Nadine Große, Maximilian Stegemeyer

Präsenzübungsblatt

Aufgabe. Skizzieren Sie:

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + 2z = 1\}$

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, x + y + 2z = 1\}$

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 = z^2, x + y + 2z = 0\}$

Im Rest dieses Blattes soll es um die Wiederholung und Anschauung des Satzes über implizite Funktionen (und des Satzes zur lokalen Umkehrbarkeit) gehen.

Satz über implizite Funktionen. Sei $f\colon V \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ glatt $(n = m + k)$. Sei $(a, b) \in V$ mit $f(a, b) = 0$. Weiterhin sei

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a, b) \right)_{1\leq i\leq k, m+1\leq j\leq n} \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von (a, b), eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$ und eine glatte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$, so dass $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

Satz über die lokale Umkehrbarkeit = Umkehrsatz. Seien $O, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p_0 \in O$. Sei $f\colon O \to V$ glatt und sei $D_{p_0} f$ invertierbar ($\cong \det D_{p_0} f \neq 0$). Dann gibt es eine Umgebung $U \subset O$ von p_0 und eine Umgebung U' von $q_0 = f(p_0)$, so dass $f\colon U \to U'$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $D_{f(p)}(f^{-1}) = (D_p f)^{-1}$ für $p \in U$.

Aufgabe. Wiederholen Sie den Satz über implizite Funktionen und den Satz zur lokalen Umkehrbarkeit (s.oben). Sie besagen jeweils, dass das Determinantenkriterium hinreichend ist. Wir schauen uns hier jeweils nur den Satz über implizite Funktionen an, für den Umkehrsatz könnte man aber ähnliches machen.

(i) (Linearisierte Version vom implizite Funktionensatz) Sei $f\colon \mathbb{R}^{n=m+k} \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, also gegeben durch $f(x) = Ax$, bzw. $f(x = (x^1, \ldots, x^m)^T) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^T$ mit $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x^j$ und $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq k, 1\leq k\leq n}$.

Unter welchen Bedingungen existiert ein $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ mit $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$. Geben Sie das g, wenn existent, explizit an.

(ii) (Das Determinantenkriterium ist notwendig) Sei $f\colon V \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ glatt $(n = m + k)$. Sei $(a, b) \in V$ mit $f(a, b) = 0$. Sei $V' \subset V$ eine offene Umgebung von (a, b), $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge mit $a \in U$ und $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion mit $g(a) = b$, so dass $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

Zeigen Sie, dass dann das Determinantenkriterium gelten muss. (Was hat das mit (i) zu tun?)

(iii) Das Determinantenkriterium ist aber nicht notwendig, wenn die Auflösung bzw. Umkehrabbildung nur existieren aber nicht zwingend glatt sein soll. Zeigen Sie dies, indem Sie ein Beispiel $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden.

Aufgabe (Satz über implizite Funktionen am Beispiel)**.** Sei eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n=m+k} \to \mathbb{R}^k$ gegeben:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x^1, x^2)^T \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x^1, x^2, x^3)^T \mapsto \big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, x^1 - x^3\big)^T$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x^1, x^2)^T \mapsto (x^1)^2 - (x^2)^3$

(i) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrix

$$D_x f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x)\right)_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n}.$$

(ii) Skizzieren Sie die Menge $S := f^{-1}(0 \in \mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$.

(iii) Finden Sie einen Punkt $x_0 = (a, b) \in S$ mit $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^k$, so dass es eine offene Umgebung von $U \subset \mathbb{R}^m$ von a und eine glatte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$ und $f(u, g(u)) = 0$ für all $u \in U$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel auch U und g explizit an.

(iv) Gibt es einen Punkt $x_0 \in S$, für den (iii) nicht möglich ist?

Dieses Blatt wird in der ersten Übung besprochen.