Differentialgeometrie
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Nadine Große, Maximilian Stegemeyer
WS 23/24

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2.5+2.5)**.** Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen Untermannigfaltigkeiten sind.

(i) $S^m = \{x = (x^1, \ldots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = 1\}$

(ii) [1] $G = \{x = (x^1, \ldots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^{m+1} = f(x^1, \ldots, x^m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3+2)**.** (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

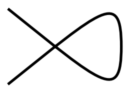
(ii) Zeigen Sie mittels des Kriteriums vom regulären Wert, dass

$$T^n = \left\{\left(x^1, x^2, \ldots, x^{2n-1}, x^{2n}\right) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \ldots = (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1\right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

Aufgabe 3 (2+3+2*)**.** Sei $c\colon I = (a,b) \to \mathbb{R}^n$ glatt (Man nennt c dann eine (glatte) *parametrisierte Kurve* im $\mathbb{R}^n$. Entscheiden Sie in welchen Fällen, die *Spur* der Kurve ($=$ Bild(c)) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(i) Sei $n = 2$ und die Spur von c sei:



(ii) Sei c ein Homöomorphismus aufs Bild und sei c *regulär* (d.h. $|c'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$).

Kann man hier auch die 'Homöomorphismus aufs Bild'-Bedingung durch c ist injektiv ersetzen und trotzdem immer eine Untermannigfaltigkeit erhalten?

(iii*) Sei $I = \mathbb{R}$ und sei c eine reguläre periodische[2] Kurve, die eine einfach geschlossene [3] Kurve parametrisiert.

Abgabe am Donnerstag 26.10.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

*=Zusatzaufgabe
[1](ii) ist der Standardfall – vgl. Satz 1.5
[2]periodisch = Es gibt ein $a > 0$, so dass $c(t+a) = c(t)$ für alle t ist (a heißt *Periode* von c).
[3]Sei c periodisch und sei a_0 die kleinste Periode von c. Dann heißt c *einfach geschlossen*, falls $c|_{[t,t+a_0)}$ für alle t injektiv ist.