^4) := i\langle Y, ip \rangle$ ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel, vgl. Übungsaufgabe 28.

Die Zusammenhangsform ω steht in engem Zusammenhang zu den Zusammenhangsformen von Vektorbündeln, die wir schon kennen.

Satz 3.2.32. Seien $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$ lokale Schnitte von P zu einer offenen Überdeckung U_α . Das definiert mit $\phi_\alpha^{-1}(x, g) := s_\alpha(x) \cdot g$ lokale Trivialisierungen. Wir setzen $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$. Dann ist

$$\omega_\alpha = Ad(\mu_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\beta + dL_{\mu_{\alpha\beta}^{-1}} d\mu_{\alpha\beta}^*$$

Sind umgekehrt zu einer offenen Überdeckung U_α und lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$ Einsformen $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$, die obige Transformationsformel erfüllen, gegeben. Dann gibt es eine Zusammenhangsform $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$.

Beweisskizze. Für die Berechnung der Transformation von ω_α , benutzen wir

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t) \cdot g(t)) = d_x R_g(\dot{p}(0)) + d_g \widetilde{L_{g^{-1}}(\dot{g}(0))}(x \cdot g) \quad (3.3)$$

für Kurven $x(t)$ in P mit $x(0) = x$ und $g(t)$ in G mit $g(0) = g$, vgl. Übungsaufgabe 29.ii. Sei $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, $X \in T_u M$ und γ eine Kurve durch $\gamma(0) = u$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann gilt (mit $s_\alpha(u) = \phi_\alpha^{-1}(u, 1) = \phi_\beta^{-1} \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(u, 1) = \phi_\beta^{-1}(u, \mu_{\alpha\beta}(u)) = \phi_\beta^{-1}(u, 1)\mu_{\alpha\beta}(u) = s_\beta(u)\mu_{\alpha\beta}(u)$)

$$\begin{aligned} d_u s_\alpha(X) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} s_\alpha(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (s_\beta(\gamma(t)) \cdot \mu_{\alpha\beta}(\gamma(t))) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} d_{s_\beta(u)} R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(X)) + \widetilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)) \end{aligned}$$

*Im Fall von Matrixgruppen, also $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ ist das genau die Formel (2.4), die wir für die lokalen Zusammenhangsformen von Vektorbündeln gesehen haben.

mit $Y = d_{\mu_{\alpha\beta}(u)}L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u\mu_{\alpha\beta}(X))$ und damit

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(X) &= (s_\alpha^*\omega)(X) = \omega_{s_\alpha(u)}(d_u s_\alpha(X)) \\ &= \omega_{s_\alpha(u)}\left(d_{s_\beta(u)}R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(X)) + \underbrace{\tilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u))}_{=s_\alpha(u)}\right) \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1})\omega_{s_\alpha(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}=s_\beta(u)}(d_u s_\beta(X)) + Y \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1})\omega_\beta(X) + d_{\mu_{\alpha\beta}(u)}L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u\mu_{\alpha\beta}(X)).\end{aligned}$$

Seien nun andersherum die ω_α gegeben und erfüllen die Transformationsformel. Für $u \in U_\alpha$ haben wir $T_p P = T_p(P_u) \oplus ds_\alpha(T_u M)$ für $p = s_\alpha(u)$, d.h. ein Vektor in $T_p P$ setzt sich zusammen als $\tilde{Y}(p) + ds_\alpha(X)$ für ein $Y \in \mathfrak{g}$ und $X \in T_u M$. Wir definieren $\omega_p: T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ durch $\omega_p(\tilde{Y}(p) + ds_\alpha(X)) = \omega_\alpha(X) + Y$ und $\omega_{p \cdot g} := \text{Ad}(g^{-1})\omega_p$. Damit ist ω für alle $\pi^{-1}(U_\alpha)$ definiert. Man rechnet nach, dass ω eine Zusammenhangseinsform auf $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ definiert und diese unabhängig von α ist. \square

Ganz analog erhält man:

Satz 3.2.33. *Sei $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$. Dann gibt es nach Lemma 3.2.9.ii gibt es ein $g \in \text{Hom}^G(P; G)$ mit $\vartheta(u) = u \cdot g(u)$ für alle $u \in P$. Dann ist*

$$(\vartheta^*\omega)_u = \text{Ad}(g(u)^{-1})\omega_u + d_{g(u)}L_{g(u)^{-1}}d_u g.$$

Bemerkung 3.2.34. Insbesondere zeigen die letzten beiden Sätze, dass die Rückrichtung $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ mit den Transformationsformeln wird wieder zu ω zusammengesetzt, ist nur eindeutig, wenn die lokalen Schnitte s_α vorgegeben sind und dann ist $s_\alpha^*\omega = \omega_\alpha$. Hat man $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$, so sind auch $\vartheta \circ s_\alpha$ lokale Schnitte und obige Konstruktion würde die ω_α zu $\vartheta^*\omega$ zusammenbauen. Das ist nicht verwunderlich, da die $\mu_{\alpha\beta}$ das Hauptfaserbündel und damit auch die Zusammenhangseinsform nur bis auf vertikale Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Seien nun $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ zwei Zusammenhangseinsformen und $\omega_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha$ die zugehörigen lokalen Zusammenhangseinsformen zu lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$. Dann gilt

$$\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} \circ (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha).$$

Wir betrachten das assoziierte Bündel $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ (das sogenannte *adjungierte Bündel*). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ ein lokaler Schnitt in $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt nun

$$[(s_\beta, (\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta)(X))] = [(s_\alpha \mu_{\beta\alpha}, \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}}(\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] = [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))].$$

Also definieren die $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ einen wohldefinierten globalen Schnitt von $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$. Setzen wir $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] := [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ haben wir eine wohldefinierte Einsform mit Werten in $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$, also ein Element in $\Gamma(T^*M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$. Wir

3. Hauptfaserbündel

haben also gesehen, dass $\omega - \tilde{\omega}$ als Element in $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}) = \Gamma(T^*M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$ aufgefasst werden kann. Andersherum liefert diese Konstruktion zu jedem Element $\eta \in \Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ aus einer Zusammenhangseinsform ω ein neue Zusammenhangseinsform $\tilde{\omega}$: Lokal haben wir $\eta_\alpha(X) = [(s_\alpha, z_\alpha^X)]$ für $z_\alpha^X: U_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$. Definieren wir $z_\alpha(X) := z_\alpha^X$ haben wir $z_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$. Wir setzen $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + z_\alpha$. Die analogen Transformationsformeln wie oben (insbesondere ist $z_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} z_\alpha$) zeigen, dass die $\tilde{\omega}_\alpha$ einen wohldefinierten Zusammenhang $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ definieren.

Wir haben also gesehen:

Lemma 3.2.35. *Die Menge $\mathcal{A}(P)$ der Zusammenhangseinsformen auf $P \rightarrow M$ steht in 1:1 Beziehung mit $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$. Insbesondere erhält diese Abbildung die affine Struktur auf $\mathcal{A}(P)$ und $\mathcal{A}(P)$ ist damit ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ (und damit insbesondere unendlich-dimensional).*

Bemerkung 3.2.36. (Induzierter Zusammenhang auf dem assoziierten Vektorbündel) Sei $E := P \times_\rho V$ ein zu G -Hauptfaserbündel P und zu $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ assoziiertes Vektorbündel. Sei ω eine Zusammenhangseinsform auf P . Dann definiert

$$\nabla_X[(s(u), v(u))] := [s(u), X(v)(u) + \rho_*(s^*\omega(X))v(u)]$$

einen Zusammenhang auf E , vgl. Übungsaufgabe 30.

3.2.5. Krümmung

Woche 11 Da die lokalen Zusammenhangsformen eines Hauptfaserbündels sich wie die eines Vektorbündels, vgl. (2.4), verhalten, können wir die lokalen Krümmungsformen Ω_α mittels der Strukturgleichung aus Satz 2.2.22 definieren:

$$\Omega_\alpha := d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha,$$

wobei wir für $\eta = \eta^i \otimes a_i \in \Omega^k(U; \mathfrak{g})$, $\kappa = \kappa^i \otimes a_i \in \Omega^\ell(U; \mathfrak{g})$ mit a_i Basis von \mathfrak{g} , $\eta^i \in \Omega^k(U)$, $\kappa^j \in \Omega^\ell(U)$

$$\eta \wedge \kappa := \frac{1}{2} \eta^i \wedge \kappa^j [a_i, a_j] \quad (3.4)$$

und $d\eta := d\eta^i \otimes a_i$ setzen.*

Dann ist insbesondere für $\eta \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$

$$d\eta(X, Y) := X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \quad (3.5)$$

*Für $\omega_\alpha \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ haben wir der Strukturgleichung erst mal Sinn gegeben, in dem wir es erst einmal nur als Kurzschreibweise für die jeweilige Gleichung in den einzelnen Einträgen von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ gegeben haben, vgl. Satz 2.2.22. Für $\eta, \kappa \in \Omega^1(U)$ und damit jedem Eintrag von $\Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ ist (3.4) richtig. Deshalb nehmen wir (3.4) hier als Definition und man muss noch zusätzlich nachrechnen, dass es unabhängig der Basiswahl von \mathfrak{g} ist.

3.2. Definition

(dabei ist $\eta(Y) \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ und $X(\eta(Y)) = X(\eta^i(Y) \otimes a_i) = X(\eta^i(Y)) \otimes a_i$), weil diese Formel schon auf dem Level der Differentialformen richtig ist, vgl. Tabelle B.2, und

$$\begin{aligned} 2\eta \wedge \eta(X, Y) &= (\eta^i(X)\eta^j(Y) - \eta^j(X)\eta^i(Y))[a_i, a_j] \\ &\stackrel{2.\text{Summe: } i \leftrightarrow j}{=} 2\eta^i(X)\eta^j(Y)[a_i, a_j] \\ &= 2[\eta^i(X)a_i, \eta^j(Y)a_j] = 2[\eta(X), \eta(Y)]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit analogem Beweis wie für (2.5) die Transformationsformel

$$\Omega_\beta = \text{Ad}(\mu_{\beta\alpha}^{-1})\Omega_\alpha.$$

Für Hauptfaserbündel kommen die ω_α aber sogar von einer globalen Zusammenhangsform $\omega_\alpha = s_\alpha^*\omega$. Damit ist

$$\Omega_\alpha = d(s_\alpha^*\omega) + (s_\alpha^*\omega) \wedge (s_\alpha^*\omega) = s_\alpha^*(d\omega + \omega \wedge \omega)$$

(vgl. Tabelle B.2 für die Eigenschaften des Pullbacks) und wir können auch eine globale Krümmungsform $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ definieren. Dann erhält man ganz analog zur Transformationsformel der lokalen Krümmungsformen, dass für ein $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$ und eine Zusammenhangsform $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ die Krümmungsform $\Omega^{\vartheta^*\omega}$ zu $\vartheta^*\omega$ gleich $\text{Ad}(g^{-1})\Omega^\omega$ ist, wobei $g \in \text{Hom}^G(P; G)$ mit $\vartheta(p) = p \cdot g(p)$ ist.

Satz 3.2.37. *Es ist $\Omega(X, Y) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y))$. **

Beweis. Es ist $X = \text{ver}(X) + \text{hor}(X)$ und nach Satz 3.2.30 $\omega(\text{hor}(X)) = 0$. Für $\text{ver}(X)(p)$ gibt es für ein $Z \in \mathfrak{g}$ ein fundamentales Vektorfeld \tilde{Z} mit $\text{ver}(X)(p) = \tilde{Z}(p)$. Wir zeigen, dass $\Omega(\tilde{Z}, *) = 0$ ist:

Wir haben

$$\omega \wedge \omega(X, \text{hor}(Y)) = 0 \rightsquigarrow \Omega(X, \text{hor}(Y)) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y))$$

$$\begin{aligned} d\omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) &\stackrel{(3.5)}{=} \tilde{Z}(\omega(\tilde{U})) - \tilde{U}(\omega(\tilde{Z})) - \omega([\tilde{Z}, \tilde{U}]) \\ &= \tilde{Z}(U) - \tilde{U}(Z) - [Z, U] = -[Z, U] \\ &= -\omega \wedge \omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{Z}, \tilde{U}) = 0 = \Omega(\tilde{Z}, \tilde{U}). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass $U \in \mathfrak{g}$ als Funktion $M \rightarrow \mathfrak{g}$ konstant und deshalb $\tilde{Z}(U) = 0$ gilt. Außerdem haben wir für die vorletzte Zeile verwendet, dass $[\tilde{Z}, \tilde{U}] = [Z, U]$ gilt – das folgt aus $\tilde{Z} = (\Psi_p)_*(Z)$, vgl. Lemma 3.2.28.ii, und das $(\Psi_p)_*$ mit der Lieklammer kommutiert.

$$\begin{aligned} d\omega(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) &= -\text{hor}(Y)\omega(\tilde{Z}) - \omega([\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &= -\text{hor}(Y)(Z) - \omega([\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) = 0 = \Omega(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) \end{aligned}$$

*Oft wird so die Krümmung auf Hauptfaserbündel ad-hoc definiert und daraus die Strukturgleichung abgeleitet.

3. Hauptfaserbündel

Für die Gleichheit (*) haben wir benutzt, dass $[\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]$ wieder ein horizontales Vektorfeld ist, vgl. Übungsaufgabe 31.ii. \square

Definition 3.2.38. Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit gegebenem Zusammenhang. Wir definieren $D: \Omega^k(P; \mathfrak{g}) \mapsto \Omega^{k+1}(P; \mathfrak{g})$ durch $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\eta(\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{k+1}))$, wobei $d\eta$ wie in (3.5) auch mittels der Formel für reellwertige Differentialformen aus Tabelle B.2 definiert ist.

In dieser Notation ist z.B. $\Omega = D\omega$.

Lemma 3.2.39. (Bianchi-Identität) $D\Omega = 0$

Beweis. Folgt aus der Definition von D , der Ableitung der Strukturgleichung und $\omega(\text{hor}(X)) = 0$. \square

Auch für die Krümmung für Vektorbündel und dem D aus Definition 2.2.20 gilt $DF = 0$.

Definition 3.2.40. Sei ein Zusammenhang ω auf dem G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ gegeben. Wir bezeichnen mit $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ die Menge der *horizontalen k -Formen auf P mit Werten in \mathfrak{g}* . Dies sei die Menge aller $\eta \in \Omega^k(P; \mathfrak{g})$ für die gilt:

- (i) Für $p \in P$, $X_i \in T_p P$ und mindestens ein $X_i \in T_p P_{\pi(p)}$ gilt $\eta_p(X_1, \dots, X_k) = 0$.
- (ii) $R_g^* \eta = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta$.

Beispiel 3.2.41. $\omega \notin \Omega_{\text{hor}}^1(P; \mathfrak{g})$, da zwar (ii) aber nicht (i) erfüllt ist. Aber es ist $\Omega \in \Omega_{\text{hor}}^2(P; \mathfrak{g})$: (i) ist erfüllt nach Satz 3.2.37. (ii) folgt mit den Rechnungen aus folgendem Satz.

Satz 3.2.42. Die Einschränkung des Differentials D aus Definition 3.2.38 ergibt die Abbildung

$$D: \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$$

und für $\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ gilt

$$D\eta = d\eta + \text{ad}(\omega) \wedge \eta, \tag{3.6}$$

wobei $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i+1} \text{ad}(\omega(X_i)) \eta(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1})$ ist.

Hier ist ad die adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} , siehe Lemma A.1.19. Insbesondere liefert (3.6) eine explizitere Formel für $D\Omega$ auf horizontalen Formen.

Beweis. Als erstes wollen wir nachrechnen, dass $D(\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})) \in \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$ gilt. Die Bedingung (i) aus der Definition von $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ ist direkt nach Konstruktion erfüllt. Es bleibt (ii) zu zeigen: Es gilt $d_p R_g(\tilde{X}(p)) = \text{Ad}(g^{-1})X(p \cdot g)$, vgl. Übungsaufgabe 29.i.

3.2. Definition

D.h. insbesondere, dass dR_g eines vertikalen Vektors wieder ein vertikaler Vektor ist. Zusammen mit $d_p R_g(Q_p P) = Q_{p \cdot g} P$ ergibt sich $\text{hor } dR_g(X) = dR_g(\text{hor } X)$ und damit

$$\begin{aligned}
(R_g^* D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= D\eta(dR_g(X_1), \dots, dR_g(X_{k+1})) \\
&= d\eta(\text{hor } dR_g(X_1), \dots, \text{hor } dR_g(X_{k+1})) \\
&= d\eta(dR_g(\text{hor } X_1), \dots, dR_g(\text{hor } X_{k+1})) \\
&= (R_g^* d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
&= d(R_g^* \eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
&= (d(\text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta))(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\
&= ((\text{Ad}(g^{-1}) \circ d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1})) \\
&= (\text{Ad}(g^{-1}) \circ D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch (3.6) nachzurechnen: Sind alle X_i horizontal, dann ist $D\eta = d\eta$ nach Definition 3.2.38 und $\omega(X_i) = 0$. Also gilt in diesem Fall (3.6).

Sind mindestens zwei der X_i vertikal, dann ist $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ und $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ nach Definition. In diesem Fall müssen wir also noch nachrechnen, dass auch $d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ ist: Nach Tabelle B.1 gilt:

$$\begin{aligned}
d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) &= (-1)^i X_i \underbrace{(\eta(\cdot, \check{X}_i, \cdot))}_{=0 \text{ da min ein Vektor vertikal}} + \sum_{i < \ell} (-1)^{i+\ell} \eta([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Auch in der zweiten Summe ist immer mindestens ein Vektor vertikal, da die Lieklammer zweier vertikaler Vektoren wieder einen vertikalen Vektor liefert, und damit ist in diesem Falle $d\eta = 0$.

Der verbleibende Fall ist nun, dass genau eines der X_i vertikal ist. O.B.d.A. sei $X_1 = \tilde{Y}$ vertikal. Dann sind $X_i = Z_i^*$ horizontale Lifte von $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ für $i > 1$. Dann ist wieder $D\eta = 0$ und wir haben

$$\text{ad}(\omega) \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+1}) := \text{ad}(\omega(X_1))\eta(X_2, \dots, X_{k+1})$$

3. Hauptfaserbündel

sowie

$$\begin{aligned}
(d_p \eta)(X_1(p), \dots, X_{k+1}(p)) &= \tilde{Y}(\eta(Z_2^*, \dots, Z_{k+1}^*))(p) \\
&\quad + (-1)^{\ell+1} \eta(\underbrace{[\tilde{Y}, Z_\ell^*]}_{=0 \text{ vgl. ÜA 31.ii}}, Z_2^*, \dots, Z_\ell^*, \dots, Z_{k+1}^*)(p) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(Z_2^*(p \cdot \exp(tY)), \dots, Z_{k+1}^*(p \cdot \exp(tY))) \\
\text{rechtsinv. der horiz. Vek.} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(d_p R_{\exp(tY)}(Z_2^*(p)), \dots, d_p R_{\exp(tY)}(Z_{k+1}^*(p))) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (R_{\exp(tY)}^* \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Ad}(\exp(-tY)) \circ \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\
&= \underbrace{\text{Ad}_*(-Y)}_{=-\text{ad}(Y)} \eta_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)). \quad \square
\end{aligned}$$

3.3. Klassische Yang-Mills-Theorie

3.3.1. Klassische Elektrodynamik

Wir fangen bei der klassischen Elektrodynamik an. Die Maxwell-Gleichungen sind die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik. Sie beschreiben die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf elektrische Ladungen und die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld E und dem Magnetfeld B . Das elektrische Feld E , das Magnetfeld B ist definiert auf einem (nicht notwendigerweise beschränktem) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Beide Größen sind zeitabhängig, d.h. $E: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Weiterhin wird die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige Dichtefunktion $\rho: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Stromverteilung durch den zeitabhängigen Stromdichtevektor $j: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben. c ist die Lichtgeschwindigkeit. Es gelten die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}
\text{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \text{div} B &= 0 \\
\text{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j & \text{div} E &= 4\pi \rho.
\end{aligned}$$

Wir fassen nun die B - und E -Felder in der Matrix

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ 0 & 0 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zusammen und setzen $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. Dann lassen sich die Maxwellglei-

3.3. Klassische Yang-Mills-Theorie

chungen umschreiben zu (wir haben einfach $4\pi = c = 1$ gesetzt).

$$\begin{aligned} dF &= 0 \quad (\text{das sind die beiden oberen Maxwellgleichungen}) \\ *d * F &= \tilde{j} \end{aligned}$$

mit $\tilde{j} = \rho dt + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$ (Der Hodge-Stern ist hier bzgl. der Minkowskimetrik auf \mathbb{R}^4). Schränken wir uns auf den Vakuumfall ein, bleibt noch

$$dF = 0 \quad \delta F := - *d * F = 0.$$

Wir sehen, dass aus der ersten Gleichung lokal (und auf \mathbb{R}^4) immer die Existenz eines $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = dA$ folgt. Ein solches A nennt man (*Vektor-)*Potential. Schreibt man auch die zweite Gleichung mit Hilfe des Potentials muss man statt der obigen Maxwellgleichungen nur noch eine Gleichung

$$\delta dA = 0$$

lösen. Diese ist hochgradig unterbestimmt – löst A die Gleichung, dann auch $A + d\phi$, für ein $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Das nennt man *Eichfreiheit*. Will man diese Gleichung lösen, führt man zumeist eine zweite Gleichung ein, die diese Unterbestimmtheit aufhebt. Das nennt man *Eichfixierung*. Sehr beliebt im Kontext der Elektrodynamik ist die *Lorenz-Eichung* $\delta A = 0$, dann ist $\delta dA = \underbrace{(\delta d + d\delta)}_{=:\square} A = 0^*$ und man hat eine 'schöne' hyperbolische

Gleichung (Wellengleichung). Man muss sich bei einer Eichfixierung immer überlegen, dass man dadurch keine Lösung verliert. Normalerweise überlegt man sich das, in dem man zeigt, dass man aus einer beliebigen Lösung so umeichen kann (hier addieren eines $d\phi$), dass die resultierende Lösung die Eichfixierung erfüllt. †

Wir möchte eine Lösung der Maxwellgleichungen also $F \in \Omega^2(U, \mathbb{R})$ bzw. $A \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ als Krümmung bzw. Zusammenhang eines geeigneten G -Hauptfaserbündels $P \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$ interpretieren. Lokale Zusammenhangsformen sind Elemente aus $\Omega^1(U, \mathfrak{g})$. Wir wollen $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ (das i ist nicht so wichtig), also $\omega_\alpha = iA$ als Lösung. Dann ist da $i\mathbb{R}$ abelsch ist, $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = 0$ und damit die lokale Krümmungsform gegeben durch $\Omega_\alpha = idA \in \Omega^2(U, i\mathbb{R})$. Bzgl. eines anderen lokalen Schnittes $\phi_\beta: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ führt, da $i\mathbb{R}$ abelsch ist, zur gleichen lokalen Krümmungsform $\Omega_\beta = \Omega_\alpha$ und zur lokalen Zusammenhangsform $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = iA + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}$. D.h. die Eichfreiheit von oben entspricht hier der unterschiedlichen Wahl lokaler Trivialisierung des Bündels. Die Maxwellgleichungen sind nun geschrieben für die Krümmung des Hauptfaserbündels nun

$$d\Omega = 0 \quad \text{und} \quad *d * \Omega = 0.$$

Die erste Gleichung ist wegen der Bianchi-Identität automatisch erfüllt. Die zweite Gleichung kann auch als Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) der folgenden

*Der d'Alembert \square ist einfach die Notation für den Laplaceoperator auf dem Minkowskiraum (oder allgemeiner auf Lorentzmannigfaltigkeiten).

†Es gibt auch andere Eichungen (=Eichfixierung), z.B. *Coloumb-Eichung* $\text{div} \vec{A} = 0$, wenn man A als Vektorfeld (A_0, \vec{A}) auffasst, *axiale Eichung* $g(X, A) = 0$ für einen fixierten Vektor $X \in \mathbb{R}^4, \dots$

3. Hauptfaserbündel

Wirkung gesehen werden:

$$S(F) := \int_U F \wedge *F,$$

wobei $F \wedge *F \in \Omega^4(U, \mathbb{R})$ wie in (3.4) verstanden wird.

Wir haben jetzt klassische Elektrodynamik als Gleichung an die Krümmung eines G -Hauptfaserbündels über $U \subset \mathbb{R}^4$ mit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ interpretiert. Was genau G am besten sollte, sieht man an der klassischen Theorie nicht. $G = \mathbb{R}$ oder $G = S^1$ sind beides auf dem klassischen Niveau ununterscheidbar. Erst auf dem Niveau der Quantentheorie (die Theorie hier ist ein klassischer Limes der Quantenelektrodynamik) sieht man, dass $G = S^1$ die gute Wahl ist, da die Quantentheorie eine $U(1)$ -Symmetrie hat*.

Über zusammenziehbare Gebiete $U \subset \mathbb{R}^4$ sind die Hauptfaserbündel sowieso immer trivial. Aber man kann die obigen Gleichungen z.B. auf für Bündel über $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ betrachten und erhält als Lösung Dirac-Monopole, vgl. Übungsaufgabe 32.

Wo war hier die Eichfixierung? Die kam noch nicht vor. Die Gleichung $*d*d\Omega = 0$ ist genauso unterbestimmt wie ohne Bündelinterpretation. Eine Eichfixierung wäre auch hier eine zusätzliche Gleichung an Ω , entsprechen Änderung des Schnittes und damit auch einer Umeichung - deshalb werden auf der Ebene des Hauptfaserbündels vertikale Automorphismen Eichtransformationen genannt. Mit der obigen Transformationsformel haben wir lokal $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = i(A + d\phi)$ mit $\mu_{\beta\alpha} = e^{i\phi}$.

3.3.2. Klassische Yang-Mills Theorie

Wir betrachten im Folgenden klassische Yang-Mills Theorie nur als ad-hoc Verallgemeinerung der klassischen Elektrodynamik. Das ist dahingehend unvollständig, dass die zugehörige Quantentheorie (= Standardmodell (Elektrodynamik $G = U(1)$ und schwache $G = SU(2)$ sowie starke Wechselwirkung $G = SU(3)$ und ihr Zusammenwirken) eine sehr erfolgreiche (und interessante) physikalische Theorie ist.† Allerdings ist völlig unklar, wie oder ob überhaupt diese Theorie einen klassischen Limes besitzt und selbst wenn, ob dieser die klassische Yang-Mills Theorie ist. Das blenden wir hier aber mal leider aus.

Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Wir betrachten nur einfache kompakte Matrixgruppen $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{K})$ – die wichtigsten Fälle sind $SU(2)$ und $SU(3)$.

Wir betrachten die folgende Wirkung auf dem Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ auf P (Ω die zugehörige Krümmungsform)

$$S(\Omega) := \int_M \text{Tr}(\Omega \wedge * \Omega)$$

Hier ist $\Omega \wedge * \Omega \in \Omega^m(U, \mathfrak{g})$ und $\text{Tr}: \Omega^m(U, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^m(U)$ ist die Spur auf dem Liealgebrenteil $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Da G kompakt und einfach ist, entspricht das der Killingform, vgl. Abschnitt A.1.4. Insbesondere muss man sich überlegen, dass $\text{Tr}(\Omega \wedge * \Omega)$ unabhängig der gewählten lokalen Trivialisierung ist.

*Damit das im klassischen Limes erhalten bleibt, geht noch die (experimentell bestätigte) Annahme ein, dass die Quantentheorie geeignet ans elektromagnetische Feld koppelt.

†... wenn auch mathematisch noch nicht wirklich vollständig verstanden, vgl. auch https://en.wikipedia.org/wiki/Yang-Mills_existence_and_mass_gap

Berechnet man hier die Bewegungsgleichung erhält man

$$D * \Omega = 0$$

(Da die Elektrodynamik abelsch ist, ist dort $D * \Omega = d * \Omega$.)

Existenz von Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen ist ein schweres analytisches Problem. Wir werden aber sehen, dass es in algebraischen Spezialfällen einfacher ist eine Lösung zu finden:

3.3.2.1. (Anti-)Selbstduale Lösungen

Sei (M, g) eine orientierte 4-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit Zusammenhang ω und Krümmung $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$.

Falls $*\Omega = \pm\Omega$ gilt, dann ist wegen der Bianchi-Identität $D\Omega = 0$ die Yang-Mills-Gleichung $D * \Omega = 0$ automatisch erfüllt. Das wäre eine einfache Möglichkeit an Lösungen zu kommen. Gilt $*\alpha = \pm\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega^2(M)$, nennt man α *selbstdual* (für +) und *antiselbstdual* (für -). Die Menge aller (anti-)selbstdualen 2-Formen bezeichnen wir mit $\Omega_{\pm}^2(M)$.

Lemma 3.3.1. $\Omega_{\pm}^2(M)$ sind jeweils der Raum der Schnitte eines Untervektorbündel $\Lambda_{\pm}^2(M)$ von $\Lambda^2(M)$ und es gilt $\Lambda^2(M) = \Lambda_{+}^2(M) \oplus \Lambda_{-}^2(M)$.

Beweisskizze. Da $*$ ein punktweiser Operator, ist $\Lambda_{\pm}^2(M)|_{x \in M} = \{\beta \in \Lambda^2(M)|_{x \in M} \mid *\beta = \pm\beta\}$. Damit sind $\Lambda_{\pm}^2(M)$ Untervektorbündel von $\Lambda^2(M)$ vom Rang 3: Ist (s_1, \dots, s_4) ein positiv orientierte Orthonormalbasis von $(T_x M, g_x)$ und σ^i die zugehörige duale Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} e_{\pm}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \pm \sigma^3 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^3 \mp \sigma^2 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^4 \pm \sigma^2 \wedge \sigma^3) \end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis von $\Lambda_{\pm}^2(M)|_x$. □

Beispiel 3.3.2 (BPST*-Instantonen = Selbstduale $SU(2)$ -Zusammenhänge auf \mathbb{R}^4). Da \mathbb{R}^4 zusammenziehbar ist, ist jedes $SU(2)$ -Hauptfaserbündel P über \mathbb{R}^4 trivial. Wir identifizieren \mathbb{R}^4 mit \mathbb{H} , den Quaternionen, und $SU(2)$ mit der symplektischen Gruppe $Sp(1) := \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ durch

$$\iota: x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in Sp(1) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \\ x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

Die Liealgebra von $Sp(1)$ ist $\mathfrak{sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = 0\}$ mit $[q_1, q_2] = q_1 q_2 - q_2 q_1 = 2\operatorname{Im}(q_1 q_2)$. Wir kürzen ab: $dx := dx^1 + idx^2 + jdx^3 + kdx^4$ und $d\bar{x} := dx^1 - idx^2 - jdx^3 - kdx^4$.

*benannt nach A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwarz und Y. Tyupkin

3. Hauptfaserbündel

Sei $P = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$ das triviale $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Wir betrachten lokale Zusammenhangsformen A (und lokale Krümmungsformen F) im folgenden immer bzgl. der kanonischen Trivialisierung von P – also ist $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2))$. Man kann nachrechnen, dass

$$A_{x \in \mathbb{H}} := \text{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right)$$

ein selbstdualer Zusammenhang (d.h. $*F = F$ für die zugehörige Krümmungsform), vgl. Übungsaufgabe 33.

Für $\mu \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{H}$, kann man weitere selbstduale Zusammenhänge

$$(A_{\mu,b})_x := \text{Im} \left(\frac{\mu^2(x-b) \cdot d\bar{x}}{1 + \mu^2|x-b|^2} \right)$$

finden. Das diese wirklich selbstduale Zusammenhänge, rechnet man am leichtesten nach, in dem man $A_{\mu,b} = \Phi_{\mu,b}^* A$ mit dem Diffeomorphismus $\Phi_{\mu,b}(y) = \mu(y-b)$ betrachtet. Man kann sich nun fragen, ob für verschiedene (μ, b) die lokalen Zusammenhangsformen $A_{\mu,b}$ nicht in Wirklichkeit zum gleichen Zusammenhang auf P gehören. Das ist nicht so, vgl. Übungsaufgabe 33.

Beispiel 3.3.3 (Das quaternionische Hopfbündel). (Das ist in Wirklichkeit nur die konforme Kompaktifizierung des letzten Beispiels) Wir betrachten $S^7 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ und

$$\pi: S^7 \rightarrow S^4, \quad (z_1, z_2) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1} z_2 & \text{falls } z_1 \neq 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man kann zeigen, dass $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ mit der $SU(2) \cong Sp(1)$ -Wirkung $(z_1, z_2) \cdot q := (\bar{q}z_1, \bar{q}z_2)$ ein $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über S^4 ist und $A_{(z_1, z_2)} := \text{Im}(z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2)$ einen selbst-dualen Zusammenhang auf diesem Bündel definiert.

3.4. Dirac-Operatoren

Woche 12 In Beispiel 2.1.1 haben wir den Diracoperator auf dem Minkowskiraum, wie er von Dirac in 1928* zur Beschreibung von Elektronen gefunden wurde, kennengelernt. Nun wollen wir die Verallgemeinerung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten kennenlernen.

Dazu sei (M^m, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $SO(M)$ das zugehörige $SO(m)$ -Hauptfaserbündel der orientierten Orthonormalbasen. Nehmen wir an M sei spin, d.h. es gibt einen Lift $\Phi: \text{Spin}(M) \rightarrow SO(M)$ von $SO(M)$ bzgl. der zweifachen Überlagerung, vgl. Abschnitt 3.2.3. Nun bilden wir aus dem $\text{Spin}(m)$ -Hauptfaserbündel $\text{Spin}(M) \rightarrow M$ und einer Darstellung $\rho: \text{Spin}(m) \rightarrow \text{End}(\Sigma_m)$, die

*Dirac, P. A. M. (1928). "The Quantum Theory of the Electron". Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 117 (778): 610–624, <http://www.math.ucsd.edu/~nwallach/Dirac1928.pdf>

im Prinzip die Cliffordmultiplikation auf einem komplexen Vektorraum Σ_m ist, aber die wir noch genauer definieren werden, das assoziierte Vektorbündel $S := \text{Spin}(M) \times_\rho \Sigma_m$. Dieses wird *Spinorbündel* genannt. Der Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induziert einen Zusammenhang $T_p \text{SO}(M) = Q_p \text{SO}(M) \oplus T_p(\text{SO}(M))_{\pi(p)}$ auf $\text{SO}(M)$ wie in Abschnitt 3.2.4.1. Mittels $Q_r \text{Spin}(M) = (d_r \Phi)^{-1} Q_{\Phi(r)} \text{SO}(M)$ erhalten wir so einen Zusammenhang auf $\text{Spin}(M)$ – das ist eine allgemeine Konstruktion mit der man aus jeder λ -Transformation (\tilde{P}, f) eines G -Hauptfaserbündels P , wie in Definition 3.2.21, einen Zusammenhang auf \tilde{P} erhält:

Lemma 3.4.1. *Sei $Q \in \text{Gr}_m(TP)$ ein Zusammenhang auf P und (Q, f) eine λ -Transformation von P . Dann ist $Q_r \tilde{P} := (d_r f)^{-1} Q_{f(r)} P$ ein Zusammenhang auf \tilde{P} .*

Beweis. Wegen $\pi_P \circ f = \pi_{\tilde{P}}$ gilt $T_r(\tilde{P}_{\pi_{\tilde{P}}(r)}) = (d_r f)^{-1} T_{f(r)}(P_{\pi_P(f(r))})$ und damit $T_r \tilde{P} = Q_r \tilde{P} \oplus T_r(\tilde{P}_{\pi_{\tilde{P}}(r)})$. Es bleibt noch die Kompatibilität mit der Rechtswirkung zu überprüfen:

$$\begin{aligned} d_r R_h(Q_r \tilde{P}) &= d_r R_h((d_r f)^{-1} Q_{f(r)} P)^{f \circ R_h = R_{\lambda(h)} \circ f} (d_{r \cdot h} f)^{-1} d_{f(r)} R_{\lambda(h)} Q_{f(r)} P \\ &= (d_{r \cdot h} f)^{-1} Q_{f(r) \cdot \lambda(h)} P = Q_{r \cdot h} \tilde{P} \quad \square \end{aligned}$$

Wir haben also nun einen Zusammenhang auf $\text{Spin}(M)$. Wie in Übungsaufgabe 30/Bemerkung 3.2.36 erhält man dann einen induzierten Zusammenhang auf dem assoziierten Bündel – dem Spinorbündel.

Man kann nachrechnen, dass S mit diesem Zusammenhang der Cliffordmultiplikation und der induzierten Bündelmetrik ein Diracbündel wie in Definition 2.4.27 und damit ist $D = \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i}^S$ ein Dirac-artiger Operator – der *klassische Diracoperator einer Riemannschen spin Mannigfaltigkeit*.

Es fehlt noch die Darstellung $\rho: \text{Spin}(m) \rightarrow \text{End}(\Sigma_m)$:

Bemerkung 3.4.2. Sei V ein Vektorraum mit einer nicht-entarteten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Cliffordmultiplikation $\text{cl}: V \rightarrow \text{End}(W)$ (also $\text{cl}(v)\text{cl}(v) = -\langle v, v \rangle \text{Id}$) kann auch hintereinander ausgeführt werden, d.h. Sie erweitert sich auf

$$\text{cl}: \bigotimes V = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots \rightarrow \text{End}(W)$$

und es gilt $\text{cl}(v \otimes w + w \otimes v + 2\langle v, w \rangle \text{Id}) = 0$. Damit verschwindet cl auch auf dem Ideal \mathcal{I} , welches von dieser Relation erzeugt wird. Den Quotienten

$$C(V) := \text{Cl}(V, q) := \bigoplus_k V^{\otimes k} / \mathcal{I}$$

nennt man Cliffordalgebra von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (Die Algebrastruktur wird von der Tensoralgebra $\bigotimes V$ geerbt). Also kann die Cliffordmultiplikation auch als Abbildung $\text{cl}: C(V) \rightarrow \text{End}(W)$ betrachtet werden. Des Weiteren ist $[[a], [b]] := [a \otimes b - b \otimes a]$ für $a, b \in \bigoplus_k V^{\otimes k}$ (also $[a], [b] \in C(V)$) in $C(V)$ abgeschlossen und man kann nachrechnen, dass die Jacobiidentität gilt – wir haben also eine Lieklammer auf $C(V)$. Wir

3. Hauptfaserbündel

schreiben für Elemente in $C(V)$ in Zukunft '⊗' nicht mehr mit. $C(V)$ besitzt einen anti-Automorphismus $a = e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto a^t = e_{i_k} \dots e_{i_1}$ für eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $(ab)^t = b^t a^t$.

Beispiel 3.4.3. [$\text{Cl}(n) := \text{Cl}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$] Man kann nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \text{Cl}(2k) &= \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) =: \Sigma_{2k} \\ \text{Cl}(2k+1) &= \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) =: \Sigma_{2k+1} \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) =: \hat{\Sigma}_{2k+1} \end{aligned}$$

mit folgender Cliffordmultiplikation: Auf $\Sigma_1 = \mathbb{C}$ sei $\text{cl}(e_1)\phi := -i\phi$ und auf $\hat{\Sigma}_1 = \mathbb{C}$ sei $\hat{\text{cl}}(e_1)\phi := i\phi$. Der Rest wird induktiv definiert:

- (i) Sei n gerade: Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \hat{\Sigma}_{n+1} := \Sigma_n$. Für $k = 1, \dots, n$ definieren wir $\text{cl}(e_k)|_{\Sigma_{n+1}} := \text{cl}(e_k)|_{\Sigma_n}$ und $\text{cl}(e_k)|_{\hat{\Sigma}_{n+1}} = -\text{cl}(e_k)|_{\Sigma_n}$. Weiterhin sei $\text{cl}(e_{n+1})|_{\Sigma_{n+1}}\sigma := i\sigma$ und $\text{cl}(e_{n+1})|_{\hat{\Sigma}_{n+1}}\sigma := -i\sigma$.
- (ii) Sei n ungerade: Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \Sigma_n \oplus \hat{\Sigma}_n$ mit der Cliffordmultiplikation

$$\begin{aligned} \text{cl}(e_k)(\sigma_1, \sigma_2) &:= (\text{cl}(e_k)\sigma_1, \hat{\text{cl}}(e_k)\sigma_2) \quad k = 1, \dots, n \\ \text{cl}(e_{n+1})(\sigma_1, \sigma_2) &:= (-\sigma_2, \sigma_1) \end{aligned}$$

Mit diesen Cliffordmultiplikationen sind die Gleichheiten am Anfang Algebrenisomorphismen.

Bemerkung 3.4.4 (Konstruktion der Spin-Gruppe). *

- (i) Ist e_i eine Orthonormalbasis von $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$, d.h. $q(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij}$ (q muss also nicht entartet sein, aber nicht unbedingt positiv definit). Dann ist die durch

$$\mathfrak{c}: e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^k V := \bigoplus_{\ell \geq 0} \Lambda^\ell V \mapsto \text{cl}(e_{i_1}) \dots \text{cl}(e_{i_k}) \in C(V)$$

erzeugte lineare Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Man beachte, dass \mathfrak{c} kein Algebrenisomorphismus ist, da $0 = \mathfrak{c}(0 = e_1 \wedge e_1) \neq \mathfrak{c}(e_1)\mathfrak{c}(e_1) = -1$ ist.

$\mathfrak{spin}(V) := \mathfrak{c}(\Lambda^2 V) \subset C(V)$ ist unter der Lieklammer von $C(V)$ ebenfalls abgeschlossen und damit eine Lieunteralgebra von $C(V)$.

- (ii) Die Abbildung $\tau: a \in \Lambda^2(V) \mapsto (v \mapsto [a, v] := \mathfrak{c}(a)\text{cl}(v) - \text{cl}(v)\mathfrak{c}(a)) \in \text{Hom}(V, C(V))$ ist ein Isomorphismus aufs Bild $\mathfrak{o}(V) \subset \text{Hom}(V, V) \subset \text{Hom}(V, C(V))$.
- (iii) Definition der Spingruppe zu $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: $\text{Spin}(V) := \exp \mathfrak{spin}(V)$.
- (iv) Mit $\tau(a)v = [a, v]$ kann man nachrechnen, dass

$$\underbrace{(\exp \tau(\mathfrak{c}(b)))}_{\in SO(V)} v = (\exp b)v(\exp_C b)^{-1}$$

für $b \in \Lambda^2 V$ gilt. Damit wird

*Wir verzichten hier auf die Beweise, insbesondere (i)-(iv) kann man direkt elementar nachrechnen.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{spin}(V) & \xrightarrow{\tau \circ \mathfrak{c}} & \mathfrak{o}(V) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \text{Spin}(V) & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \text{SO}(V) \end{array}$$

mit $\hat{\tau}: \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$, $\hat{\tau}(a)(v) = av a^t$, kommutativ.

- (v) Für $\dim V > 1$ ist $\hat{\tau}$ eine zweifache nichttriviale Überlagerung. Damit ist $\text{Spin}(V)$ für positiv definite $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kompakt und zusammenhängend (da dann $\text{SO}(V)$ kompakt und zusammenhängend ist). Für $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 3$ ist $\text{Spin}(V)$ einfach zusammenhängend und damit die universelle Überlagerung von $\text{SO}(V)$.
- (vi) Ist v_i eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gilt $\text{Spin}(V) = \text{span}\{v_{i_1} \dots v_{i_{2k}} \mid k \in \mathbb{N}\}$.
- (vii) Die Einschränkung der Cliffordmultiplikation auf $\text{Spin}(V)$ ist eine Darstellung von $\text{Spin}(V)$. Wir brauchen im Folgenden nur noch $\rho := \text{cl}: \text{Spin}(k) := \text{Spin}(\mathbb{R}^k, g_{\text{eucl}}) \rightarrow \text{Cl}(k)$ mit der Darstellung von $\text{Cl}(k)$ wie in Beispiel 3.4.3.

Beispiel 3.4.5. (i) $\text{Spin}(2) \cong S^1 \cong U(1)$ mit $\hat{\tau}: S^1 \cong \text{Spin}(2) \rightarrow S^1 \cong \text{SO}(2)$, $z \mapsto z^2$

(ii) $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2)$, vgl. Beispiel 3.2.23.

(iii) $\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$

Lemma 3.4.6. Für das Spinorbündel von oben gilt

$$R^S(X, Y)s = -\frac{1}{4} \sum_k \text{cl}(R(X, Y)e_k) \text{cl}(e_k)s$$

für einen lokalen Orthonormalrahmen e_i und R der Krümmungstensor von (M, g) . Insbesondere ist $R^S s = \frac{1}{4} \text{scal}_g s$. Die Weitzenböckformel für den klassischen Diracoperator ist also

$$D^2 = \Delta^S + \frac{1}{4} \text{scal}_g$$

und wird Schrödinger-Lichnerowicz-Formel genannt.

Folgerung 3.4.7. Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche spin Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung. Dann hat der klassische Diracoperator keinen Kern.

Beweis. Sei $s \in \ker D$. Dann ist $0 = D^2 s = \Delta s + \frac{1}{4} \text{scal}_g s$, also

$$0 = \int_M |\nabla s|^2 \text{dvol}_g + \int_M \frac{1}{4} \text{scal}_g |s|^2 \text{dvol}_g \geq 0$$

und es folgt $s = 0$. □

3. Hauptfaserbündel

Beispiel 3.4.8 (Spinorbündel und Diracoperator auf S^2). * Wir betrachten die Sphäre S^2 mit der Standardmetrik und sphärischen Koordinaten, also $g = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$.

(i) S^2 hat eine eindeutige Spinstruktur - das $Spin(2)$ -Hauptfaserbündel über S^2 ist das Hopfbündel.

(ii) Spinorbündel: $S := Spin(S^2) \times_{\rho} \Sigma_2$

Es rechnet nach, dass $\Sigma_2 = \mathbb{C}^2$ mit $\rho(z) = \text{diag}(\bar{z}, z)$ ist. Um S zu bestimmen, rechnet man die Übergangsfunktionen nach (Clutchingfunktionen wie in Übungsaufgabe 8) und erhält dann, dass S ein triviales Bündel ist. Deshalb kann man einen Spinor auf S^2 einfach als Funktion $\phi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ verstehen.

(iii) Man kann direkt nachrechnen, dass

$$D = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\cot \theta}{r} \right) - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} \right)$$

ist.

Man sieht, dass im Gegensatz zum Laplace auf Funktionen, ein konstanter Spinor auf S^2 nicht im Kern des Diracoperators der Sphäre ist, was konsistent mit der letzten Folgerung ist.

*Details in <https://juanitorduz.github.io/the-dirac-operator-on-the-2-sphere/>

A. Liegruppen und Wirkungen

A.1. Liegruppen

Definition A.1.1. Eine Gruppe G heißt *Liegruppe*, falls G eine glatte Mannigfaltigkeit ist, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatt sind.

Beispiel A.1.2. Beispiele für Liegruppen.

- (i) $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\} \subset M_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$
- (ii) \mathbb{R}^n mit der Addition als Gruppenoperation
- (iii) $O(n)$ [2, Beispiel I.1.6.v], $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$.
- (iv) Sind G und H Liegruppen, dann auch $G \times H$, wobei die Gruppenstruktur durch $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2)$ gegeben ist.
- (v) Es gibt auch Liegruppen die keine Matrixgruppen sind, z.B. die metaplektische Gruppe*. Da konkret bei uns nur Matrixgruppen auftreten werden, reicht es bei einer Liegruppe immer an eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ zu denken.

Lemma A.1.3. Sei G eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, so dass $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ glatt ist. Dann ist G eine Liegruppe.

Definition A.1.4. Ein glatte Abbildung zwischen Liegruppen, die gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist, nennen wir einen *Liegruppenhomomorphismus*. Ist ein bijektive Abbildung und sein Inverses jeweils ein Liegruppenhomomorphismus, dann nennen wir diesen *Liegruppenisomorphismus*.

A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren

Sei G eine Liegruppe. Für $h \in G$ sei $R_h: G \rightarrow G, g \mapsto gh$ bzw. $L_h: G \rightarrow G, g \mapsto hg$. Dann ist $d_g R_h: T_g G \rightarrow T_{gh} G$ bzw. $d_g L_h: T_g G \rightarrow T_{hg} G$ ein Vektorraumisomorphismus. Wir beschränken uns im Folgenden zumeist auf die Linkswirkungen L_h .

*https://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic_group

A. Liegruppen und Wirkungen

Lemma A.1.5. Sei $v \in T_1G$. Dann definiert $X_v(h) = d_1L_h(v)$ ein glattes Vektorfeld auf G .

Beweis. Um zu zeigen, dass X_v glatt ist, reicht es zu zeigen, dass $X_v(f) \in C^\infty(G)$ für alle $f \in C^\infty(G)$ ist. Es gilt $X_v(f)(g) = d_gfX_v(g) = d_gfd_1L_g(v) = d_1(f \circ L_g)(v) = \tilde{V}(f \circ L_g)$, wobei \tilde{V} ein glattes Vektorfeld auf G mit $\tilde{V}(1) = v$ ist. \square

Definition A.1.6. Ein glattes Vektorfeld X auf G heißt *linksinvariant* falls $(L_h)_*X = X$, also $((L_h)_*X)(g) := (d_gL_h)(X(g)) = X(hg)$ für alle $g \in G$. Die Menge \mathfrak{g} aller linksinvarianten Vektorfelder auf G nennen wir *Lie-Algebra der Liegruppe G* .

Bemerkung A.1.7. Die linksinvarianten Vektorfelder auf G sind genau die Vektorfelder, die wie in Lemma A.1.5 entstehen. \mathfrak{g} ist ein Vektorraum und wegen Tabelle B.1 ist \mathfrak{g} unter der Lieklammer abgeschlossen.

Folgerung A.1.8. Die Liealgebra \mathfrak{g} einer Liegruppe G ist als Vektorraum isomorph zum Tangentialraum T_1G ans Einselement. Insbesondere gilt $\dim \mathfrak{g} = \dim T_1G = \dim G$.

Wir werden oft diesen Isomorphismus $T_1G \cong \mathfrak{g}$ implizit nutzen ohne es dazu zuschreiben. Da $(L_h)_*[X, Y] = [(L_h)_*X, (L_h)_*Y]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, vgl. Pushforward in Tabelle B.1, gilt, ist die Liealgebra unter der Lieklammer abgeschlossen.

Beispiel A.1.9. (i) Ist $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, dann ist $T_{\text{Id}_n}G = \text{Matr}(n, \mathbb{R}) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Für $A \in \text{Matr}(n, \mathbb{R})$ ist $X_A(h \in G) = d_{\text{Id}_n}L_h(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_h(\text{Id}_n + tA) - L_h(\text{Id}_n)}{t} = hA$ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld. Auch für alle Matrixgruppen $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ist somit das linksinvariante Vektorfeld zu $A \in T_{\text{Id}_n}G \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gleich X_A . Damit ist auch insbesondere $[X, Y] = XY - YX$ (als Matrixmultiplikation) für $X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ – Wir rechnen das in lokalen Koordinaten nach: Es ist $[X_A, X_B] = (X_A^i \frac{\partial X_B^j}{\partial x^i} - X_B^j \frac{\partial X_A^i}{\partial x^j}) \partial_{x^j}$. Wir wählen als Koordinaten die einzelnen Einträge h_i^j der Matrix und haben damit $X_A = h_i^k A_k^j \partial_{h_i^j}$ sowie

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= (h_i^k A_k^j \frac{\partial (h_r^s B_s^u)}{\partial h_i^j} - h_i^k B_k^j \frac{\partial (h_r^s A_s^u)}{\partial h_i^j}) \partial_{h_r^u} \\ &= (h_i^k A_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} B_s^u - h_i^k B_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} A_s^u) \partial_{h_r^u} \\ &= h_r^k (A_k^s B_s^u - B_k^s A_s^u) \partial_{h_r^u} = h(AB - BA) = X_{AB-BA} \end{aligned}$$

Ist \mathfrak{g} abelsch, ist damit insbesondere die Lieklammer die Nullabbildung.

(ii) Man kann weiterhin nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{Sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0\} \\ \mathfrak{o}(n) &:= T_{\text{Id}_n} O(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\} \\ \mathfrak{so}(n) &:= T_{\text{Id}_n} SO(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T, \text{Tr} A = 0\} = T_{\text{Id}_n} O(n) = \mathfrak{o}(n) \\ \mathfrak{u}(n) &:= T_{\text{Id}_n} U(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -\bar{A}^T\} \\ \mathfrak{su}(n) &:= T_{\text{Id}_n} SU(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -\bar{A}^T, \text{Tr} A = 0\} \end{aligned}$$

Definition A.1.10. Sei $X \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$

$$\dot{\gamma}_X(t) = X(\gamma_X(t)), \quad \gamma_X(0) = 1. \tag{A.1}$$

Da X einem beschränkten Vektorfeld auf G entspricht, hat diese eine eindeutige Lösung γ_X mit Definitionsbereich \mathbb{R} . Wir definieren die *Exponentialabbildung* von G als

$$\exp: \mathfrak{g} \mapsto G, \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

Bemerkung A.1.11. (i) Es gilt $\frac{d}{dt}\gamma_X(st) = s\dot{\gamma}_X(st) = sX(\gamma_X(st))$ und wegen Eindeutigkeit der Lösung damit $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$.

(ii) Ist $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ eine Untergruppe für ein n groß genug, dann ist $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Dann liest sich (A.1) für $A \in \mathfrak{g}$: $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$ und damit ist $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Lemma A.1.12. *Es gibt eine offene Umgebung U von $0 \in \mathfrak{g}$, so dass $\exp|_U$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.*

A.1.2. Lie-Untergruppen

Definition A.1.13. Seien G und H Liegruppen und $\phi: H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und eine Einbettung. Dann nennen wir H eine *Lie-Untergruppe* von G .

Satz A.1.14. *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G . Dann ist H eine Lie-Untergruppe von G . mit Liealgebra $\mathfrak{h} := \{X \mid \exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$, wobei \exp die Exponentialabbildung von G ist. Insbesondere ist die Exponentialabbildung von H die Einschränkung von \exp auf \mathfrak{h} .*

Folgerung A.1.15. *Für eine Matrixuntergruppe ist die Exponentialabbildung \exp damit genau die von $GL(n, \mathbb{R})$ eingeschränkt auf die Liealgebra der Untergruppe.*

A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen

Lemma A.1.16. *Sei $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ ein Liegruppenhomomorphismus. Sei $\psi_*: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, $X \mapsto \psi_*X$, wobei ψ_*X das linksinvariante Vektorfeld mit $\psi_*X(1 \in G_2) = d_1\psi(X(1))$ ist – also $(\psi_*X)(g) = d_1L_g(d_1\psi(X(1)))$.**

(i) *Dann ist ψ_* ein Liealgebren-Homomorphismus, d.h. es ist eine lineare Abbildung, die mit der Lieklammer kommutiert, also $\psi_*[X, Y] = [\psi_*X, \psi_*Y]$ gilt.*

(ii) *Dann ist*

$$\psi(\exp X) = \exp \psi_*X$$

für alle $X \in \mathfrak{g}_1$.

Beachten Sie: Da ψ i.A. kein Diffeomorphismus ist, ist ψ_ nicht gleich der Pushforward wie in Tabelle B.1 sondern stimmt a priori nur in der 1 überein.

A. Liegruppen und Wirkungen

Beweisskizze zu (ii). (ii) Setze $\gamma(t) := \psi(\exp(tX))$. Dann ist $\gamma(0) = \psi(1 \in G_1) = 1 \in G_2$ und nach Definition der Exponentialabbildung reicht es $\dot{\gamma}(t) = \psi_* X(\gamma(t))$ nachzurechnen:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= d_{\exp(tX)} \psi(X(\exp(tX))) \stackrel{\text{linksinv.}}{=} d_{\exp(tX)} \psi d_1 L_{\exp(tX)}(X(1)) \\ &= d_1(\psi \circ L_{\exp(tX)})(X(1)) \stackrel{\text{Liegr.hom}}{=} d_1(L_{\psi(\exp(tX))} \circ \psi)(X(1)) \\ &= d_1 L_{\psi(\exp(tX))} d_1 \psi(X(1)) = d_1 L_{\psi(\exp(tX))}(\psi_* X(1)) \\ &\stackrel{\text{linksinv.}}{=} \psi_* X(\psi(\exp(tX))) = \psi_* X(\gamma(t)) \quad \square \end{aligned}$$

Für $a \in G$ betrachten wir

$$h_a : g \in G \mapsto h_a(g) := aga^{-1} \in G.$$

Das ist ein Liegruppenisomorphismus und es gilt $h_b \circ h_a = h_{ba}$ sowie $h_a = L_a \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} \circ L_a$. Nach letztem Lemma ist $(h_a)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ linear und bijektiv - also $(h_a)_* \in \text{Gl}(\mathfrak{g})$. Insbesondere ist $(h_b)_* \circ (h_a)_* = (h_{ba})_*$.

Definition A.1.17.

$$\text{Ad} : a \in G \mapsto (h_a)_* \in \text{Gl}(\mathfrak{g})$$

heißt *adjungierte Darstellung* von G .

Wegen $\text{Ad}(a)\text{Ad}(b) = \text{Ad}(ab)$ ist Ad insbesondere eine Gruppendarstellung *

Beispiel A.1.18. Nach Beispiel gilt $\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$ für $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Lemma A.1.19. Die Ableitung

$$ad := d_1 \text{Ad} : T_1 G \cong \mathfrak{g} \rightarrow T_1 \text{Gl}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

erfüllt $ad(X)(Y) = [X, Y]$ und heißt adjungierte Darstellung der Liealgebra \mathfrak{g} .

Beweisskizze. Man benutzt die geometrische Interpretation der Lieklammer, vgl. Übungsaufgabe 31.i. Für G ist der Fluss von $X \in \mathfrak{g}$ durch $\Phi_t(g) := \Phi(g, t) = g \cdot \exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = R_{\exp(tX)}g$ gegeben (denn es gilt $\Phi(g, 0) = g$ und

$$\dot{\Phi}(g, t) = d_1 L_g(X(\exp(tX))) = X(L_g \exp(tX)) = X(\Phi(g, t)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\Phi_{-t}(Y(\Phi_t(1))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)}(Y(\exp(tX))) \\ &\stackrel{\text{linksinv.}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)} d_1 L_{\exp(tX)}(Y(1)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_1 \text{Ad}(\exp(tX))(Y) = ad(X)(Y). \quad \square \end{aligned}$$

*Darstellung einer Gruppe = stetige Abbildung $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ für einen Vektorraum V mit $\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$ für alle $a, b \in G$.

Da $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ auch einfach nur eine Matrixgruppe ist, ist die Lieklammer in Beispiel A.1.9 gegeben und wir haben mit der Jacobi-Identität, vgl. Tabelle B.1,

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z) &= \text{ad}(X)(\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y)(\text{ad}(X)(Z)) \\ &= \text{ad}(X)([Y, Z]) - \text{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\ &= -[Z, [X, Y]] = [[X, Y], Z] = \text{ad}([X, Y])(Z). \end{aligned}$$

Also ist insbesondere ad eine Darstellung der Liealgebra \mathfrak{g} .*

A.1.4. Killingform

Definition A.1.20. Sei \mathfrak{g} eine Liealgebra (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Die Bilinearform

$$K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

heißt *Killingform* von \mathfrak{g} .

Satz A.1.21. (i) K ist *Ad*-invariant, d.h. $K(\text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y) = K(X, Y)$.

(ii) K ist genau dann nichtdegeniert, wenn \mathfrak{g} halbeinfach[†]

(iii) Ist G kompakt und halbeinfach, dann ist K negativ definit.

Folgerung A.1.22. Ist G kompakt und halbeinfach, dann definiert

$$\gamma_a(X(a), Y(a)) := -K(X, Y) \text{ für } X, Y \in \mathfrak{g}$$

eine Riemannsche Metrik γ auf G . Für eine solche Metrik γ stimmt die Exponentialabbildung aus DiffGeo I mit der Exponentialabbildung für G als Liegruppe überein.

Beispiel A.1.23. (i) Ist G abelsch, ist $K = 0$.

(ii) Für $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist $K(X, Y) = 2n\text{Tr}(XY) - 2\text{Tr}(X)\text{Tr}(Y)$.

(iii) Ist $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{K})$ einfach, dann ist $K(X, Y) = c\text{Tr}(XY)$ für geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

(iv)

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \quad K(X, Y) &= 2n\text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{o}(n) \quad K(X, Y) &= (n-2)\text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{su}(n) \quad K(X, Y) &= 2n\text{Tr}(XY) \end{aligned}$$

*Darstellung einer Liealgebra = stetige Abbildung $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ für einen Vektorraum V mit $[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

[†] \mathfrak{g} heißt *einfach*, falls \mathfrak{g} nicht abelsch ist und außerdem \mathfrak{g} außer dem Nullraum und sich selbst keine weiteren Ideale enthält (Ideal $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g} =$ Unterliealgebra mit $[X, Y] \in \mathfrak{i}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{i}$). \mathfrak{g} heißt *halbeinfach*, falls \mathfrak{g} direkte Summe einfacher Ideale ist. Das ist genau dann der Fall, wenn \mathfrak{g} keine nichttrivialen abelschen Ideale enthält.

G heißt (*halb*-)einfach, falls \mathfrak{g} (halb-)einfach ist. Beispiele: $\text{SU}(n)$ für $n \geq 2$, $\text{SO}(n)$ für $n \geq 2$, $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ für

A.2. Gruppenwirkungen

Definition A.2.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Eine glatte Abbildung $\Psi: G \times M \rightarrow M$ heißt *linke bzw. rechte G -Wirkung* von G auf M , falls

- (i) $\Psi(1, x) = x$ für alle $x \in M$ und
- (ii) $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(gh, x)$ für die Linkswirkung bzw. $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(hg, x)$ für die Rechtswirkung für alle $g, h \in G, x \in M$

gilt. Das Tripel (M, G, Ψ) heißt *(linke bzw. rechte) G -Mannigfaltigkeit*. Für $g \in G$, sei $\Psi_g: M \rightarrow M, x \mapsto \Psi(g, x)$, die induzierte Abbildung auf M . Wir schreiben auch auf kurz $\Psi(g, x) = g \cdot x$ bei einer Linkswirkung und $\Psi(g, x) = x \cdot g$ bei einer Rechtswirkung.

Bemerkung A.2.2.

- (i) Sei $\iota: (g, x) \in G \times M \mapsto (g^{-1}, x) \in G \times M$. Ist Ψ eine Linkswirkung, dann ist $\Psi \circ \iota$ eine Rechtswirkung.
- (ii) Bei abelschen Gruppen gibt es keinen Unterschied zwischen Links- und Rechtswirkungen.
- (iii) Es ist $\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}} = \Psi_1 = \text{id}_M$. Damit ist Ψ_g ein Diffeomorphismus auf M . Deshalb könnten wir in Definition A.2.1 Bedingung (i) und (ii) auch durch folgende Forderung ersetzen: Die Abbildung $g \in G \mapsto \Psi_g \in \text{Diff}(M)$ ist ein Gruppenhomomorphismus für Linkswirkungen bzw. ein Gruppenantihomomorphismus für Rechtswirkungen.

Beispiel A.2.3.

- (i) Der Fluss $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eines beschränkten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine Wirkung von \mathbb{R} auf M - sowohl eine Links- als auch Rechtswirkung, da \mathbb{R} abelsch ist.
- (ii) Ist V ein Vektorraum und $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\Phi: (a, v) \in G \times V \mapsto \rho(a)v \in V$ eine Linkswirkung.
- (iii) $L: G \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto L_h(g) = hg$ ist eine Linkswirkung von G auf sich selbst. Analog können wir eine Rechtswirkung von G auf sich definieren. Die Konjugation $\Psi(a, g) = aga^{-1}$ ist eine Linkswirkung von G auf sich selbst ($(a, g) \mapsto a^{-1}ga$ wäre eine Rechtswirkung).

Sei G eine Liegruppe. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit eine Lieuntergruppe von G nach Satz A.1.14. Sei $G/H := \{[g] := gH \mid g \in G\}$ die Menge der linken Nebenklassen modulo H und $\pi: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ die kanonische Projektion. Die Abbildung

$$l: G \times G/H \rightarrow G/H, (g, kH) \mapsto gkH$$

definiert eine Linkswirkung von G auf G/H :

Satz A.2.4. [1, Satz 1.24] Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G . Dann trägt G/H eine eindeutig bestimmte Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass

- (i) die kanonische Projektion π und die Wirkung l glatt sind und
- (ii) für jeden Punkt $[g] \in G/H$ existiert eine Umgebung $U_{[g]} \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $s: U_{[g]} \rightarrow G$ mit $\pi \circ s = \text{id}|_{U_{[g]}}$

ist.

Definition A.2.5. In der obigen Situation nennen wir den Quotienten G/H , ausgestattet mit der eindeutigen Mannigfaltigkeitsstruktur von oben, *homogenen Raum*.

Folgerung A.2.6. Mit obiger Mannigfaltigkeitsstruktur wird $\pi: G \rightarrow G/H$ zu einem Faserbündel mit Fasertyp H und s ist ein lokaler Schnitt in diesem Bündel.

Beweisskizze. Es bleibt, aus s eine lokale Trivialisierung zu konstruieren: $\phi: \pi^{-1}(U_{[g]}) \subset G \rightarrow U_{[g]} \times H$, $\phi(g) = (gH, (s(gH))^{-1}g)$. Da $\pi \circ s = \text{id}$ ist, gilt $s(gH) = gh$ für ein $h \in H$ und damit $s(gH)^{-1}g = h \in H$. Es gilt $\text{pr}_1 \circ \phi = \pi$ und ϕ ist ein Diffeomorphismus mit $\phi^{-1}(gH, h) = s(gH)h$. \square

Beispiel A.2.7.

- (i) Sei $V_d(\mathbb{K}^r)$ die Menge aller d -Tupel orthonormaler Vektoren (=orthonormale d -Beine) in \mathbb{K}^r . Man kann $V_d(\mathbb{R}^r)$ bzw. $V_d(\mathbb{C}^r)$ mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/O_{r-d}(\mathbb{R}) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/U_{r-d}(\mathbb{R})$$

identifizieren. Damit wird auf $V_d(\mathbb{K}^r)$ mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen $V_d(\mathbb{K}^r)$ *Stiefel-Mannigfaltigkeit*. Spezialfall: $V_1(\mathbb{R}^r) = S^{r-1}$ und $V_1(\mathbb{C}^r) = S^{2r-1}$.

- (ii) Sei $G_d(\mathbb{K}^r)$ die Menge aller d -dimensionalen Untervektorräume des \mathbb{K}^r . Man kann $G_d(\mathbb{R}^r)$ bzw. $G_d(\mathbb{C}^r)$ mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/(O_d(\mathbb{R}) \times O_{r-d}(\mathbb{R})) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/(U_d(\mathbb{R}) \times U_{r-d}(\mathbb{R}))$$

identifizieren. Damit wird auf $G_d(\mathbb{K}^r)$ mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen $G_d(\mathbb{K}^r)$ *Graßmann-Mannigfaltigkeit*. (Spezialfall: $G_1(\mathbb{K}^r) = \mathbb{K}P^{r-1}$.)

Die Projektion $\pi: V_n(\mathbb{K}^d) \rightarrow G_n(\mathbb{K}^d)$, die jedem d -Tupel orthonormaler Vektoren in \mathbb{K}^d den durch diese Vektoren aufgespannten Untervektorraum von \mathbb{K}^d zuordnet, ist glatt und die Topologie auf $G_n(\mathbb{K}^d)$ stimmt mit der Quotiententopologie bzgl π überein.

- (iii) Es ist $S^1 \cong U(1)$. Weiterhin ist $S^3 \cong SU(2)$, da

$$(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

A. Liegruppen und Wirkungen

ein Diffeomorphismus ist. Es ist nun

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \right\} \subset SU(2)$$

ein Untergruppe, die auch abgeschlossen und damit eine Lieuntergruppe ist. Die Projektionsabbildung in den zugehörigen homogenen Raum $S^3 \rightarrow S^3/S^1$ gibt genau die Hopffaserung von oben: Denn betrachtet man als S^1 -Wirkung auf $SU(2)$

$$e^{i\alpha} \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} a & \overline{e^{-i\alpha} b} \\ -e^{-i\alpha} b & \overline{e^{i\alpha} a} \end{pmatrix}.$$

entspricht das auf der S^3 -Seite genau unserer S^1 -Wirkung.

Satz A.2.8. [6, Thm 21.10] Sei Ψ eine freie und eigentliche freie Wirkung einer Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M , dann existiert auf dem topologischen Raum M/G eine eindeutig bestimmte glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, in der die kanonische Projektion $\pi: M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist. Für jeden Punkt $[g] \in M/G$ existiert eine Umgebung $U[g] \subset M/G$ und eine glatte Abbildung $s: U[g] \rightarrow M$ mit $\pi \circ s = \text{id}|_{U[g]}$.

B. Übersicht - Operationen auf Differentialformen

op_diffops.mp4

			lokale Def. x^i lokale Koord. auf $U \subset M$, y^i auf $V \subset N$ $F(U) \subset V$, $\phi(U) = V$	Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau)	Ref.
F^*	Pullback	$F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$	$F^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})$ $= (f_{i_1 \dots i_k} \circ F) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	<ul style="list-style-type: none"> $(F^*\gamma)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) = \gamma_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p)))$ $F^*f = f \circ F$ $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ 	[2, S.76]
ϕ_*	Pushforward	$\phi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$	$\phi_*(X^i \partial_{x^i}) = X^i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} \partial_{y^j}$	<ul style="list-style-type: none"> $(\phi_* X)(p) = d_{\phi^{-1}(p)} \phi(X(\phi^{-1}(p)))$ $\phi_*(fX) = (f \circ \phi^{-1})(\phi_* X)$ $(\phi_* X)(f) = X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ $\phi_* \circ \phi_* X = (\psi \circ \phi)_* X$ 	
d	äußere Ableitung	$d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ für alle $k \geq 0$	$d(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> d ist \mathbb{R}-linear $df(X) = X(f)^*$ $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ $d^2 = d \circ d = 0$ $F^* \circ d = d \circ F^*$ 	[2, S.76]
ι	inneres Produkt (auch Kontraktion genannt)	$\iota: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ für alle $k \geq 1$	$\iota_{X \circ \partial_{x^a}}(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= X^a f_{i_1 \dots i_k} \delta_a^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> ι ist $C^\infty(M)$-bilinear $(\iota_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)$ $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta$ $\iota_X^2 \alpha = 0$ 	

weiter auf nächster Seite

*Das sagt einfach nur, dass d auf $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$ einfach durch die Tangentialabbildung df gegeben werden soll. Um das in der Notation zu unterscheiden, benutzt man hier die alternative Schreibweise als Derivation.

$[\cdot, \cdot]$	Lieklammer	$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$[X^i \partial_{x^i}, Y^j \partial_{y^j}]$ $= (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) \partial_{x^i}$	<ul style="list-style-type: none"> • $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ • $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi-Identität) • $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$ • $d\alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_i (-1)^i X_i(\alpha(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i < \ell} (-1)^{i+\ell} \alpha([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_k)$ * 	[2, ÜA 39] [2, Lem. II.10.16]
\mathcal{L}	Lieableitung	$\mathcal{L}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$		<ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt} \Big _{t=0} \Phi_t^* \alpha^\dagger$ • $\mathcal{L}_X f = X(f)$ • $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) + \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta$ • $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ • $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ • $\mathcal{L}_{fX} \alpha = f \mathcal{L}_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha$ 	

Tabelle B.1.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf M *Das $\check{}$ bedeutet, dass dieser Eintrag ausgelassen wird. $\dagger \Phi_t$ ist der Fluss des Vektorfeldes X , vgl. [2, ÜA 45].

Operationen mit Metrik g auf M^m					
			lokal (+Linearität)	Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau)	Ref.
				$p \in M, f, f_{i_1, \dots, i_k}, X^i \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\alpha, \alpha_i \in \Omega^k(M), \omega \in \Omega^{k+1}(M), \beta \in \Omega^l(M), \eta \in \Omega^{m-k}(M)$ $F \in C^\infty(M, N), \gamma \in \Omega^k(N), \eta \in \Omega^l(N)$	
\flat	Herunterziehen von Indizes	$\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$	$(X^a(x)\partial_{x^a})^\flat = X^a(x)g_{ai}(x)dx^i$	<ul style="list-style-type: none"> $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ 	[2, Bsp. II.10.12]
\sharp	Erhöhen von Indizes	$\sharp: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$(f_i(x)dx^i)^\sharp = f_i(x)g^{ij}(x)\partial_{x^j}$	<ul style="list-style-type: none"> $\alpha(Y) = g(\alpha^\sharp, Y)$ 	[2, Bsp. II.10.12]
grad	Gradient	grad: $C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	gradf = $g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_{x^j}$	<ul style="list-style-type: none"> gradf = $(df)^\sharp$ 	[2, ÜA 31]
δ	formal adjungierter Operator zu d	$\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$		<ul style="list-style-type: none"> $(d\alpha, \omega)_{L^2} = (\alpha, \delta\omega)_{L^2}$* $\delta^2 = 0$ 	S. 29
div	Divergenz	div: $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$	$\text{div}(X^a(x)\partial_{x^a}) = (\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}X^a)$	<ul style="list-style-type: none"> $d(\iota_X \text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g$ (auch falls dvol_g nur lokal wohldef. ist) $\mathcal{L}_X(\text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g$ 	
Δ	(Hodge-)Laplace	$\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$	$\Delta f = -(\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}g^{ab}\partial_{x^b}f)$	<ul style="list-style-type: none"> $\Delta = d\delta + \delta d = (d + \delta)^2$ $\Delta f = \delta df = \text{div grad}f$ 	[2, Bsp. 2.1.10]
*	Hodge-Stern (für M orientiert)	$*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$	$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ $= \frac{1}{k!} g^{i_1 \epsilon_1} \dots g^{i_k \epsilon_k} \epsilon_{\epsilon_1 \dots \epsilon_k j_1 \dots j_{m-k}} \sqrt{ \det g } dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-k}}$ †	<ul style="list-style-type: none"> $*$ ist $C^\infty(M)$-linear $\alpha \wedge \eta = g(\alpha, *\eta)\text{dvol}_g$ $*\alpha = (-1)^{k(m-k)}\alpha$ $g(*\alpha_1, *\alpha_2) = g(\alpha_1, \alpha_2)$ $\delta\alpha = (-1)^{m(k-1)-1} * d * \alpha$ $\iota_v(\alpha) = (-1)^{m(k-1)-1} *(v^\flat \wedge *\alpha)$ 	ÜA 15

Tabelle B.2.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g)

*Für $\alpha_i \in \Omega^k(M)$ ist $(\alpha_1, \alpha_2)_{L^2} := \int_M g(\alpha_1, \alpha_2)\text{dvol}_g$, wobei g hier die induzierte Bündelmetrik auf $\Lambda^k(M)$ ist.

†Für $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ setzen wir $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = \text{sign}(\sigma)$, falls σ eine Permutation ist, und sonst $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = 0$.

Literaturverzeichnis

- [1] BAUM, H. *Eichfeldtheorie, Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] GROSSE, N. Differentialgeometrie I. https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/Differentialgeometrie/DiffGeo_WS-1920_Skript.pdf.
- [3] HEBEY, E. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, vol. 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [4] HIRZEBRUCH, F. *Topological methods in algebraic geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.
- [5] KAROUBI, M. *K-theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [6] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [7] MEINRENKEN, E. *Clifford algebras and Lie theory*, vol. 58 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [8] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980. Functional analysis.
- [9] ROE, J. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, second ed., vol. 395 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1998.
- [10] WALSCHAP, G. *Metric structures in differential geometry*, vol. 224 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2004.