

Differentialgeometrie II

Universität Freiburg, WS 2017/18
Nadine Große

Skript - Version vom 20. Juli 2018

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

I. Bündeltheorie	1
I.1. Faserbündel	1
I.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen	3
I.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln	5
I.2. Vektorbündel	9
I.2.1. Schnitte	9
I.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln	10
I.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel	14
I.2.4. Bündelmetriken	15
I.2.5. Operationen auf Formen und Vektorfeldern	17
I.2.6. Zusammenhänge und Krümmungen auf Vektorbündeln	23
I.2.7. Paralleltransport	27
I.3. Hauptfaserbündel	33
I.3.1. Definition	33
I.3.2. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel	35
I.3.3. Exkurs: Čech-Kohomologie	37
I.3.4. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln	39
I.3.5. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln	40
I.3.6. Krümmung	46
I.4. Klassische Yang-Mills-Theorie	49
I.4.1. Klassische Elektrodynamik	49
I.4.2. Klassische Yang-Mills Theorie	50
II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln	53
II.1. Definitionen und erste Eigenschaften	53
II.1.1. Im \mathbb{R}^n	53
II.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel	53
II.2. Hauptsymbol und Klassifikation	55
II.2.1. Hauptsymbol	55
II.2.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren	57
II.3. Elliptische Diffops	58
II.3.1. Grundlagen und erste Anwendungen	59
II.3.2. Laplace-artige Operatoren	63
II.3.3. Spektrum des Laplaceoperators auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	64
II.3.4. Dirac-artige Operatoren	67
II.3.5. Bochner Theoreme	71
II.3.6. Etwas Funktionalkalkül	72
II.4. Zur Wärmeleitungsgleichung	73
II.4.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns	74
II.4.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz	77
A. Liegruppen und Wirkungen	79
A.1. Liegruppen	79
A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren	79
A.1.2. Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren	81
A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen	81
A.1.4. Killingform	82

Inhaltsverzeichnis

A.2. Gruppenwirkungen	83
B. Übungsaufgaben	87
Literatur	101

I. Bündeltheorie

I.1. Faserbündel

Sei $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ eine glatte* Mannigfaltigkeit, z.B. $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist der Tangentialraum $T_x M$ ein Vektorraum für alle $x \in M$ und wir haben eine Einbettung $\tau_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $\tau_x(0 \in T_x M) = x$). Ändern wir x , dann ändert sich auch dieser Tangentialraum, aber in einer kontinuierlichen Weise. Um das zu präzisieren, betrachten wir die Abbildung

$$TM := \sqcup_{x \in M} T_x M \ni v \in T_x M \mapsto (x, \tau_x(v)) \in M \times \mathbb{R}^n.$$

Diese ist injektiv und gibt uns damit eine glatte Struktur auf TM . Das ist auch die Mannigfaltigkeitsstruktur, die man durch die Forderung erhält, dass für eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ auf M die Abbildung $d\kappa: TU = \sqcup_{x \in U} T_x M \rightarrow TV \cong V \times \mathbb{R}^m$, definiert durch $d\kappa(v \in T_x M) := (x, d_x \kappa(v))$, eine Karte von TM sein soll.

Diese letzte Forderung macht auch Sinn auf abstrakten Mannigfaltigkeiten M^m und so wird auch dort TM zu einer glatten $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, vgl. [3, Satz I.3.15].

Allerdings ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Zusatzstruktur: Wir haben eine surjektive glatte Abbildung $\pi: TM \rightarrow M$, $v \in T_x M \mapsto x \in M$. Desweiteren gilt für $U \subseteq M$ klein genug: Es gibt eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\pi^{-1}(U) = TU$ ist mittels der Abbildung $(\kappa^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}) \circ d\kappa$ isomorph zu $U \times \mathbb{R}^m$ – diese Eigenschaft heißt *lokal trivial*. Diese Zusatzstrukturen machen TM zu einem sogenannten Faserbündel – speziell nennen wir TM *Tangentialbündel* von M :

Definition I.1.1. Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und sei F eine Mannigfaltigkeit. Dann ist $\pi: E \rightarrow M$ ein *Faserbündel mit dem Fasertyp F* , falls es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M und Diffeomorphismen $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ gibt, so dass $\text{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ (Man sagt: φ_α ist *fasertreu*) gilt.

Der Raum E heißt *Totalraum*, M *Basisraum*, π ist die *Projektion* und F der *Fasertyp* der Faserung. $E_x = \pi^{-1}(x) \subseteq E$ ist die *Faser* über $x \in M$ und (U, φ_U) ist eine *lokale Trivialisierung* über U .

Gegeben zwei Faserbündel $\pi_i: E_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$ mit Fasertyp F . Eine glatte Abbildung $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$ heißt *Bündelmorphismus*, falls es eine Abbildung $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ mit $\pi_2 \circ \Phi = \varphi \circ \pi_1$ gibt. Ist $M_1 = M_2$ und Φ auf allen Fasern sogar ein Diffeomorphismus (also insbesondere $\varphi = \text{id}$), so nennt man Φ *Bündelisomorphismus* und die entsprechenden Faserbündel *isomorph*.

Ein *Schnitt* ist eine Abbildung $s: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}$. Die Menge aller Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$.[†]

Beispiel I.1.2. (i) (*Triviales Faserbündel*) $E = M \times F \xrightarrow{\pi = \text{pr}_1} M$ (jedes dazu isomorphe Faserbündel nennen wir auch *trivial*) Ein glatter Schnitt in E entspricht dann einfach einer glatten Abbildung $M \rightarrow F$.

(ii) Ist die Faser diskret, also $\dim F = 0$, so nennt man das Bündel *Überlagerung*.

*Ab sofort sind bei uns Mannigfaltigkeiten und Abbildungen immer glatt – außer wir sagen es explizit dazu – und wir schreiben das glatt i.A. nur noch hinzu, um es hervorzuheben.

[†]Auch hier ist, wie oben erwähnt, wieder alles glatt gemeint.

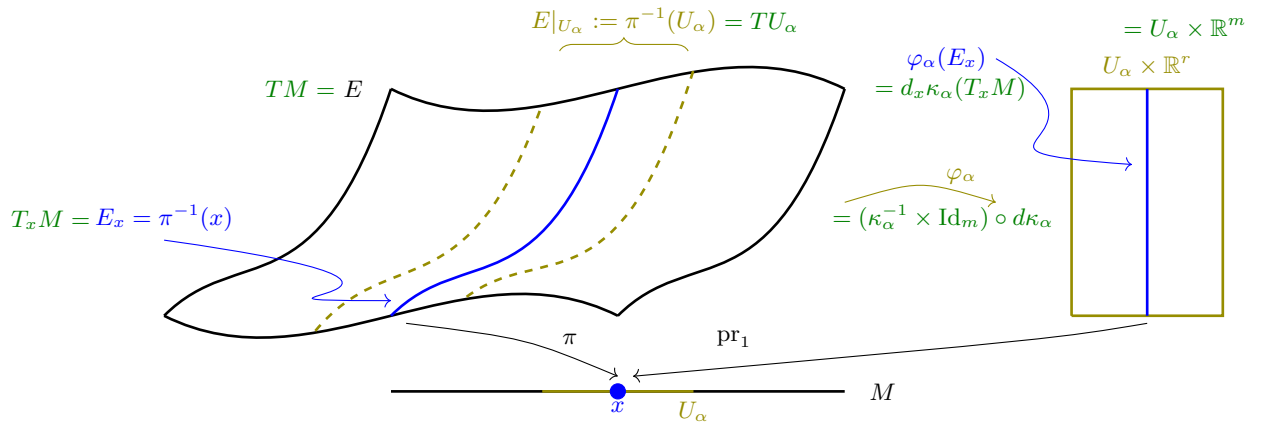


Abb. I.1.: Schematische Darstellung (eines Teils) eines Faserbündels. In grün steht jeweils dabei, was die einzelnen Punkte für unser Beispiel TM von oben wären.

- (iii) (*Kanonisches Geradenbündel*) Sei $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{K}^*$ der projektive Raum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Das ist eine Mannigfaltigkeit, vgl. [3, Abschnitt I.3.3.]. Das kanonische Geradenbündel $\pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{K}P^n$ ist definiert durch $(\ell, v) \mapsto \ell$. Wir betrachten τ als Teilmenge von $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1}$ mit der induzierten Mannigfaltigkeitsstruktur. Dann ist $\pi: \tau \subseteq \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}P^n$, die Projektion auf die erste Koordinate, ein Faserbündel mit Fasertyp \mathbb{K} .
- (iv) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M und $\pi: TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel auf M . Dann ist das *Einheitstangentialbündel* $e \in SM := \{e \in TM \mid g_{\pi(e)}(e, e) = 1\} \mapsto \pi(e) \in M$ ein Faserbündel über M .
- (v) *Möbiusband* Setze $E := [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$ mit $(x, v) \sim (y, w)$ genau dann, wenn $\{x, y\} = \{0, 1\}$ und $v = -w$ ist. Dann ist $\pi: E \rightarrow S^1 \cong [0, 1] / (0 \sim 1)$, $[(x, v)] \mapsto [x]$, ein Faserbündel über S^1 . Jeder Schnitt in E kommt von einer antiperiodischen Abbildung auf \mathbb{R} , also von einem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+1) = -f(x)$. Auch $E' := ([0, 1] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) / \sim$ mit \sim wie oben ist ein Faserbündel über S^1 . Allerdings ist $\Gamma(E') = \emptyset$.
- (vi) *Hopffaserung*: Wir betrachten die Wirkung von $U(1) \cong S^1$ auf \mathbb{C}^2 mittels

$$((z_1, z_2), e^{i\alpha}) \in \mathbb{C}^2 \times U(1) \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Diese Wirkung lässt die Untermannigfaltigkeit $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ invariant. Die Projektion $S^3 \rightarrow S^3/U(1)$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp S^1 .

Beweis. vgl. Beispiel A.2.14 und Beispiel A.1.10.iv □

Bemerkung I.1.3. In obigen Beispielen haben wir gesehen, dass $\Gamma(E)$ auch leer sein kann. Was es aber immer gibt, sind *lokale Schnitte*. D.h. für alle $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine glatte Abbildung $s: U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$. Das folgt direkt aus der Existenz der lokalen Trivialisierungen.

Bemerkung I.1.4. Die Kategorie $\text{Bun}_F(M)$ hat als Objekte die Faserbündel über M mit Fasertyp F und als Morphismen der Kategorie die Bündelmorphismen, deren induzierte Abbildungen auf M die Identität sind.

Oft werden Bündel mit Zusatzstrukturen betrachtet. So ist z.B. das Tangentialbündel von oben ein Faserbündel $\pi: E = TM \rightarrow M^m$ mit einem Vektorraum als Fasertyp, dessen lokale Trivialisierungen Vektorraumisomorphismen auf den Fasern sind. Das gleiche gilt fürs Möbiusband. Beide gehören zu den Vektorbündeln:

Definition I.1.5. Ein Faserbündel $\pi: E \rightarrow M$ mit Fasertyp F ist ein *reelles Vektorbündel vom Rang r* , falls $F = \mathbb{R}^r$, alle Fasern $E_p := \pi^{-1}(p)$ Vektorräume sind und falls für jede lokale Trivialisierung $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

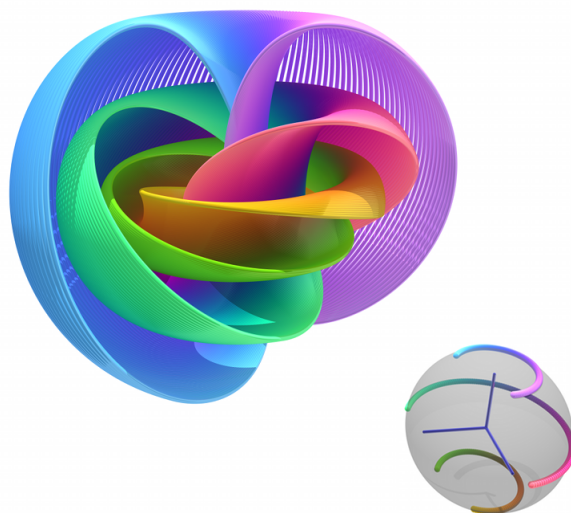


Abb. I.2.: Das ist eine Visualisierung der Hopffaserung. Aufgrund der hohen Dimensionen wird eine stereographische Projektion der S^3 auf den \mathbb{R}^3 durchgeführt und dieser dann diffeomorph in einen Ball $B_2(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ abgebildet. Das Bild zeigt verschiedene Punkte von $S^2 \subseteq B_2(0)$ zusammen mit ihren Bahnen unter Wirkung S^1 in verschiedenen Farben, vgl. auch <https://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk> für eine Animation.
[By Niles Johnson - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22485543>]

und $p \in U_\alpha$ die Einschränkung $\varphi_p := \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_p} : E_p \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Analog werden *komplexe Vektorbündel* oder allgemein \mathbb{K} -Vektorbündel (\mathbb{K} ein Körper) definiert.

Ein *Vektorbündelhomomorphismus* bzw. *-isomorphismus* zwischen zwei Vektorbündeln ist ein Bündelmorphismus, dessen Einschränkung auf die Fasern linear bzw. ein Vektorraumisomorphismus ist.

Von den Beispielen aus I.1.2 hat das triviale Vektorbündel mit Faser \mathbb{K}^r , das kanonische Linienbündel über $\mathbb{K}P^n$ und das Möbiusband jeweils Vektorbündelstruktur – die letztem beiden haben Rang 1. Vektorbündel vom Rang 1 nennen wir auch *Geradenbündel*.

Mehr zu Vektorbündel in Abschnitt I.2. Eine andere spezielle Klasse von Faserbündeln werden Hauptfaserbündel sein, vgl. Abschnitt I.3.

I.1.1. Konstruktion von Faserbündeln mittels Übergangsfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns anschauen, wie und ob man sich aus trivialen Faserbündeln über offenen Teilmengen von M sich ein Faserbündel über ganz M zusammenkleben kann:

Bemerkung I.1.6. (Wechsel lokaler Trivialisierungen) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ eines Faserbündels $\pi : E \rightarrow M$. Dann gibt es für alle α, β mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ eine Abbildung

$$\mu_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F) \text{ mit } \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \mu_{\alpha\beta}(p)v)$$

für $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ und $v \in F$. Hierbei ist $\text{Diff}(F)$ die Menge aller Diffeomorphismen von F . Diese bilden zusammen mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe – die *Diffeomorphismengruppe* von F . Da die φ_α Diffeomorphismen sind, ist $\mu_{\alpha\beta}(p) \in \text{Diff}(F)$.

Definition I.1.7. Eine Abbildung $h : B \rightarrow \text{Diff}(F)$ nennen wir *glatt*, falls $\tilde{h} : B \times F \rightarrow F$, $\tilde{h}(b, f) := h(b)(f)$, glatt ist (im ursprünglichen Sinne von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten). Die Menge solcher glatten Abbildungen bezeichnen wir mit $C^\infty(B, \text{Diff}(F))$.

I. Bündeltheorie

In diesem Sinne sind die obigen Abbildungen $\mu_{\alpha\beta}$ glatt. Diese Abbildungen werden *Übergangsfunktionen* genannt.

Es gilt

$$(i) \mu_{\alpha\alpha} = 1, \text{ d.h. } \mu_{\alpha\alpha}(x) = \text{id}: F \rightarrow F \text{ für alle } x \in U_\alpha.$$

$$(ii) \mu_{\beta\alpha}\mu_{\gamma\beta}\mu_{\alpha\gamma} = 1.$$

Man sagt, dass die $\mu_{\alpha\beta}$ die *Kozykelbedingung* erfüllen. Nehmen die $\mu_{\alpha\beta}(x)$ nur Werte in einer Untergruppe $G \subseteq \text{Diff}(F)$ ein, so nennen wir G die *Strukturgruppe* vom Faserbündel und die $\mu_{\alpha\beta}$ einen G -*Kozykel*.

Als nächstes werden wir sehen, dass in den $\mu_{\alpha\beta}$ (bei gegebener Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$) schon das Faserbündel kodiert ist:

Satz I.1.8. *Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges Faserbündel vom Fasertyp F , welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.*

Beweis. Existenz: (Skizze - vgl. Übungsaufgabe 2) Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F / \sim \xrightarrow{\pi} M, [(x, v)] \mapsto x,$$

wobei $(x, v) \in U_\alpha \times F \sim (y, w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\alpha\beta}(x)v = w$ ist. Dann ist $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, [(x, v)] \mapsto (x, v)$.

Vorl. 2 *Eindeutigkeit:*

Sei $E' \xrightarrow{\pi'} M$ ein Faserbündel über M mit Faser F und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$. Sei E wie oben konstruiert.

Wir definieren $f: E' \rightarrow E$ als $e \xrightarrow{\varphi'_\alpha} (x, v) \xrightarrow{\sim} [(x, v)]$ mit $\pi(e) \in U_\alpha$. Für Wohldefiniertheit reicht es zu zeigen, dass $\varphi'_\alpha(e) \sim \varphi'_\beta(e)$ für $\pi(e) \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt. Das folgt direkt, da beide Faserbündel die gleichen Übergangsfunktionen haben: $\varphi'_\beta(e) = (x, w) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(v)) = \varphi'_\beta \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, v) = \dots$ Es gilt $\pi \circ f = \pi'$. Die Abbildung $\varphi_\alpha \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$ ist gegeben durch $(x, v) \in U_\alpha \times F \mapsto e = (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, v) \in E' \xrightarrow{f} [(x, v)] \in E \mapsto (x, v) \in U_\alpha \times F$, also gleich der Identität. Da die φ_α und φ'_α glatt sind, muss auch f auf $(\pi')^{-1}(U_\alpha)$ und damit auf ganz M glatt sein. Die Inverse ist durch $f^{-1}: E \rightarrow E', [(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r] \mapsto (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, v)$ gegeben. Wohldefiniertheit folgt wie zuvor. \square

Die Übergangsfunktionen selbst hängen stark von den gewählten Trivialisierungen ab. Die Frage ist nun, wann liefert obige Konstruktion isomorphe Faserbündel.

Satz I.1.9. *Gegeben zwei Faserbündel E, E' über M mit Fasertyp F . Zu einer gegebenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die Faserbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \text{Diff}(F))$ mit*

$$\mu_{\beta\alpha}h_\beta = h_\alpha\mu'_{\beta\alpha} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta. \quad (\text{I.1})$$

Insbesondere ist das Faserbündel E trivial, wenn $\mu_{\beta\alpha} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Beweis. Sei $f: E \rightarrow E'$ ein Bündelisomorphismus. Dann definiert $\varphi_\alpha \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha \times F$ durch $\varphi_\alpha \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, v) \mapsto (x, h_\alpha(x)(v))$ eine glatte Abbildung $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Diff}(F)$. Mit

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ f \circ (\varphi'_\beta)^{-1})(x, v) &= (\varphi_\alpha \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}) \circ (\varphi'_\alpha \circ (\varphi'_\beta)^{-1})(x, v) \\ (x, \mu_{\beta\alpha}(x)h_\beta(x)(v)) &= (x, h_\alpha(x)\mu'_{\beta\alpha}(x)(v)) \end{aligned}$$

folgt direkt (I.1).

Sei nun andererseits (I.1) für glatte Funktionen $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Diff}(F)$ erfüllt. Dann definieren wir $f: E \rightarrow E'$ durch: Sei $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ mit $\varphi_\alpha(e) = (x, v)$. Dann setze $f(e) := \varphi'_\alpha(x, h_\alpha(x)^{-1}(v))$. Wohldefiniertheit von f folgt mit $\varphi_\beta(e) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(v))$ und

$$\varphi'_\beta(x, h_\beta(x)^{-1}\mu_{\alpha\beta}(x)(v)) = \varphi'_\beta(x, \mu'_{\alpha\beta}(x)h_\alpha(x)^{-1}(v)) = \varphi'_\alpha(x, h_\alpha(x)^{-1}(v)). \quad \square$$

Bemerkung I.1.10. (i) Für zwei beliebige Faserbündel E und E' über M weiß man a priori erst einmal nur, dass es offenen Überdeckungen U_α und U'_α von M gibt, über denen E bzw. E' lokal trivial ist. Diese offenen Überdeckungen haben i.A. nichts miteinander zu tun. Man kann aber immer zu einer gemeinsamen Verfeinerung (z.B. $\{U_\alpha \cap U'_\beta\}_{\alpha,\beta}$) übergehen, für welche man dann den letzten Satz anwenden kann.

(ii) Sei $M = \mathbb{R}^m$, F beliebige Mannigfaltigkeit. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau ein Faserbündel über M mit Fasertyp F – das triviale Bündel. Der Beweis kommt in Folgerung I.1.21.

Beispiel I.1.11 (Das Möbiusband ist kein triviales Bündel). Sei $M = S^1$, $F = \mathbb{R}$. Dann gibt es als Faserbündel das triviale Bündel $E = \mathbb{R} \times S^1$ und das Möbiusband aus Beispiel (v). Schauen wir uns Übergangsfunktionen zu diesen Bündeln an:

Sei $U_\pm := S^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$. Dann zerfällt $U_+ \cap U_-$ in zwei Zusammenhangskomponenten, die wir V_\pm nennen. Für das Möbiusband wählen wir die Trivialisierungen, so dass $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = v$ für $x \in V_+$ und $\mu_{+-}(x)(v \in \mathbb{R}) = -v$ für $x \in V_-$ ist. Für das triviale Bündel wählen wir einfach eine globale Trivialisierung und dann ist die Übergangsfunktion $\mu'_{+-}(x)(v) = v$ für alle $x \in U_+ \cap U_-$. Wäre das Möbiusband trivial, müsste es Funktionen $h_\pm: U_\pm \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R})$ mit $\mu_{+-}(x) = h_+(x) \circ h_-(x)^{-1}$ geben. Das heißt, entweder h_+ oder h_- würde einem glatten Weg in $\text{Diff}(\mathbb{R})$ entsprechen, der von einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus zu einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus geht. Einen solchen Weg gibt es nicht, da ein orientierungserhaltender (-umkehrender) Diffeomorphismus auf \mathbb{R} überall positive (negative) Ableitung hat während entlang eines solchen Weges die Ableitungen aber stetig sein müssen.

Das triviale Bündel und das Möbiusband sind bis auf Isomorphie sogar die einzigen Faserbündel über S^1 mit Faser \mathbb{R} , vgl. Beispiel I.1.14.

I.1.2. Konstruktionen von Faserbündeln aus anderen Faserbündeln

I.1.2.1. Einschränkungen

Die einfachste Art aus gegebenen Faserbündeln $\pi: E \rightarrow M$ neue zu konstruieren sind Einschränkungen auf Untermannigfaltigkeiten $N \subseteq M$, also $\pi_N: E|_N := \pi^{-1}(N) \rightarrow N$. Dies ist ein Faserbündel über N mit Fasertyp F :

Beweis. Da π eine Submersion ist, ist $\pi^{-1}(N)$ eine Untermannigfaltigkeit von E^* . Nun folgt der Rest automatisch durch Einschränkung der lokalen Trivialisierungen von E . \square

Einschränkungen können helfen, um zu zeigen, dass zwei Faserbündel isomorph sind:

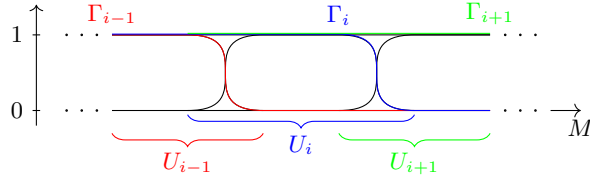
Satz I.1.12. Sei $\pi: E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F . Dann sind die Einschränkungen $E|_{M \times \{0\}}$ und $E|_{M \times \{1\}}$ isomorphe Faserbündel über M .

Beweis. Übungsaufgabe 4 – wir listen hier nur die Zwischenschritte:

- (i) Hilfsaussage: Sind die Einschränkungen $E|_{M \times [0,c]}$ und $E|_{M \times [c,1]}$ triviale Faserbündel, dann ist auch $E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein triviales Faserbündel.
- (ii) Es gibt eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M , so dass alle Einschränkungen $E|_{U_i \times [0,1]}$ trivial sind.[†]
- (iii) Sei U_i wie in (ii) und φ_i eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze $\psi_i = \sum_{j \leq i} \varphi_j$. Weiterhin sei $\Gamma_i := \{(x, \psi_i(x)) \mid x \in M\}$ und $E_i := E|_{\Gamma_i}$. Die Abbildung $(x, \psi_i(x)) \in \Gamma_i \rightarrow (x, \psi_{i-1}(x)) \in \Gamma_{i-1}$ induziert einen Bündelisomorphismus $h_i: E_i \rightarrow E_{i-1}$. Das funktioniert, da der Bereich zwischen Γ_{i-1} und Γ_i vollständig in $U_i \times [0, 1]$ liegt, worüber E trivial ist.

* Sei $x \in \pi^{-1}(Z)$. Da $Z^z \subseteq M^m$ eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq Z$ von $\pi(x) = y$ und eine Funktion $g: V \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^{\ell=m-z}$ mit 0 als regulären Wert, so dass $g^{-1}(0) = U$ ist. Also insbesondere $d_y g$ surjektiv. Dann ist $\pi^{-1}(Z)$ in einer Umgebung von x gleich $(g \circ \pi)^{-1}(0)$. Wegen $d_x(g \circ \pi) = d_y g \circ d_x \pi$ ist $d_x(g \circ \pi): T_x \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ genau dann surjektiv und damit 0 regulärer Wert von $g \circ \pi$ und damit $\pi^{-1}(Z)$ in einer Umgebung von x eine Mannigfaltigkeit, falls $d_y g$ das Bild von $d_x \pi$ surjektiv auf \mathbb{R}^ℓ abbildet. Da π allerdings eine Submersion ist, ist $d_x \pi$ surjektiv und damit auch $d_x(g \circ \pi)$. (Ganz analog kann man so allgemeiner für eine Abbildung $f: E \rightarrow M$ ein Kriterium finden, wann $f^{-1}(Z) \subseteq E$ Untermannigfaltigkeit ist - Stichwort: Transversalität.)

[†] Unsere Mannigfaltigkeiten haben immer eine abzählbare Basis. Daraus folgt insbesondere, dass sie Lindelöf-Räume sind, d.h. dass jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt.



(iv) $h = h_1 h_2 \dots$ gibt dann eine wohldefinierte Abbildung von $E_0 = E|_{M \times \{0\}}$ zu $E_1 = E|_{M \times \{1\}}$, die ein Bündelisomorphismus ist. \square

Folgerung I.1.13. Sei $E_i \rightarrow M$, $i = 0, 1$, Faserbündel mit Fasertyp F , lokalen Trivialisierungen φ_α^i und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$. Für alle α, β seien die $\mu_{\alpha\beta}^0$ und $\mu_{\alpha\beta}^1$ homotope Abbildungen mit Homotopie $\mu_{\alpha\beta}^t$, so dass zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind E_0 und E_1 isomorph.

Beweis. Seien $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: (U_\alpha \times [0, 1]) \cap (U_\beta \times [0, 1]) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(F)$ die Homotopien. Diese erfüllen nach Voraussetzungen die Kozykelbedingung und damit nach Satz I.1.8 ein Faserbündel $\tilde{E} \rightarrow M \times [0, 1]$ definieren. Nach Konstruktion ist $E_i \cong \tilde{E}|_{M \times \{i\}}$ und damit nach letztem Satz isomorph. \square

Beispiel I.1.14. Man kann jedes Faserbündel über $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit Fasertyp \mathbb{R} über $U_\pm = \{(x, y) \in S^1 \mid \pm(y \pm \frac{1}{2}) > 0\}$ lokal trivialisieren, nach Bemerkung I.1.10. Sei $V_+ \sqcup V_- := U_+ \cap U_-$. Mit letzter Folgerung kann man zeigen, dass die lokalen Trivialisierungen so gewählt werden können, dass die Übergangsfunktionen lokal konstant ± 1 sind. Daraus folgt, dass jedes solche Faserbündel entweder trivial oder zum Möbiusband isomorph ist.

I.1.2.2. Bündel-Trivialisierungslemma

Im Allgemeinen, also im Gegensatz zur Einschränkung oben, ist es nicht so einfach zu zeigen, dass etwas ein Faserbündel ist. Für die folgenden Konstruktionen wir uns folgender Satz helfen:

Satz I.1.15 (Bündel-Trivialisierungslemma). Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung. Sei F und M Mannigfaltigkeiten und seien alle $\pi^{-1}(x)$ Mannigfaltigkeiten. Sei eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M zusammen mit bijektiven Abbildung $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ gegeben. Es gelte

- (i) $\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$ ist für alle $x \in U_\alpha$ glatt.
- (ii) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ hat die Form $(x, v) \mapsto (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(v))$ für glatte Abbildungen $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$.*

Erfüllen diese $\mu_{\alpha\beta}$ die Kozykelbedingung, dann trägt E eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass $\pi: E \rightarrow M$ Faserbündel mit Fasertyp F und lokalen Trivialisierungen φ_α ist.

Beweis. Sei $p \in M$. Wir wählen α mit $p \in U_\alpha$. Sei $\kappa_p: V_p \subseteq M \rightarrow \hat{V}_p \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um p . O.B.d.A. sei diese klein genug, dass $V_p \subseteq U_\alpha$ gilt. Wir setzen

$$\tilde{\kappa}_p: \pi^{-1}(V_p) \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_p \times F \xrightarrow{\kappa_p \times \text{id}_F} \hat{V}_p \times F.$$

Seien $\{\varkappa_\beta: \tilde{U}_\beta \subseteq F \rightarrow \hat{U}_\beta \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\beta \in J}$ Karten, die F überdecken ($\dim F = n$). Wir setzen

$$\hat{\kappa}_{p,\beta} := (\text{id}_{\hat{V}_p} \times \varkappa_\beta) \circ \tilde{\kappa}_p|_{(\tilde{\kappa}_p)^{-1}(\hat{V}_p \times \tilde{U}_\beta)}: (\tilde{\kappa}_p)^{-1}(\hat{V}_p \times \tilde{U}_\beta) \subseteq \pi^{-1}(V_p) \subseteq E \rightarrow \hat{V}_p \times \hat{U}_\beta \subseteq \mathbb{R}^{m+n}.$$

Man überprüft direkt

1. $\{\hat{\kappa}_{p,\beta} \mid p \in M, \beta \in J\}$ ist ein glatter Atlas für E und damit hat E die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit.
2. Mit der obigen Mannigfaltigkeitsstruktur auf E sind die Abbildungen φ_α Diffeomorphismen und π ist glatt.

*Damit sind insbesondere auch die $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ glatt.

3. Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E mit den geforderten Eigenschaften. \square

Mit diesem Satz können wir nun zeigen, dass die folgenden Konstruktionen wieder Faserbündel liefern. Bei all diesen Konstruktionen werden auch Isomorphieklassen respektiert, was wir nicht immer dazu sagen werden, aber direkt klar durch die Konstruktionen ist.

Vorl. 3

I.1.2.3. Produkt zweier Faserbündel

$\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M'$ mit Fasertyp F bzw. F' . Dann ist

$$(\pi, \pi'): E \times E' \rightarrow M \times M', \quad (e, e') \mapsto (\pi(e), \pi'(e'))$$

ist ein Faserbündel über $M \times M'$ mit Fasertyp $F \times F'$.

Beweis. Seien φ_α bzw. $\varphi'_{\alpha'}$ lokale Trivialisierungen von E bzw. E' zu einer offenen Überdeckung U_α von M bzw. $U'_{\alpha'}$ von M' . Die zugehörigen Übergangsfunktionen nennen wir $\mu_{\alpha\beta}$ und $\mu'_{\alpha'\beta'}$. Dann ist $\{U_\alpha \times U'_{\alpha'}\}_{(\alpha, \alpha')}$ eine offene Überdeckung von $M \times M'$. Wir setzen $\tilde{\varphi}_{(\alpha, \alpha')} : (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha \times U'_{\alpha'}) \rightarrow U_\alpha \times F \times U'_{\alpha'} \times F' \cong U_\alpha \times U'_{\alpha'} \times F \times F'$, $(e, e') \mapsto (\varphi_\alpha(e), \varphi'_{\alpha'}(e'))$. Dann ist $\tilde{\varphi}_{(\alpha, \alpha')} \circ (\tilde{\varphi}_{(\beta, \beta')})^{-1}(x, y, v, w) = (x, y, \mu_{\alpha\beta}(v), \mu'_{\beta'\alpha'}(w))$. Die Voraussetzungen von Satz I.1.15 sind alle erfüllt und damit folgt, dass $E \times E'$ wieder ein Faserbündel ist. \square

I.1.2.4. Summe zweier Faserbündel

$\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M$ über der gleichen Basis und mit Fasertyp F bzw. F' . Dann ist

$$\tilde{\pi}: E \oplus E' := \{(e, e') \in E \times E' \mid \pi(e) = \pi'(e')\} \rightarrow M$$

ist ein Faserbündel mit Fasertyp $F \times F'$.

Beweis. Es ist $\tilde{\pi}^{-1}(x) = E_x \times E'_x$. Seien φ_α bzw. φ'_α lokale Trivialisierungen von E bzw. E' zu einer offenen Überdeckung U_α von M . Sei $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow F$ definiert durch $\varphi_\alpha(e_x) = (x, \psi_\alpha(e_x))$ und analog ψ'_α . Wir setzen $\tilde{\varphi}_\alpha: (\pi, \pi')^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \times F'$, $(e_x, e'_x) \mapsto (x, \psi_\alpha(e_x), \psi'_\alpha(e'_x))$ und können dann wieder Satz I.1.15 anwenden. \square

I.1.2.5. Unterbündel

Sei $\pi: E' \rightarrow M$ ein Faserbündel mit typischer Faser F . Sei $E \subseteq E'$ eine Teilmenge, so dass $\pi|_E: E \rightarrow M$ wieder ein Faserbündel ist, dann nennen wir E ein *Unterbündel* von E' .

Beispiel I.1.16. Das kanonische Geradenbündel τ über $\mathbb{K}P^n$ ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{K}P^n$.

I.1.2.6. Pullbackbündel

Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F und $f: M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann ist das *Pullbackbündel* definiert durch $f^*E := \{(x, e) \in M' \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$ mit $\pi': f^*E \rightarrow M'$, $(x, e) \mapsto x$, ein Faserbündel über M' mit Fasertyp F :

Beweis. Seien $\mu_{\alpha\beta}$ die Übergangsfunktionen von E zur offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M . Dann ist $U'_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ eine offene Überdeckung von M' . Es gilt $f \circ \pi' = \pi \circ \text{pr}_2$ und damit $(\pi')^{-1}(U'_\alpha) = (\pi')^{-1} \circ f^{-1}(U_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha)$. Wir setzen $\varphi'_\alpha := (\pi', \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \text{pr}_2): (\pi')^{-1}(U'_\alpha) = \text{pr}_2^{-1} \circ \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U'_\alpha \times F$. Dann ist $\varphi'_\beta \circ (\varphi'_\alpha)^{-1} = \text{id} \times (\mu'_{\alpha\beta} := \mu_{\alpha\beta} \circ f)$, denn für $(x, e) \in (\pi')^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ (und damit insbesondere $f(x) = \pi(e)$) gilt

$$\begin{aligned} \varphi'_\beta \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}(x, v) & \stackrel{(x, v) = \varphi'_\alpha(x, e) = (x, \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(e))}{=} \varphi'_\beta(x, e) = (x, \text{pr}_2 \circ \varphi_\beta(e)) \\ & = (x, \text{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha(e)) \\ & = (x, \text{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\pi(e) = f(x), v)) \\ & = (x, \text{pr}_2 \circ (f(x), \mu_{\alpha\beta}(f(x))v) = (x, \mu_{\alpha\beta}(f(x))v). \end{aligned}$$

I. Bündeltheorie

Die $\mu'_{\alpha\beta}$ erfüllen die Kozykelbedingung und $(\pi')^{-1}(x) = E_x$. Mit Satz I.1.15 folgt, dass f^*E ein Faserbündel ist. \square

Insbesondere definiert

$$\begin{array}{ccc} (x, e) \in f^*E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & e \in E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in M' & \xrightarrow{f} & f(x) \in M \end{array}$$

einen Bündelmorphismus, der für alle $x \in M$ die Faser $(f^*E)_x$ diffeomorph auf $E_{f(x)}$ abbildet.

Lemma I.1.17. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel und $f: M' \rightarrow M$. Dann ist f^*E das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Faserbündel, für welches es einen Bündelmorphismus $g: f^*E \rightarrow E$ über $f: M' \rightarrow M$ gibt, so dass $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$ für alle $x \in M'$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Sei $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M'$ ein Faserbündel vom Fasertyp F und $g: \tilde{E} \rightarrow E$ ein Bündelmorphismus wie oben gefordert. Dann ist $G: \tilde{E} \rightarrow f^*E$, $e' \mapsto (\tilde{\pi}(e'), g(e'))$, ein Bündelmorphismus und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} e' \in \tilde{E} & \xrightarrow{G} & (\tilde{\pi}(e'), g(e')) \in f^*E & \quad (\text{da } g \text{ Bündelmorph über } f \text{ und damit } f(\tilde{\pi}(e')) = \pi(g(e'))) \\ \downarrow g & \swarrow \text{pr}_2 & & \\ g(e') \in E & & & \end{array}$$

kommutiert faserweise. Insbesondere ist damit G auf jeder Faser ein Diffeomorphismus und damit ist das Bündel \tilde{E} isomorph zu f^*E . \square

Lemma I.1.18. Seien E, E_i Faserbündel über M und $f: M' \rightarrow M$, $f': M'' \rightarrow M'$ glatt. Dann haben wir folgende Bündelisomorphismen:

- (i) $(f')^*f^*E \cong (f \circ f')^*E$
- (ii) $\text{id}^*E \cong E$
- (iii) $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$
- (iv) Ist $\iota: N \hookrightarrow M$ eine Einbettung, dann ist $\iota^*E \cong E|_N$.

Beweis. Direkt klar auf dem Level der Übergangsfunktionen. \square

Beispiel I.1.19. (i) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel und $f: M' \rightarrow M$. Besteht das Bild von f nur aus einem Punkt $y \in M$. Dann ist f^*E isomorph zum trivialen Bündel $M' \times \pi^{-1}(y)$.

(ii) Sei $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Quotientenabbildung. Dann ist $q^*T\mathbb{R}P^n = TS^n$, vgl. Übungsaufgabe 7.

(iii) Sei $\pi: E \rightarrow S^1$ das Möbiusband und $f: z \in S^1 \rightarrow z^2 \in S^1$. Dann ist f^*E das triviale Bündel, vgl. Übungsaufgabe 5.

Satz I.1.20. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel. Sei $f: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Setze $f_t := f(t, \cdot)$. Also ist f_0 glatt homotop zu f_1 . Dann gilt $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$.

Beweis. Es gilt $f^*(E)|_{\{i\} \times M'} \cong f_i^*(E)$. Damit folgt der Rest aus Satz I.1.12. \square

Folgerung I.1.21. Sei $f: M \rightarrow M'$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $f^*: \text{Bun}_F(M') \rightarrow \text{Bun}_F(M)$ eine Bijektion. Insbesondere ist jedes Faserbündel über einer zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit trivial.

Beweis. Da f Homotopieäquivalenz ist, gibt es $g: M' \rightarrow M$, so dass $f \circ g$ homotop zu $\text{id}_{M'}$ und $g \circ f$ homotop zu id_M ist. Damit ist nach letztem Satz $g^*f^*E \cong E$ und $f^*g^*E' \cong E'$ und somit $g^*: \text{Bun}_F(M) \rightarrow \text{Bun}_F(M')$, die zu f^* von oben inverse Abbildung. \square

I.1.2.7. Weitere Beispiele

Grassmannbündel Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein (reelles oder komplexes) Vektorbündel vom Rang r und sei $d \leq r$.

Vorl. 4

$$\text{Gr}_d(E_x) := \{d - \text{dim. Untervektorräume von } E_x\} \text{ und } \text{Gr}_d(E) := \sqcup_{x \in M} \text{Gr}_d(E_x)$$

Für jedes $x \in M$ ist $\text{Gr}_d(E_x)$ ist diffeomorph zu $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^r)$ und eine kompakte Mannigfaltigkeit, siehe Beispiel A.2.8.ii. Sei $\hat{\pi}: \text{Gr}_d(E) \rightarrow M$ so dass $\hat{\pi}^{-1}(x) = \text{Gr}_d(E_x)$. Dann ist $\hat{\pi}$ ein Faserbündel mit Fasertyp $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^r)$.

I.2. Vektorbündel

Wir haben in Abschnitt I.1 als Spezialfall von Faserbündeln schon Vektorbündel definiert, siehe Definition I.1.5. Hier wollen wir nun mehr Eigenschaften von solch speziellen Faserbündeln diskutieren.

Im Folgenden sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vom Rang r , $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und φ_α lokale Trivialisierungen von E .

I.2.1. Schnitte

Die Menge der glatten Schnitte von E ,

$$\Gamma(E) := \{s \in C^\infty(M, E) \mid \pi \circ s = \text{id}_M\},$$

ist im Gegensatz zum allgemeinen Faserbündel nie leer, da E auf jeder Faser eine Vektorraumstruktur trägt:

Sei ρ_α eine zu $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Seien $c_\alpha \in \mathbb{R}^r$. Wir setzen $s(x) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x) \varphi_\alpha^{-1}(x, c_\alpha)$. Dann ist $s: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}$. Da die ρ_α und φ_α glatt sind, ist auch s glatt.

Bemerkung I.2.1. $\Gamma(E)$ ist ein $C^\infty(M)$ -Modul und damit insbesondere ein \mathbb{K} -Vektorraum (mit $(fs + s')(p) := f(p)s(p) + s'(p)$ für $s, s' \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{K})$). Da Vektorbündel lokal trivial sind, ist $\Gamma(E)$ lokal frei erzeugt: Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so dass $E|_U$ lokal trivial ist, also $\varphi_U: E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$. Dann erzeugen z.B. $s_i(x) := \varphi_U^{-1}(x, e_i)$ für e_i eine Basis von \mathbb{R}^r frei den Modul $\Gamma(E|_U)$ (Erzeugen heißt, dass es für jeden Schnitt $s \in \Gamma(E|_U)$ Funktionen $a^i \in C^\infty(U)$ mit $s(x) = \sum a^i(x) s_i(x)$ für alle $x \in U$ gibt. Frei erzeugen heißt, dass diese a^i eindeutig bestimmt sind - und damit insbesondere $s_i(x)$ eine Basis von E_x ist). Eine Menge von s_i , die $\Gamma(E|_U)$ frei erzeugen und für die die $s_i(x)$ für alle $x \in U$ eine Basis von E_x sind, nennen wir *lokalen Rahmen*.

Ist M kompakt, dann ist $\Gamma(E)$ damit auch endlich erzeugt*, da E dann mittels endlich vieler lokaler Trivialisierungen überdeckt werden kann. Aber i.A. ist $\Gamma(E)$ nicht frei erzeugt, vgl. Satz I.2.21.

Lemma I.2.2. *Ein \mathbb{K} -Vektorbündel ist genau dann trivial (d.h. isomorph zu $M \times \mathbb{K}^r \rightarrow M$ für ein $r > 0$), wenn es r Schnitte s_1, \dots, s_r gibt, so dass $s_1(x), \dots, s_r(x)$ für jedes $x \in M$ linear unabhängige Vektoren in E_x sind.*

Beweis. Habe E solche Schnitte s_i . Dann definieren wir die Abbildung $h: M \times \mathbb{K}^r \rightarrow E$ durch $(x, t^1, \dots, t^r) \mapsto \sum t^i s_i(x)$. Das ist ein linearer Isomorphismus in jeder Faser und stetig. Nach folgendem Lemma ist auch h^{-1} stetig und damit h ein Vektorbündelisomorphismus. □

Lemma I.2.3. *Eine glatte Abbildung $f: E \rightarrow E'$ zwischen zwei \mathbb{K} -Vektorbündeln $\pi: E \rightarrow M$ bzw. $\pi': E' \rightarrow M$, welche für jedes $x \in M$ die Faser $\pi^{-1}(x)$ linear isomorph auf $(\pi')^{-1}(x)$ abbildet, ist ein Vektorbündelisomorphismus.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt direkt, dass f bijektiv ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass auch f^{-1} glatt ist. Da das eine lokale Aussage ist, reicht es, offene Teilmengen $U \subseteq M$ zu betrachten, über die E und E' trivial sind. damit ergibt sich die Abbildung $f: U \times \mathbb{K}^r \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$, $(u, v) \mapsto (u, g(u)(v))$ für ein $g \in C^\infty(U, \text{GL}_r(\mathbb{K}))$. Dann ist auch $g^{-1}: u \in U \mapsto (g(u))^{-1} \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ glatt und damit auch die Inverse $h^{-1}(u, v) = (u, g(u)^{-1}(v))$. □

*Ein R -Modul P ist endlich erzeugt, wenn es $a_1, \dots, a_n \in R$ gibt mit $P = \{r^i a_i \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$.

Beispiel I.2.4. Im Möbiusband hat jeder Schnitt mindestens eine Nullstelle. Es ist nach letztem Lemma, damit nicht auch als Vektorbündel nicht trivial.

I.2.2. Konstruktion von Vektorbündeln

Da Vektorbündel ein Spezialfall von Faserbündeln sind, liegt es nahe mal zu überprüfen, welche der Konstruktionen von Faserbündel aus Abschnitt I.1.1 und I.1.2 auch Vektorbündel liefern. D.h. muss man Zusatzforderungen stellen (und wenn ja welche sind sinnvoll?), damit die resultierenden Faserbündel wieder Vektorbündel sind:

Das erste, was wir bemerken, ist: Im Falle eines (reellen) Vektorbündels von Rang r sind die $\mu_{\alpha\beta}$ glatte Abbildungen von $U_\alpha \cap U_\beta$ in $GL_r(\mathbb{R})$.

Wir erhalten folgende angepassten Sätze – die Änderungen sind in **dunkelrot** gekennzeichnet. Wir beschränken uns hier auf reelle Vektorbündel, die Aussagen für komplexe Vektorbündel gelten ganz analog.

Satz I.2.5. (Vektorbündelversion von Satz I.1.8) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen, dann gibt es (bis auf Isomorphie (hier jetzt immer Isomorphie von Vektorbündeln)) ein eindeutiges **reelles Vektorbündel**, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

Folgerung I.2.6. Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp $F = \mathbb{R}^r$. Ist das Bild der Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ (zu einer Überdeckung durch lokale Trivialisierungen) eine Teilmenge von $GL_r(\mathbb{R}) \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^r)$. Dann ist E ein reelles Vektorbündel vom Rang r .

Satz I.2.7. (Vektorbündelversion von Satz I.1.9) Gegeben zwei **reelle Vektorbündel** E, E' über M vom Rang r . Zu einer gegebenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die Vektorbündel genau dann isomorph, falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, GL_r(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\alpha = h_\beta \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Insbesondere ist das Vektorbündel E trivial, wenn $\mu_{\alpha\beta} = h_\beta h_\alpha^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Bemerkung I.2.8. Die Kategorie $\text{Vec}_{\mathbb{K}}(M)$ habe als Objekte Isomorphieklassen von \mathbb{K} -Vektorbündel über M und als Morphismen Vektorbündelhomomorphismen. Analog erhält man die Kategorie $\text{Vec}_{\mathbb{K}}^r(M)$ der \mathbb{K} -Vektorbündel über M vom Rang r .

I.2.2.1. Operationen auf Vektorbündel

Satz I.2.9 (Bündel-Trivialisierungslemma – Vektorbündelversion von Satz I.1.15). Sei $\pi: E \rightarrow M$ eine surjektive Abbildung. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\pi^{-1}(x)$ ein **r -dimensionaler reeller Vektorraum** für alle $x \in M$. Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M gegeben zusammen mit bijektiven Abbildung $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, so dass gilt:

- (i) $\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$ ist für alle $x \in U_\alpha$ ein **Vektorraumisomorphismus**.
- (ii) $\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$ hat die Form $(x, v) \mapsto (x, \mu_{\alpha\beta}(v))$ für glatte Abbildungen $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$.

Erfüllen diese $\mu_{\alpha\beta}$ die Kozykelbedingung, dann trägt E eine eindeutige topologische und glatte Struktur als Mannigfaltigkeit, so dass $\pi: E \rightarrow M$ **reelles Vektorbündel vom Rang r** und lokalen Trivialisierungen φ_α ist.

Die Operationen auf Faserbündel aus Abschnitt I.1.2 auf Vektorbündel angewendet, geben auch wieder ein Vektorbündel aus. Nur fürs Untervektorbündel muss man natürlich zusätzlich fordern, dass $\pi|_E$ selbst ein Vektorbündel ist.

Beispiel I.2.10. Sei $\psi: E \rightarrow E'$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen $\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M'$, über $f: M \rightarrow M'$, so dass $\psi|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$ mit $f \circ \pi = \pi' \circ \psi$ für alle $x \in M$ den gleichen Rang hat. Dann ist $\ker \psi$ ein Untervektorbündel von E , vgl. Übungsaufgabe 7. Gleiches gilt dann auch für $\text{im} \psi$. Ohne die konstante Rang Bedingung ist das falsch: Seien $E = E'$ das triviale Geradenbündel über $M = \mathbb{R}$ und sei $f(x) = x^2$. Wir setzen $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x \in M, y \in \mathbb{R}) \mapsto (x, f(y))$.

Sehr oft wird davon insbesondere die direkte Summe $E \oplus E'$ zweier Vektorbündel E, E' über M (Im Kontext von Vektorbündeln auch *Whitney-Summe* genannt.) verwendet. Hier gilt

$$\Gamma(E \oplus E') \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(E'),$$

wobei \cong hier isomorph als $C^\infty(M)$ -Modul bedeutet.

Für den Pullback von Vektorbündel gilt folgende Version von Lemma I.1.17.

Lemma I.2.11. *Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und $f: M' \rightarrow M$. Dann ist f^*E das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Vektorbündel, für welches es einen Bündelmorphismus $g: f^*E \rightarrow E$ gibt, so dass $g|_{(f^*E)_x}: (f^*E)_x \rightarrow E_{f(x)}$ für alle $x \in M'$ ein Vektorraumisomorphismus ist.*

Zusätzlich sind die Bündelmorphismen in Lemma I.1.18 für Vektorbündel schon Vektorbündelisomorphismen. Außerdem gibt es für Vektorbündel noch folgende Operationen:

I.2.2.2. Duales Vektorbündel

Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über \mathbb{K} vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen φ_α und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$.

Sei $E^* := \bigsqcup_{x \in M} E_x^*$, wobei E_x^* das Dual des Vektorraums $E_x = \pi^{-1}(x)$ ist. Wir definieren $\pi': E^* \rightarrow M$ durch $\pi'(L_x \in E_x^*) \mapsto x$.

Die Topologie und glatte Struktur auf E^* wird durch

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha: (\pi')^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x^* \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r)^* \\ L_x \in E_x^* &\mapsto (\pi'(L_x) = x, (v \in \mathbb{K}^r \mapsto L_x(\varphi_\alpha^{-1}(x, v))) \end{aligned}$$

bestimmt. Das resultierende Bündel E^* nennen wir zu E *duales Bündel*. Die zugehörigen Übergangsfunktionen $\mu'_{\alpha\beta}$ sind durch $\mu'_{\alpha\beta} = (\mu_{\beta\alpha})^*$ gegeben, wobei $*$ die duale Abbildung meint, also $\mu'_{\alpha\beta}(x)(f \in (\mathbb{K}^r)^*)(v \in \mathbb{K}^r) = (\mu_{\beta\alpha}(x))^* f(v) = f(\mu_{\beta\alpha}(x)(v))$, vgl. Übungsaufgabe 9, und es gilt $\Gamma(E^*) \cong (\Gamma(E))^*$.

Beispiel I.2.12. Kotangententialbündel $T^*M := (TM)^*$, vgl. Tabelle I.1: Ein Element $\alpha \in \Gamma(T^*M) =: \Omega^1(M)$, genannt *1-Formen* ist eine glatte Abbildung mit $\alpha(x) \in T_x^*M := (T_x M)^*$. In lokalen Koordinaten x^i auf U hat TM die lokale Basis $\partial_{x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i}$. Man definiert $dx^i: TU \rightarrow \mathbb{R}$ durch $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$ und $C^\infty(U)$ -lineare Fortsetzung. Dann hat α die lokale Darstellung $\alpha_i dx^i$ für $\alpha_i \in C^\infty(U)$.

I.2.2.3. Tensorprodukt von Vektorbündeln (= Whitney-Produkt)

Seien $\pi: E \rightarrow M$ bzw. $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$ Vektorbündel über \mathbb{K} vom Rang r bzw. \tilde{r} . Seien φ_α bzw. $\tilde{\varphi}_\alpha$ lokale Trivialisierungen von E bzw. \tilde{E} bzgl. einer offenen Überdeckung U_α von M . Die zugehörigen Übergangsfunktionen nennen wir $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}$.

Wir setzen $E \otimes \tilde{E} := E \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E} := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x$ und $\pi^\otimes: e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \mapsto x \in M$.

Die Topologie und glatte Struktur auf $E \otimes \tilde{E}$ wird durch

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^\otimes: (\pi^\otimes)^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{K}^r \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\tilde{r}} \cong \mathbb{K}^{r\tilde{r}}) \\ e_x \otimes \tilde{e}_x \in E_x \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_x &\mapsto (x, \psi_\alpha(e_x) \otimes \tilde{\psi}_\alpha(\tilde{e}_x)) \end{aligned}$$

bestimmt mit $\tilde{\varphi}_\alpha^\otimes(e \in E_x) = (x, \psi_\alpha(e))$. Die neuen Übergangsfunktionen sind einfach das Tensorprodukt der alten. Das resultierende Bündel $E \otimes \tilde{E}$ nennen wir das *Tensorprodukt* beider Bündel. Es gilt $\Gamma(E \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}) \cong \Gamma(E) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{K})} \Gamma(\tilde{E})$.

Auf jeder Faser nehmen wir das 'normale' Tensorprodukt aus der linearen Algebra: Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis e_i . Dann ist $T_r^s(V)$ ein Vektorraum mit der abstrakten Basis $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes (e^{j_1})^ \otimes \dots \otimes (e^{j_s})^*$ für alle i_k, j_ℓ und $(e^i)^*$ die duale Basis zu e_i . Weiterhin hat man eine Multiplikation $\otimes: T_r^s(V) \times T_{\tilde{r}}^{\tilde{s}}(V) \rightarrow T_{r+\tilde{r}}^{s+\tilde{s}}(V)$, die linear in beiden Komponenten ist. Damit ist insbesondere $(v^i e_i) \otimes (w^j e_j) = v^i w^j e_i \otimes e_j$. Außerdem kann man $f \in T_r^s(V)$ als multilineare Abbildung $f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}}$ verstehen: $f = f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes (e^{j_1})^* \otimes \dots \otimes (e^{j_s})^*: (e_{k_1}, \dots, e_{k_s}) \mapsto f_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$.

Bemerkung I.2.13. Ist s_α bzw. s'_α ein lokaler Rahmen von E bzw. E' über U_α , dann ist $s_\alpha \otimes s'_\alpha$ ein lokaler Rahmen von $E \otimes E'$. Für $T_r^s M := \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{s\text{-mal}}$ – dem (r, s) -Tensorbündel

von M – ist damit $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$ für $1 \leq i_k, j_\ell \leq m$ ein lokaler Rahmen. So ist z.B. $s \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ in lokalen Koordinaten x^i über U gegeben durch $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j$ für $a_j^i \in C^\infty(U)$ und kann wegen $a_j^i \partial_{x^i} \otimes dx^j = (a_j^i \partial_{x^i}) \otimes dx^j = \partial_{x^i} \otimes (a_j^i dx^j)$ auch als Schnitt in $\Gamma(TM) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma^*(TM)$ angesehen werden.

Beispiel I.2.14. Eine (semi-)Riemannsche Metrik g auf M ist in allen Punkten bilinear und damit ist $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \cong \Gamma(T^*M) \otimes_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \Gamma(T^*M)$.

Bemerkung I.2.15. Der Pullback aus Abschnitt I.1.2.6 erfüllt für Vektorbündel noch zusätzlich $f^*(E_1 \otimes E_2) = f^*E_1 \otimes f^*E_2$. Das sieht man wieder direkt auf dem Level der Übergangsfunktionen.

1.2.2.4. Homomorphismenbündel

Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Tensorproduktabschnitt von oben, setzen wir

$$\text{Hom}(E, \tilde{E}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \text{ und } \hat{\pi}: L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) \mapsto x \in M.$$

Die Topologie und glatte Struktur auf $\text{Hom}(E, \tilde{E})$ wird durch

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\alpha: \hat{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \\ L_x \in \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x) &\mapsto (x, \Psi) \end{aligned}$$

mit $\Psi(v \in \mathbb{K}^r) := (\tilde{\psi}_\alpha \circ L_x \circ \psi_\alpha^{-1})(v)$ bestimmt. Es ist $\text{Hom}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^{\tilde{r}}) \cong (\mathbb{K}^*)^r \otimes \mathbb{K}^{\tilde{r}}$. Die Übergangsfunktionen sind $\mu_{\beta\alpha}^* \otimes \tilde{\mu}_{\alpha\beta}$, wobei wir die letzte Isomorphie genutzt haben. Das resultierende Bündel $\text{Hom}(E, \tilde{E})$ nennen wir das *Homomorphismenbündel* beider Bündel. Es ist $\text{Hom}(E, \tilde{E}) \cong E^* \otimes \tilde{E}$.

Ist $E = \tilde{E}$, setzen wir $\text{End}(E) := \text{Hom}(E, \tilde{E})$ und nennen es das *Endomorphismenbündel* von E .

Beispiel I.2.16. Krümmungstensor $R \in \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM \otimes TM \otimes TM, TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$

1.2.2.5. Äußeres Produkt

Vorl. 5 Ein bisschen multilineare Algebra. Sei V ein r -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Es bezeichne $\Lambda^k(V^*)$ die Menge der Abbildungen

$$\alpha: V^k := \underbrace{V \times \dots \times V}_{=k} \rightarrow \mathbb{K},$$

die multilinear und *alternierend*, d.h. $\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}) = 0$ für alle $v_1, \dots, v_{k-1} \in V$ ist. Mit der Addition von Abbildungen und der skalaren Multiplikation $(\lambda\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \lambda\alpha(v_1, \dots, v_k)$ bildet $\Lambda^k(V^*)$ einen \mathbb{K} -Vektorraum.

Sei e_i eine Basis von V und e_i^* die zugehörige kanonische Basis von V^* . Wir definieren $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \det(\delta_{i_r j_s})_{rs}$. Wegen der Eigenschaften der Determinante haben wir so ein wohldefiniertes Element $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V^*)$. Dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r\}$$

eine Basis von $\Lambda^k(V^*)$, der damit ein $\binom{r}{k}$ -dimensionaler Vektorraum ist.

Für $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$ setzt sich obige Definition von $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ zum *äußeren Produkt* $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$ fort und es gilt

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}),$$

wobei $S_{k+\ell}$ die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, k+\ell\}$ ist.

Beispiel I.2.17. Sei $V = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Das Element $e_1^* \wedge e_2^* \in \Lambda V^*$ erfüllt $e_1^* \wedge e_2^*(e_1, e_1) = e_1^* \wedge e_2^*(e_2, e_2) = 0$ und $e_1^* \wedge e_2^*(e_1, e_2) = -e_1^* \wedge e_2^*(e_2, e_1) = e_1^*(e_1)e_2^*(e_2) - e_1^*(e_2)e_2^*(e_1) = 1$.

Mit dem äußeren Produkt als Multiplikation wird $\Lambda(V^*) := \bigoplus_k \Lambda^k(V^*)$ eine assoziative und *graduier-kommutative* Algebra, wobei graduier-kommutativ heißt, das $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$ für alle $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ und $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$ gilt. Die Dimension von $\Lambda(V^*)$ ist 2^r .

Analog kann man $\Lambda^k(V)$ als Vektorraum mit der Basis $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r\}$ verstehen. Es ist $\Lambda^0(V) = \mathbb{K}$ und $\Lambda^1(V) = V$. Weiterhin ist $\Lambda^r(V)$ auch eindimensional: Ist e_i eine Basis von V , dann ist $\Lambda^r V = \{ae_1 \wedge \dots \wedge e_r \mid a \in \mathbb{K}\}$.

Auf dem Level von Vektorbündeln. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r , lokalen Trivialisierungen φ_α und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$. Wir setzen

$$\Lambda^k(E) := \sqcup_{x \in M} \Lambda^k(E_x) \text{ und definieren } \hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M \text{ durch } \pi^{-1}(x) = \Lambda^k(E_x).$$

Ist e_i eine Basis von \mathbb{K}^r . Dann ist $s_{\alpha,i}(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_i)$ ein lokaler Rahmen von E . Wir setzen

$$\Lambda^k \varphi_\alpha: a_{i_1 < \dots < i_k} s_{\alpha, i_1}(x) \wedge \dots \wedge s_{\alpha, i_k}(x) \in \Lambda^k(E_x) \subseteq \Lambda^k(E) \Big|_{U_\alpha} \mapsto a_{i_1 < \dots < i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

Das gibt eine wohl-definierte Abbildung $\Lambda^k(E) \Big|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \Lambda^k(\mathbb{K}^r)$, die faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist. Weiterhin sind die Übergangsfunktionen durch $\Lambda^k \mu_{\alpha\beta}$ gegeben. Damit ist nach Satz I.1.15 $\hat{\pi}: \Lambda^k(E) \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang $\binom{r}{k}$.

Wir setzen $\Lambda^0(E) := M \times \mathbb{K}$ das triviale Vektorbündel über M vom Rang 1.

Für $k > 0$ ist $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k(E^*))$ eine Abbildung mit $\alpha(x \in M) \in \Lambda^k(E_x^*)$, also $\alpha(x): E_x \times \dots \times E_x \rightarrow \mathbb{K}$ ist multilinear und alternierend, und die Abhängigkeit von x ist glatt, d.h. man kann α auch als Abbildung $\alpha: \Gamma(E)^k = \Gamma(E) \times \dots \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$, die multilinear (bzgl. der $C^\infty(M)$ -Modul Struktur von $\Gamma(E)$, also $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten) und alternierend sind, auffassen. Weiterhin ist $\Gamma(\Lambda^0 E) = C^\infty(M)$ und wir setzen $\Gamma(\Lambda^* E) = \bigoplus_{k=0}^\infty \Gamma(\Lambda^k E)$.

Beispiel I.2.18. (i) Im Spezialfall $E = T^*M$ kürzt man ab: $\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M)$ und $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k M)$. Elemente aus $\Omega^k(M)$ heißen *k-(Differential)Formen*. Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$. Dann ist $\alpha_x := \alpha(x) \in \Lambda^k T_x^* M$. Seien x^i lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$ um x . Dann ist $\partial_{x^i}|_x$ eine Basis von $T_x M$ und $dx^i|_x$ die zugehörige duale Basis von $T_x^* M$. Damit ist $\alpha(x) = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1}|_x \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x$. Variiert man x , ist ∂_{x^i} ein lokaler Rahmen von $TU = TM|_U$ und dx^i von $T^*U = T^*M|_U$ und damit $\alpha|_U = a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$.

(ii) Das Vektorbündel $\Lambda^m M \rightarrow M$ ($m = \dim M$) ist genau dann trivial, wenn M orientierbar* ist.

Beweis. $\Lambda^m M$ ist ein Vektorbündel von Rang $\binom{m}{m} = 1$. Sei $\Lambda^m M$ das triviale Vektorbündel. Dann gibt es nach Lemma I.2.2 eine m -Form ω , so dass $\Lambda^m(T_p M) \ni \omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ ist. Ein solches ω heißt *Volumenform* von M .[†] Für jedes $p \in M$ wählen wir eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ um p und induzierten lokalen Koordinaten x^i , so dass $\omega|_U = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ und $a \in C^\infty(U, \mathbb{R}_+)$ gilt (Da ω_p nirgends verschwindet, hat das a immer ein definiertes Vorzeichen und Positivität kann, wenn nicht schon gegeben, immer erreicht werden, indem man die Rolle der Koordinaten x^1 und x^2 vertauscht.) Diese Familie von Karten gibt uns einen orientierten Atlas von M , vgl. Übungsaufgabe 10.ii.

Haben wir auf der anderen Seite einen orientierten Atlas $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ mit lokalen Koordinaten x_α^i und sei ρ_α eine untergeordnete Zerlegung der Eins zu $\{U_\alpha\}$. Dann definiert $\sum_\alpha \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$ eine nirgends verschwindene m -Form auf ganz M , vgl. Übungsaufgabe 10.iii. Da $\Lambda^m M \rightarrow M$ Rang 1 hat, muss es ein triviales Vektorbündel sein. \square

(iii) Wir betrachten die faserweise lineare Abbildung $\iota: \Lambda^k E \rightarrow E \otimes \dots \otimes E =: E^{\otimes k}$ gegeben durch $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}$ für $i_1 < \dots < i_k$. Das ist ein wohldefinierter injektiver

* M heißt orientierbar, falls es Karten $\kappa_i: U_i \subseteq M \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ von M gibt, die M überdecken, und für alle i, j und $p \in U_i \cap U_j \subseteq M$ gilt $\det d_{\kappa_i(p)}(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}) > 0$.

[†] Deshalb wird die obige Aussage auch oft formuliert als: M ist genau dann orientierbar, wenn M eine Volumenform besitzt.

Bündelmorphismus. So kann $\Lambda^k E$ als Untervektorbündel von $E^{\otimes k}$ betrachtet werden. Weiterhin ist diese Einbettung kompatibel mit der Paarung für die dualen Bündel: Es ist für $\alpha \in \Lambda^k E_x^*$ und $X_i \in E_x$

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) = \iota(\alpha)(X_1, \dots, X_k)$$

wobei $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(X_1, \dots, X_k) = \sum_j e_{i_j}^*(X_j)$ für eine Basis e_i von E_x gilt.

Beispiel I.2.19. Betrachten wir $\Lambda^k T^*M \otimes E$. Dann ist ein Schnitt eine multilineare alternierende Abbildung $\alpha: TM \times \dots \times TM \rightarrow E$ – genannt eine *k-Form mit Werten in E*. Wir setzen $\Omega^k(M, E) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$. Da $\Lambda^0(T^*M) \cong M \times \mathbb{R}$ und $(M \times \mathbb{R}) \otimes E \cong E$, können wir $\Omega^0(M, E)$ mit $\Gamma(E)$ identifizieren.

1.2.2.6. Konjugiertes Vektorbündel

Ist $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel. Dann ist $\bar{E} := \sqcup_{x \in M} \bar{E}_x \rightarrow M$, $\bar{e} \in \bar{E}_x \mapsto x \in M$ wieder ein komplexes Vektorbündel. Hierbei ist als Menge $E_x = \bar{E}_x$, aber ist $(z, e) \mapsto ze$ die skalare Multiplikation auf E_x , dann ist die auf \bar{E}_x gegeben durch $(z, e) \mapsto \bar{z}e$.

1.2.2.7. Konstruktion von Vektorbündeln über Sphären

Seien U_\pm offene zusammenziehbare Mengen, die S^m überdecken und $U_+ \cap U_- = S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \subseteq S^m$. Eine Funktion $\mu_{+-}: S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{K})$ definiert nach Satz I.2.5 ein \mathbb{K} -Vektorbündel $\pi: E \rightarrow S^m$ (die Kozykelbedingung ist hier automatisch erfüllt, da es nur zwei Karten U_\pm gibt.) Für $f: S^{m-1} \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{K})$ definiert somit $\mu_{+-}(x, t) = f(x)$ ein solches Vektorbündel. Nach der Vektorbündelversion von Folgerung I.1.13 führen homotope f zu isomorphen Vektorbündel und wir haben eine wohldefinierte Abbildung $[S^{m-1}, \text{Gl}_r(\mathbb{K})] \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}^r(S^m)$. Solche Funktionen f werden *Clutching-Funktionen* genannt.

Diese Abbildung ist surjektiv, denn man kann zeigen, ähnlich wie in Beispiel I.1.14/Übungsaufgabe 6, dass die lokalen Trivialisierungen so gewählt werden können, dass die Übergangsfunktionen $\mu_{+-}: (x, t) \in S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{K})$ konstant in t -Richtung sind: Setze $\hat{\mu}_{+-}: (x, t, s) \in S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \mapsto \mu_{\pm}(x, H(t, s)) \in \text{Gl}_r(\mathbb{K})$, wobei $H: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$, $(t, s) \mapsto (1-s)t$, eine Homotopie von $H(\cdot, 0) = \text{id}$ nach $H(\cdot, 1) = 0$ ist. Damit definieren nach Folgerung I.1.13 $\hat{\mu}_{+-}(x, t, 0) = \mu_{+-}(x, t)$ und $\hat{\mu}_{+-}(x, t, 0) = \mu_{+-}(x, 0)$ isomorphe Vektorbündel.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist die Abbildung eine Bijektion: Zur Konstruktion der Inversen $\Psi: \text{Vect}_{\mathbb{C}}^r(S^m) \rightarrow [S^{m-1}, \text{Gl}_r(\mathbb{C})]$ sei $\pi: E \rightarrow S^m$ ein Vektorbündel und D_{\pm}^m die obere bzw. untere Hemisphäre von S^m . Da D_{\pm}^m zusammenziehbar ist, gibt es Trivialisierungen $h_{\pm}: E|_{D_{\pm}^m} \rightarrow D_{\pm}^m \times \mathbb{C}^r$. Wir setzen $\Psi(E) = [h_+ h_-^{-1}: S^{m-1} \times \{0\} \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{C})]$. Für die Wohldefiniertheit seien \tilde{h}_{\pm} andere Trivialisierungen. Diese unterscheiden sich von h_{\pm} durch Abbildungen $H_{\pm}: D_{\pm}^m \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{C})$. Da D_{\pm}^m zusammenziehbar ist, sind die H_{\pm} homotop zu konstanten Abbildungen. Da $\text{Gl}_r(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist, kann diese Konstante gleich der Identitätsmatrix gewählt werden.

Obige Argumentation funktioniert nicht mehr für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, da $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$ nicht wegzusammenhängend ist. Aber $\text{Gl}_r(\mathbb{R})_+ := \{A \in \text{Gl}_r(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ ist wegzusammenhängend. Vektorbündel über S^m vom Rang r , deren Trivialisierungen so gewählt werden können, dass die Übergangsfunktionen Werte in $\text{Gl}_r(\mathbb{R})_+$ annehmen, stehen damit – analog zu oben – in Bijektion zu $[S^{m-1}, \text{Gl}_r(\mathbb{R})_+]$. Solche Vektorbündel nennt man *orientiert*, da dann der Wechsel $\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$ von solchen Trivialisierungen, die Orientierungen auf \mathbb{R}^r erhält.

1.2.3. 'Whitney' für Vektorbündel

Vorl. 6 Satz I.2.20. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit M kompakt. Dann gibt es ein Vektorbündel $\pi': E' \rightarrow M$, so dass $E \oplus E'$ trivial ist.

Beweis. Sei U_{α} , $\alpha = 1, \dots, k$, eine endliche Überdeckung von M , so dass $E|_{U_{\alpha}} \cong U_{\alpha} \times \mathbb{K}^r$ gilt. Sei ρ^{α} eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Seien s_i^{α} ein lokaler Rahmen von $E|_{U_{\alpha}}$. Wir setzen $t_i^{\alpha} := \rho^{\alpha} s_i^{\alpha}$. Durch Fortsetzen durch 0 können wir diese t_i^{α} als Schnitte in E auffassen. Wir betrachten den Vektorbündelhomomorphismus

$$A: M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E \quad (x, a_{\alpha}^i) \mapsto a_{\alpha}^i t_i^{\alpha}(x).$$

Da für jedes $x \in M$ die $t_i^\alpha(x)$ den Vektorraum E_x erzeugen, ist $A_x: \{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \rightarrow E_x$ surjektiv. Also ist E das Bild von A . Man kann dann zeigen, dass es einen Vektorbündelhomomorphismus $B: E \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ mit $AB = \text{id}_E$ gibt, vgl. [6, Thm. 5.13]*. Insbesondere heißt das, dass B injektiv ist.

Sei E' der Kern von $p := BA$. Wir zeigen, dass p konstanten Rang hat und E' damit nach Beispiel I.2.10 ein Untervektorbündel des trivialen Bündels $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ ist: Es ist $p^2 = BABA = BA = p$ - also faserweise eine Projektion.† Sei $p_x := (BA)|_{\{x\} \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})} \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}))$ und $x_0 \in M$. Wir setzen $f(x) = 1 - p_x - p_{x_0} - 2p_{x_0}p_x \in \text{End}(\text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}))$. Dann ist $p_{x_0}f(x) = f(x)p_x$, womit das folgende Diagramm kommutiert: (mit $\hat{f}(x, a) := f(x)(a)$)

$$\begin{array}{ccc} M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{p} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{id} \times p_{x_0}} & M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K}) \end{array}$$

Da $f(x_0) = \text{Id}$ ist, ist f in einer Umgebung von x_0 invertierbar und damit haben die p_x dieser Umgebung wie auch $\text{id} \times p_{x_0}$ konstanten Rang.

Dann gibt $E \oplus E' \rightarrow M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$, $(e, e') \mapsto e + e'$ einen Vektorbündelmorphismus, der nach Konstruktion faserweise ein Isomorphismus ist. Also sind $E \oplus E'$ und $M \times \text{Mat}_{r \times k}(\mathbb{K})$ schon isomorph. \square

Insbesondere liefert der letzte Satz, die erste Hälfte des Satzes von Serre-Swan:

Satz I.2.21 (Satz von Serre-Swan). [6, Thm. 6.18] Sei M kompakt. Der $C^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(E)$ ist endlich erzeugt und projektiv‡. Andersherum gibt es zu jedem endlich erzeugten projektiven $C^\infty(M)$ -Modul R ein Vektorbündel über M , so dass $R \cong \Gamma(E)$ als $C^\infty(M)$ -Modul.

I.2.4. Bündelmetriken

Definition I.2.22. Eine Bündelmetrik auf einem \mathbb{K} -Vektorbündel $\pi: E \rightarrow B$ ist eine glatte Abbildung $h: E \otimes E \rightarrow \mathbb{K}$, deren Einschränkung auf jeder Faser eine positiv definite symmetrische Bilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesche Sesquilinearform§ (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist.

Bemerkung I.2.23. (i) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ induziert eine Bündelmetrik h einen Isomorphismus $E \cong E^*$ durch $e \mapsto h(e, \cdot)$ und $h_x: E_x \rightarrow E_x^*$ ist selbstadjungiert für $x \in M$. Damit ist $h \in \Gamma(E \otimes E)^* \cong \Gamma((E \otimes E)^*) \cong \Gamma(E^* \otimes E^*) \cong \Gamma(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*))$. Für eine Riemannsche Metrik g auf M induziert die Identifizierung $g_x: T_x M \rightarrow T_x^* M$ einen Isomorphismus $\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto X^\flat := g(X, \cdot)$, dessen Inverses mit \sharp bezeichnet wird.¶

(ii) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhalten wir analog zu (i) einen Isomorphismus $\bar{E} \cong E^*$ durch $e \mapsto h(\cdot, e)$, wobei nun \bar{E} das konjugierte Vektorbündel ist.

Bemerkung I.2.24. Jedes Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit besitzt eine solche Bündelmetrik: Lokal nimmt man auf jeder Faser das euklidische bzw. hermitesche Produkt. Global benutzt man eine Zerlegung der Eins auf M , um die lokalen Bündelmetriken 'zusammenzukleben'. Der konkrete Beweis ist ganz analog zu dem, dass alle Mannigfaltigkeiten eine Riemannsche Metrik tragen, vgl. [3, Satz II.1.10].

Lemma I.2.25. (Orthogonales Bündel) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Untervektorbündel von $\pi: E' \rightarrow M$ und sei h eine Bündelmetrik auf E' . Dann ist $E^\perp := \{e' \in E' \mid h(e, e') = 0 \text{ für alle } e \in E \text{ mit } \pi(e) = \pi(e')\} \rightarrow M$, $e' \mapsto \pi(e')$ ein Untervektorbündel von E . Insbesondere gilt $E \oplus E^\perp \cong E'$.

*Faserweise ist das lineare Algebra und dann muss man noch überprüfen, dass alles so gewählt werden kann, dass es zu einem Faserbündel zusammenklebt.

†Der folgende Beweis funktioniert für alle Vektorbündelmorphismen, die faserweise Projektionen sind, da alle Bündel lokal trivial sind.

‡projektiver R -Modul $P = \text{Es gibt einen } R\text{-Modul } Q, \text{ so dass } P \oplus Q \text{ ein freier } R\text{-Modul ist.}$

§bei uns antilinear in der zweiten Komponente

¶ \flat und \sharp sind die sogenannten *musische Operatoren*. Sie heißen so, da sie in lokalen Koordinaten mit Hilfe der Metrik Indizes runter- bzw. hochheben, vgl. Tabelle I.3.

Beweis. Falls E^\perp ein Untervektorbündel ist, dann gibt $E \oplus E^\perp \rightarrow E'$, $(e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2$ nach Lemma I.2.3 den Vektorbündelisomorphismus.

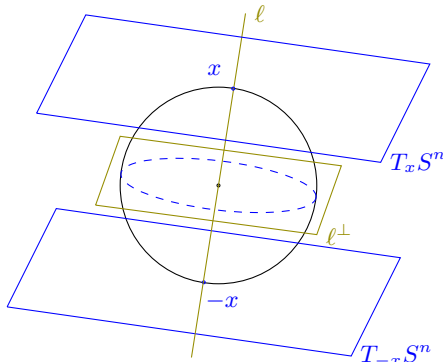
Es bleibt zu zeigen, dass E^\perp lokal trivial ist. Da das eine lokale Frage ist, können wir annehmen, dass E und E' trivial sind, also $E = U \times \mathbb{K}^r$ und $E' = U \times \mathbb{K}^s$. Seien s_1, \dots, s_r linear unabhängige Schnitte von $E|_U$. Wir können dies (in einer Umgebung U' von $x \in U$) zu einer Menge von s linear unabhängigen Schnitten von $E'|_{U'}$ erweitern: Sei $x \in U$. Wir erweitern $s_1(x), \dots, s_r(x)$ mittels Vektoren $s_{r+1}(x), \dots, s_s(x)$ zu einer Basis von $(\pi')^{-1}(x) \subseteq E'$. Für alle $y \in U$ setzen wir $s_i(y) = s_i(x)$ für $i > r$. Wegen der Stetigkeit der Determinante sind die $s_1(y), \dots, s_s(y)$ in einer Umgebung U' von x noch immer linear unabhängig. Mittels Gram-Schmidt und der Bündelmetrik erhalten wir nun aus den s_i punktweise neue s'_i . Da die Bündelmetrik glatt von der Faser abhängt, sieht man an den expliziten Formeln für Gram-Schmidt, dass die s'_i wieder glatte Schnitte sind. Weiterhin sind nach Konstruktion s'_1 bis s'_r wieder Schnitte in $E|_{U'}$ und die s'_{r+1} bis s'_s sind Schnitte in $E^\perp|_{U'}$. Damit ist E^\perp lokal trivial. \square

Beispiel I.2.26. Sei $X^n \subseteq M^m$ eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $p \in X$. Dann haben wir die orthogonale (bzgl. g_p) Zerlegung $T_p M = T_p X \oplus N_p X$, wobei $N_p X := \{v \in T_p M \mid v \perp T_p X\}$ der Normalenraum ist bzgl. auf dem Level der Bündel, die orthogonale Zerlegung: $TM = TX \oplus NX$.

Beispiel I.2.27. Sei $\pi: \tau := \{(\ell, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in \ell\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $(\ell, v) \mapsto \ell$, das kanonische Linienbündel aus Beispiel I.1.2.iii. Dieses ist ein Untervektorbündel vom trivialen Bündel $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Das letzte Bündel versehen wir mit der Bündelmetrik, die faserweise einfach das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^{n+1} ist.

Sei $\ell \in \mathbb{R}P^n$, also eine Ursprungsgerade in \mathbb{R}^{n+1} . Diese schneidet S^n in zwei Punkten: $\{x, -x\}$. Unter der Projektionsabbildung $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ wird das paar der Tangentialräume $T_x S^n$ und $T_{-x} S^n$ mit dem Tangentialraum $T_\ell \mathbb{R}P^n$ identifiziert. Das heißt, wir haben $T_\ell \mathbb{R}P^n = \{((x, v), (-x, -v)) \mid v \in T_x S^n\}$. Für ein festes ℓ hätten wir ein Element $x \in S^n$ dem ℓ auch einfach zuordnen und so $T_\ell \mathbb{R}P^n$ einfach mit $T_x S^n$ identifizieren können. Diese Zuordnung $\ell \rightarrow x$ können wir lokale immer machen - auch lokal glatt. Allerdings

nicht global glatt. Indem wir beide Urbilder x und $-x$ mitnehmen, sind wir unabhängig von dieser Wahl und können später Abbildungen auf $T\mathbb{R}P^n$ definieren. Wir setzen



$$T_\ell \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Hom}(\ell, \ell^\perp),$$

$$((x, v), (-x, -v)) \mapsto (av \in \ell \mapsto av \in \ell^\perp).$$

Das ist ein Vektorraumisomorphismus. Da alles glatt von ℓ abhängt, haben wir auch einen natürlichen Vektorbündelisomorphismus $T\mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}(\tau, \tau^\perp)$ und es gilt

$T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon \cong \underbrace{\tau \oplus \dots \oplus \tau}_{(n+1)\text{-mal}}$ gilt, wobei ϵ das triviale Bündel über $\mathbb{R}P^n$ ist, vgl. Übungsaufgabe 13.

Lemma I.2.28. Seien E bzw. V zwei \mathbb{K} -Vektorbündel über M . Der Rang von E sei r . Seien h^E bzw. h^V Bündelmetriken auf E bzw. V . Für $s_i \in \Gamma(E)$, $\alpha, \beta \in \Gamma(E^*)$, $\gamma, \delta \in \Gamma(\Lambda^k E)$, $\tilde{s}_i \in \Gamma(V)$, $f_i \in \text{Hom}(E, V)$ und (e_1, \dots, e_r) ein orthonormaler lokaler Rahmen von $\Gamma(E|_U)$ für $U \subseteq M$ setzen wir

$$h^{E \oplus V}(s_1 \oplus \tilde{s}_1, s_2 \oplus \tilde{s}_2) = h^E(s_1, s_2) + h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$$

$$h^{E \otimes V}(s_1 \otimes \tilde{s}_1, s_2 \otimes \tilde{s}_2) = h^E(s_1, s_2) h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$$

$$h^{E^*}(\alpha, \beta)|_U = \sum_i \alpha(e_i) \overline{\beta(e_i)}$$

$$h^{\Lambda^k E}(\gamma, \delta) = \frac{1}{k!} h^{E^{\otimes k}}(\iota(\gamma), \iota(\delta)) \text{ mit } \iota \text{ wie in Bsp. I.2.18.iii.}$$

Diese erweitern sich eindeutig zu Bündelmetriken auf $E \oplus V$, $E \otimes V$, E^* und $\Lambda^k E$. Insbesondere ergibt $h^{\text{Hom}(E, V)}(f_1, f_2)|_U = \sum_{i=1}^r h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$ durch die Identifizierung $\text{Hom}(E, V) \cong E^* \otimes V$ eine Bündelmetrik auf $\text{Hom}(E, V)$.

Beweis. Es ist klar für die Summe. Wir skizzieren hier den Beweis fürs Tensorprodukt: Als erstes überlegt man sich, dass die Abbildung $\Gamma(E) \times \Gamma(V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}), (s_1, \tilde{s}_1) \mapsto h^E(s_1, s_2)h^V(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ für jedes feste $(s_2, \tilde{s}_2) \in \Gamma(E) \times \Gamma(V)$ bilinear ist und damit eine Abbildung $\Gamma(E) \otimes \Gamma(V) \cong \Gamma(E \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$ induziert. Analog gilt es für vertauschte Indizes 1 und 2. Insofern induziert die Gleichung für $h^{E \otimes V}$ insgesamt eine bilineare Abbildung

$$h^{E \otimes V} : \Gamma(E \otimes V) \times \overline{\Gamma(E \otimes V)} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K}).$$

(Das komplexe Konjugieren ist für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erforderlich und entfällt bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.) Ist e_i ein orthonormaler Rahmen von $\Gamma(E|_U)$ bzgl. h^E und analog v_j ein orthonormaler Rahmen von $\Gamma(V|_U)$, dann ist $e_i \otimes v_j$ ein lokaler Rahmen von $\Gamma(E \otimes V|_U)$, der nach der Forderung im Lemma dann ebenfalls orthonormal ist. Damit ist $h^{E \otimes V}$ eine eindeutig bestimmte Bündelmetrik. Die Bündelmetrik auf E^* wird analog überprüft. Man muss hier nur zusätzlich die Unabhängigkeit von dem gewählten orthonormalen Rahmen beweisen. Das folgt aus der Linearität der Argumente und daraus dass ein neuer orthonormaler Rahmen immer durch eine Matrix $A \in O(r)$ entsteht.

Die Abbildung

$$\iota : \text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V, f \in \text{Hom}(E_x, V_x) \mapsto \sum_i e_i^* \otimes f(e_i),$$

wobei e_i eine Orthonormalbasis von E_x ist, gibt den Bündelisomorphismus von $\text{Hom}(E, V) \rightarrow E^* \otimes V$ und dann folgt, direkt die Formel $h^{E^* \otimes V}(\iota(f_1), \iota(f_2)) = \sum_i h^V(f_1(e_i), f_2(e_i))$. \square

Beispiel I.2.29. Für die Bündelmetriken auf den abgeleiteten Bündeln von TM , siehe Tabelle I.1. Dort haben wir die lokalen Definitionen der Bündelmetriken. Wohldefiniertheit kann wie dort für 1-Formen gezeigt, durch Koordinatenwechsel direkt nachgerechnet werden. Es bleibt natürlich zu überprüfen, dass dies die Bündelmetriken von oben sind - hier für 1-Formen: Für T^*M haben wir nach Lemma I.2.28 für $U \subseteq M$ in lokalen Koordinaten x^i

$$h^{T^*M}(f_i dx^i, h_j dx^j) = \sum_k f_i h_j dx^i(e_k) dx^j(e_k)$$

wobei e_k eine Orthonormalbasis von TM ist. Man beachte hier, dass ∂_{x^i} i.A. keine Orthonormalbasis ist. Es ist $e_k = A_k^\ell \partial_{x^\ell}$ und damit $\delta_{km} = g(e_k, e_m) = A_k^\ell A_m^j g_{\ell j}$, also $AGA^T = \text{Id}$, $G^{-1} = A^T A$ und damit $g^{rj} = \sum_k A_k^r A_k^j$. Also

$$h^{T^*M}(f_i dx^i, h_j dx^j) = \sum_k f_i h_j A_k^i A_k^j = f_i h_j g^{ij}.$$

I.2.5. Operationen auf Formen und Vektorfeldern

Auf Differentialformen und Vektorfeldern gibt es verschiedene Operationen, die wichtigsten sind in Tabelle I.2 festgehalten und solche Operationen die eine zugrundeliegende (semi)-Riemannsche Metrik benötigen in Tabelle I.3.

Vorl. 7

Als Beispiel gehen wir hier erst einmal nur näher auf die äußere Ableitung und den Hodge-Stern ein. Für den Pullback von Differentialformen, siehe Übungsaufgabe 11.

Die äußere Ableitung $d = d_M^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ soll die Tangentialabbildung df von Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern. Für solche $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$ ist df eine lineare Abbildung von $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und kann damit als 1-Form aufgefasst werden: $df \in \Omega^1(M)$.

Wir definieren $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ durch: Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und x^i lokale Koordinaten um $p \in M$. In diesen Koordinaten habe α die Form $f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Dann sei $d\alpha$ die $k+1$ -Form, die in diesen lokalen Koordinaten die Form $d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ hat.

Bündel			Schnitte			Bündelmetrik (induziert von der Riem. Metrik g)
E	Bezeichnung	Rang	$\Gamma(E)$	Bezeichnung eines Schnittes	lokal	$(g(s_1, s_2)$ lokal)
$M \times \mathbb{R}^r$	Triviales Bündel	r	$C^\infty(M, \mathbb{R}^r)$	(vektorst.) Funktion	$f(x)$ (sogar global)	punktweises Produkt
TM	Tangentialbündel	m	$\mathfrak{X}(M)$	Vektorfeld	$f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ (kurz $f_i \partial_{x^i}$)	$g(f^i \partial_{x^i}, h^l \partial_{x^l}) = g_{il} f^i h^l$
$T^*M := (TM)^*$	Kotangentialbündel	m	$\Omega^1(M)$	1-(Differential)Form	$f_i(x) dx^i$	$g(f_i(x) dx^i, h_l(x) dx^l) = g^{il} f_i h_l$
$T_r^s(M) = \bigotimes_{i=1}^r TM \otimes \bigotimes_{j=1}^s T^*M$	(r, s) -Tensorbündel	m^{r+s}	$\mathcal{T}_r^s(M)$	(r, s) -Tensoren	$f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x) \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$	$g_{i_1 l_1} \dots g_{i_r l_r} g^{j_1 n_1} \dots g^{j_s n_s} f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} h_{n_1 \dots n_s}^{l_1 \dots l_r}$
$\Lambda^k TM$	Bündel der k -Formen	$\binom{m}{k}$	$\Omega^k(M)$	k -(Differential)Form	$f_{j_1 \dots j_k}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	$g(\alpha, \beta) := \frac{1}{k!} g(\iota(\alpha), \iota(\beta))$ mit $\iota: \Lambda^k TM \rightarrow T^*M^{\otimes k}$ die triviale Einbettung wie in Bsp. I.2.18.iii $g(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \det(g^{i_r j_s})_{rs}$

Tabelle I.1.: Abgeleitete Bündel von TM (Die Formeln für die hier gegebenen induzierten Bilinearformen auf den abgeleiteten Bündeln gelten noch immer, wenn g eine (semi-)Riemannsche Metrik war – jedoch sind sie dann nicht Bündelmetriken im Sinne von Definition I.2.22.

Änderung der lokalen Darstellungen am Beispiel von Vektorfeldern und der Riemannschen Metrik: $x = x(y)$

$$f^i \partial_{x^i} = (f^i \circ x) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial_{y^j} \quad g_{ij}^x = g_{k\ell}^y \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^\ell}{\partial x^j}$$

wobei wir die Matrixkoeffizienten mit x bzw. y indizieren, um die verschiedenen Karten auseinander zu halten.

Wenn man die lokalen Darstellungen für die (induzierten) Bündelmetriken von oben auf 1-Formen, Tensoren etc als Definition nutzt, muss man überprüfen, dass die gegebene lokale Darstellung wirklich eine wohldefinierte Abbildung auf den 1-Formen etc. liefert und wieder eine Bündelmetrik ist – hier am Beispiel der 1-Formen:

Aus der Transformation der g_{ij} folgt $g_x^{ij} = g_y^{k\ell} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^\ell}$. Zusammen mit $f_i dx^i = (f_i \circ y) \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$ folgt

$$g_{x(y)}(f_i dx^i, h_j dx^j) = (g_x^{ij} f_i h_j)(x(y)) = \left(g_y^{k\ell} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} (f_i \circ x)(h_j \circ x) \right) (y) = g_y \left((f_i \circ x) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k, (h_j \circ x) \frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} dy^\ell \right).$$

- (i) Wohldefiniertheit von d ? Wie überprüft man das die lokalen Formeln ein globales Objekt definieren? Man überprüft, dass für Darstellungen in zwei verschiedenen lokalen Koordinaten, auch die Bilder der Abbildungen wieder das gleiche Objekt nur in verschiedenen Koordinaten darstellen – ganz analog zur Bündelmetrik auf T^*M unter Tabelle I.1.
- (ii) Oft wird d auch abstrakt eingeführt, im Sinne, dass die blauen Eigenschaften für d in Tabelle I.2, den Operator d eindeutig bestimmen:

Lemma I.2.30. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Mannigfaltigkeiten M existiert genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d = d_M^k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ist $d_M^0 f$ gerade die Tangentialabbildung df
- (2) (Leibnizregel) Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- (3) $d^2 = d_M^{k+1} \circ d_M^k = 0$
- (4) (Natürlichkeit) Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, dann gilt $F^* \circ d_M^k = d_N^k \circ F^*$, wobei F^* der Pullback aus Tabelle I.2 ist.

Der Operator d heißt äußere Ableitung.

Beweis. Das 'unser' d von oben, die Eigenschaften erfüllt, kann man mit der lokalen Darstellung einfach nachrechnen. Dann rechnet man nach (induktiv über k), dass ein d welches diese Eigenschaften hat, sich lokal wie unser d von oben verhalten muss. \square

Bevor wir zum Beispiel des Hodge-Sterns kommen, müssen wir noch kurz über Integration über Differentialformen sprechen:

Integration Sei $\omega \in \Omega^m(M)$. Sei $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq M$ mit lokalen Koordinaten x^i . Dann hat $(\kappa^{-1})^* \omega$ die Form $\omega_x dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ mit $\omega_x \in C^\infty(V)$. Das können wir über V integrieren: $\int_V (\kappa^{-1})^* \omega := \int_V \omega_x dx^1 \dots dx^m$. Haben wir einen orientierten Atlas von M mit Karten $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins ρ_α . Dann definieren wir

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{V_\alpha} (\kappa_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega).$$

Man kann nachrechnen, dass diese Definition unabhängig vom gewählten Atlas ist.

Damit kann man nun auch eine Paarung definieren:

$$\Omega^k(M) \times \Omega^{m-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Auf der anderen Seite haben wir eine Bündelmetrik auf $\Omega^k(M)$, vgl. Tabelle I.1, aus der wir mittels Integration ein Skalarprodukt auf $\Omega^k(M)$ formen können:

$$\Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta)_{L^2} \mapsto \int_M g(\alpha, \beta) d\text{vol}_g.$$

Die Paarung und das Skalarprodukt sind eng miteinander verwandt - wir haben für orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten eine Identifizierung von $\Omega^k(M)$ mit $\Omega^{m-k}(M)$ (unter Verwendung der Metrik) - diese ist durch den Hodge-Stern gegeben:

Der Hodge-Stern $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$ für $m = \dim M$ und M eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g ist eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung mit $(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_M \alpha \wedge * \beta$:

Wir setzen für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^k(M)$

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta) d\text{vol}_g.$$

Da g positiv definit ist, definiert dies $*\beta$ eindeutig. Insbesondere ist $*$ damit eine lokale Abbildung, d.h. induziert eine Abbildung $*$: $\Lambda^k T_x^* M \rightarrow \Lambda^{m-k} T_x^* M$. Ist e_i^* eine Orthonormalbasis von $T_x^* M$, dann kann

man nachrechnen, dass $*(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*) = e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_{m-k}}^*$ ist, wobei $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{m-k})$ eine gerade Permutation von $\{1, \dots, m\}$ ist. Für $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ setzen wir $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = \text{sign}(\sigma)$, falls σ eine Permutation ist, und sonst $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = 0$.

Sind nun x^i lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$, dann ist zwar dx^i i.A. in keinem Punkt $x \in U$ eine Orthonormalbasis, aber man kann nachrechnen, dass

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{1}{(m-k)!} g^{i_1 \ell_1} \dots g^{i_k \ell_k} \epsilon_{\ell_1 \dots \ell_k j_1 \dots j_{m-k}} \sqrt{|\det g|} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-k}}$$

gilt. Wir überlegen uns das am Beispiel: $(U \subseteq \mathbb{R}^3, g)$ und $\beta = dx^1$. Dann muss $*\beta = f_{ij} dx^i \wedge dx^j$ für $i < j$ und geeignete $f_{ij} \in C^\infty(U)$ sein und für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ soll gelten:

$$\begin{aligned} dx^k \wedge (f_{ij} dx^i \wedge dx^j) &\stackrel{!}{=} g(dx^k, dx^1) \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\rightsquigarrow f_{ij} = g^{k1} \epsilon_{kij} \sqrt{|\det g|}. \end{aligned}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir $(U \subseteq \mathbb{R}^4, g)$ und $\beta = dx^1 \wedge dx^2$. Dann muss $*\beta = f_{ij} dx^i \wedge dx^j$ für $i < j$ und geeignete $f_{ij} \in C^\infty(U)$ sein und für alle $k < \ell$ soll gelten:

$$\begin{aligned} dx^k \wedge dx^\ell \wedge (f_{ij} dx^i \wedge dx^j) &\stackrel{!}{=} \underbrace{g(dx^k \wedge dx^\ell, dx^1 \wedge dx^2)}_{=g^{k1}g^{\ell 2} - g^{\ell 1}g^{k 2}} \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ &\rightsquigarrow f_{ij} = g^{k1}g^{\ell 2} \epsilon_{kl ij} \sqrt{|\det g|}. \end{aligned}$$

Lemma I.2.31. *Es ist $**\alpha = (-1)^{k(m-k)}\alpha$ sowie $g(\alpha, \gamma) = g(*\alpha, *\gamma)$ für $\alpha, \gamma \in \Omega^k(M)$.*

Beweis. Es reicht die erste Identität punktweise zu überprüfen. Sei also $x \in M$ und x^i lokale Koordinaten um x , so dass ∂_{x^i} in x eine Orthonormalbasis ist (z.B. geodätische Normalkoordinaten). Dann ist $*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x) = \epsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{m-k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-k}}|_x$ und damit

$$**(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x) = \epsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{m-k}} \epsilon_{j_1 \dots j_{m-k} i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x = (-1)^{k(m-k)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_x.$$

Dann ist $g(*\alpha, *\gamma) \text{dvol}_g = *\alpha \wedge (**\gamma) = (-1)^{k(m-k)} *\alpha \wedge \gamma = (-1)^{2k(m-k)} \gamma \wedge *\alpha = g(\gamma, \alpha) \text{dvol}_g$. \square

Vorl. 8 Beispiel I.2.32 (Maxwell-Gleichungen in \mathbb{R}^3).

Die Maxwell-Gleichungen sind die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik. Sie beschreiben die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf elektrische Ladungen und die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld E und dem Magnetfeld B . Das elektrische Feld E , das Magnetfeld B ist definiert auf einem (nicht notwendigerweise beschränktem) Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Beide Größen sind zeitabhängig, d.h. $E: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Weiterhin wird die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige Dichtefunktion $\rho: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Stromverteilung durch den zeitabhängigen Stromdichtevektor $j: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben. c ist die Lichtgeschwindigkeit.

Die *Maxwellgleichungen im \mathbb{R}^3* sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \text{div} B &= 0 \\ \text{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j & \text{div} E &= 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Hierbei sind rot und div die 'normale' Rotation bzw. Divergenz von Vektorfeldern im \mathbb{R}^3 (also $\text{rot}(V^i \partial_{x^i}) = (\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3}, \frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1}, \frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2})$ und $\text{div}(V^i \partial_{x^i}) = \frac{\partial V^i}{\partial x^i}$).

Aus Spaß und der Übung halber, können wir diese Gleichungen in der Sprache der Differentialformen formulieren, vgl. Übungsaufgabe 14:

$$\begin{aligned} *dE^b &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B^b & d(*B^b) &= 0 \\ *dB^b &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^b + \frac{4\pi}{c} j^b & d(*E^b) &= 4\pi \rho \text{dvol}_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

			lokal (vgl.(i) für die Diskussion von Wohldefiniertheit) x^i lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$, y^i auf $V \subseteq N$ $F(U) \subseteq V$, $\varphi(U) = V$,	Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau) $p \in M$, $f, f_{i_1 \dots i_k}, X^i \in C^\infty(M)$, $X, X_i, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ $F \in C^\infty(M, N)$, $\gamma \in \Omega^\ell(N)$, $\eta \in \Omega^\ell(N)$, $\varphi, \psi \in C^\infty(M, N)$ Diffeomorphismen
F^*	Pullback	$F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$	$F^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = (f_{i_1 \dots i_k} \circ F) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$	<ul style="list-style-type: none"> $(F^*\gamma)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) = \gamma_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p)))$ $F^*f = f \circ F$ $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$
φ_*	Pushforward	$\varphi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$	$\varphi_*(X^i \partial_{x^i}) = X^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \partial_{y^j}$	<ul style="list-style-type: none"> $(\varphi_*X)(p) = d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(X(\varphi^{-1}(p)))$ $\varphi_*(fX) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi_*X)$ $(\varphi_*X)(f) = X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ $\psi_* \circ \varphi_*X = (\psi \circ \varphi)_*X$
d	äußere Ableitung	$d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ für alle $k \geq 0$	$d(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> d ist \mathbb{R}-linear $df(X) = X(f)^*$ $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta$ $d^2 = d \circ d = 0$ $F^* \circ d = d \circ F^*$
ι	inneres Produkt	$\iota: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ für alle $k \geq 1$	$\iota_{X^a \partial_{x^a}}(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = X^a f_{i_1 \dots i_k} \delta_a^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$	<ul style="list-style-type: none"> ι ist $C^\infty(M)$-bilinear $(\iota_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)$ $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta$ $\iota_X^2 \alpha = 0$
$[\cdot, \cdot]$	Lieklammer [†]	$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$[X^i \partial_{x^i}, Y^j \partial_{y^j}] = (X^j \frac{Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{X^i}{\partial x^j}) \partial_{x^i}$	<ul style="list-style-type: none"> $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi-Identität) $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y]$ $d\alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_i (-1)^i X_i(\alpha(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i < \ell} (-1)^{i+\ell} \alpha([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_k)$[‡]
\mathcal{L}	Lieableitung	$\mathcal{L}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$		<ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt} \Big _{t=0} \Phi_t^* \alpha$[§] $\mathcal{L}_X f = X(f)$ (Die Lieableitung verallgemeinert die Richtungsableitung auf k-Formen) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) + \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta$ $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ $\mathcal{L}_{fX} \alpha = f \mathcal{L}_X \alpha + df \wedge \iota_X \alpha$

Tabelle I.2.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf M

*Das sagt einfach nur, dass d auf $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$ einfach durch die Tangentialabbildung df gegeben werden soll. Um das in der Notation zu unterscheiden, benutzt man hier die alternative Schreibweise als Derivation, vgl. [3, Übungsaufgabe 31].

[†]vgl. Übungsaufgabe 36

[‡]Das $\check{}$ bedeutet, dass dieser Eintrag ausgelassen wird.

[§] Φ_t ist der Fluss des Vektorfeldes X , vgl. Übungsaufgabe 15.

Operationen mit Metrik g auf M^m			
			lokal (+Linearität)
			Eigenschaften (abstrakt definierende Eigenschaften sind blau) $p \in M, f, f_{i_1, \dots, i_k}, X^i \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M), \alpha, \alpha_i \in \Omega^k(M), \omega \in \Omega^{k+1}(M), \beta \in \Omega^l(M), \eta \in \Omega^{m-k}(M)$ $F \in C^\infty(M, N), \gamma \in \Omega^k(N), \eta \in \Omega^l(N)$
\flat	Herunterziehen von Indizes	$\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$	$(X^a(x)\partial_{x^a})^\flat = X^a(x)g_{ai}(x)dx^i$ • $X^\flat(Y) = g(X, Y)$
\sharp	Erhöhen von Indizes	$\sharp: \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$(f_i(x)dx^i)^\sharp = f_i(x)g^{ij}(x)\partial_{x^j}$ • $\alpha(Y) = g(\alpha^\sharp, Y)$
grad	Gradient	grad: $C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$	$\text{grad} f = g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_{x^j}$ • $\text{grad} f = (df)^\sharp$
δ	formal adjungierter Operator zu d	$\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$	• $(d\alpha, \omega)_{L^2} = (\alpha, \delta\omega)_{L^2}$ • $\delta^2 = 0$
div	Divergenz	div: $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$	$\text{div}(X^a(x)\partial_{x^a}) = (\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}X^a)$ • $d(\mathcal{L}_X \text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g$ (auch falls dvol_g nur lokal wohldef. ist) • $\mathcal{L}_X(\text{dvol}_g) = \text{div}(X)\text{dvol}_g$
Δ	Laplace	$\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$	$\Delta f = (\det g_{ij})^{-1/2}\partial_{x^a}((\det g_{ij})^{1/2}g^{ab}\partial_{x^b}f)$ • $\Delta = d\delta + \delta d = (d + \delta)^2$ • $\Delta f = \delta df = \text{div grad} f$
*	Hodge-Stern (für M orientiert)	$*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$	$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{1}{k!}g^{i_1 \ell_1} \dots g^{i_k \ell_k} \epsilon_{\ell_1 \dots \ell_k j_1 \dots j_{m-k}} \sqrt{ \det g } dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{m-k}}$ • * ist $C^\infty(M)$ -linear • $\alpha \wedge \eta = g(\alpha, *\eta)\text{dvol}_g$ • $* * \alpha = (-1)^{k(m-k)} \alpha$ • $g(*\alpha_1, *\alpha_2) = g(\alpha_1, \alpha_2)$ • $\delta \alpha = (-1)^{m(k-1)-1} * d * \alpha$

Tabelle I.3.: Operationen auf Differentialformen und Vektorfeldern auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g)

*Für $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ setzen wir $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = \text{sign}(\sigma)$, falls σ eine Permutation ist, und sonst $\epsilon_{\sigma(1), \dots, \sigma(m)} = 0$.

I.2.6. Zusammenhänge und Krümmungen auf Vektorbündeln

(Ab jetzt wieder nur reelle/komplexe Vektorbündel) Die Definitionen für Zusammenhang und Krümmung sind denen auf TM aus DiffGeo I angelehnt, vgl. [3, II.2 and II.7].

I.2.6.1. Zusammenhänge

Definition I.2.33. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$. Eine Abbildung $\nabla := \nabla^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ heißt (*affiner*) *Zusammenhang*, falls gilt:

- (i) ∇ ist linear in beiden Argumenten.
- (ii) (Tensoriell in der ersten Komponente) $\nabla_{fX}s = f\nabla_Xs$ (also $(\nabla_{fX}s)(p) = f(p)(\nabla_Xs)_p$).
- (iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_Xs, \quad \text{also } (\nabla_X(fs))_p = d_p f(X(p))s(p) + f(p)(\nabla_Xs)_p.$$

Die Menge aller affinen Zusammenhänge eines Vektorbündels $\pi: E \rightarrow M$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(E)$. Ist zusätzlich eine Bündelmetrik h auf E gegeben, so nennen wir ∇^E *metrisch* (= kompatibel mit der Metrik), falls für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s, s' \in \Gamma(E)$

$$X.h(s, s') = h(\nabla_Xs, s') + h(s, \nabla_Xs')$$

wobei $X.f := X(f) := df(X): M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto d_p f(X(p))$ für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ im Falle eines komplexen Vektorbündels) ist.

Bemerkung I.2.34. (Lokale Darstellung) Seien x^i Koordinaten auf $U \subseteq M$ und sei s_α ein lokaler Rahmen für $E|_U$ (insbesondere ist dann $E|_U$ trivial). Für $X = X^i \partial_{x^i}$, $s = f^\alpha s_\alpha$ gilt

$$\nabla_Xs = X^i (\partial_{x^i} f^\alpha) s_\alpha + X^i f^\alpha \underbrace{\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha}_{=: \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta}$$

mit $\Gamma_{i\alpha}^\beta \in C^\infty(U, \mathbb{K})$. Wie auch schon auf TM nennen wir die Γ *Christoffelsymbole*.

Ist ∇ metrisch bzgl. h und ist s_α ein lokaler orthonormaler Rahmen von $E|_U$, so gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x^i} (h(s_\alpha, s_\beta)) = h(\nabla_{\partial_{x^i}} s_\alpha, s_\beta) + h(s_\alpha, \nabla_{\partial_{x^i}} s_\beta) = h(\Gamma_{i\alpha}^\gamma s_\gamma, s_\beta) + h(s_\alpha, \Gamma_{i\beta}^\gamma s_\gamma) \\ &= \Gamma_{i\alpha}^\beta + \overline{\Gamma_{i\beta}^\alpha}. \end{aligned} \tag{I.2}$$

Bemerkung I.2.35. Sei $\nabla \in \mathcal{A}(E)$.

- (i) Die Menge aller Zusammenhänge $\mathcal{A}(E)$ auf einem Vektorbündel E bilden mit der Addition $(\lambda\nabla^1 + \nabla^2)_Xs := \lambda\nabla_X^1s + \nabla_X^2s$ einen affinen Raum. (Aber keinen Vektorraum, da die Nullabbildung kein Zusammenhang ist.)
- (ii) Seien $\nabla^1, \nabla^2 \in \mathcal{A}(E)$. Dann ist ω definiert durch $\omega(X) := \nabla_X^1 - \nabla_X^2$ eine 1-Form mit Werten in $\text{End}(E)$, also $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$. Die Abbildung $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X$ ist jedoch *kein* Element in $\Omega^1(M, \text{End}(E))$, da $\nabla_X(fs) \neq f\nabla_Xs$ ist. Andersherum ist für $\nabla \in \mathcal{A}(E)$ und $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(E))$ auch $\nabla_X^2s := \nabla_Xs + \omega(X)s$ immer wieder ein affiner Zusammenhang auf E .

Beispiel I.2.36. (i) Ein ausgezeichneter Zusammenhang auf einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der Levi-Civita Zusammenhang. Das ist der eindeutig bestimmte metrische Zusammenhang, der zusätzlich torsionsfrei ist, d.h. $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]^*$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vgl. [3, Satz II.2.8].

- (ii) Zwei Zusammenhänge auf TM unterscheiden sich durch eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M, \text{End}(TM)) \cong \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$.

*Für die Definition der Lieklammer siehe Tabelle I.2 bzw. [3, Übungsaufgabe 39/40]. Eine geometrische Interpretation der Lieklammer werden wir in Übungsaufgabe 35 kennenlernen.

(iii) Für zwei metrische Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 auf TM gilt

$$g(\omega(X)Y, Z) = g(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) \stackrel{\text{metr.}}{=} g(Y, \nabla_X^1 Z - \nabla_X^2 Z) = g(Y, \omega(X)Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Wir können in diesem Fall also ω als Element in $\Omega(M, \mathfrak{o}(TM))$ auffassen, wobei $\mathfrak{o}(TM)$ die Abbildung auf TM bezeichnen, die faserweise orthogonal sind (also das Skalarprodukt g erhalten).

(iv) Die *Torsion* eines Zusammenhangs ∇ auf TM ist ein $(0, 2)$ Tensor $T \in \mathfrak{T}_0^2(M)$: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Für zwei Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 mit der gleichen Torsion ist $\omega(X)(Y) = \omega(Y)(X) -$ vgl. Übungsaufgabe 17.

Satz I.2.37 (Induzierte Zusammenhänge). *Seien E und V \mathbb{K} -Vektorbündel über M . Seien ∇^E und ∇^V affine Zusammenhänge auf E und V . Dann existieren auf $E^*, E \oplus V, E \otimes V, \Lambda^k E^*$ und $\text{Hom}(E, V)$, so dass für $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N), \omega \in \Gamma(E^*)^*, s, s_i \in \Gamma(E), \tilde{s} \in \Gamma(V), \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*), \beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ gilt.**

$$\begin{aligned} X(\omega(s)) &= (\nabla_X^{E^*} \omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{E \oplus V}(s \oplus \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \oplus (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^{E \otimes V}(s \otimes \tilde{s}) &= (\nabla_X^E s) \otimes \tilde{s} + s \otimes (\nabla_X^V \tilde{s}) \\ \nabla_X^V(f(s)) &= \left(\nabla_X^{\text{Hom}(E, V)} f \right) (s) + f(\nabla_X^E s) \\ \nabla_X^{\Lambda^{k+\ell} E^*}(\alpha \wedge \beta) &= \left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha \right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*} \beta \right). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha \right) (s_1, \dots, s_k) = X(\alpha(s_1, \dots, s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1, \dots, s_{j-1}, \nabla_X^E s_j, s_{j+1}, \dots, s_k).$$

Sind die Zusammenhänge ∇^E bzw. ∇^V metrisch bzgl. Bündelmetriken h^E bzw. h^V auf E bzw. V , so sind die obigen Zusammenhänge metrisch bzgl. der induzierten Bündelmetriken, vgl. Lemma I.2.28, auf den jeweiligen Bündeln.

Beweis. Wir skizzieren hier nur die Argumente für den Zusammenhang auf E^* , vgl. auch Übungsaufgabe 18 und 19: Man rechnet nach, dass $(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) = X(\omega(s)) - \omega(\nabla_X^E s)$ die geforderten Eigenschaften in Definition I.2.33, z.B. gilt für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{E^*} (f\omega))(s) &= X((f\omega)(s)) - (f\omega)(\nabla_X^E s) = X(f\omega(s)) - f\omega(\nabla_X^E s) \\ &= fX(\omega(s)) + df(X)\omega(s) - f\omega(\nabla_X^E s) = df(X)\omega(s) + f(\nabla_X^{E^*} \omega)(s) \\ &= (df(X)\omega + f\nabla_X^{E^*} \omega)(s). \end{aligned} \quad \square$$

Für den induzierten Zusammenhang auf dem Pullbackbündel identifizieren wir zuerst Schnitte im Pullbackbündel f^*E für $\pi: E \rightarrow M$ und $f: M' \rightarrow M$. Sei $S \in \Gamma(f^*E)$. Dann hat $S(x)$ die Form $(x, s(x)) \in E_{f(x)}$. Die erste Komponente enthält also keine Informationen und wir haben $s: M' \rightarrow E$. Andersherum definiert jede glatte Abbildung $s: M' \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = f$ mittels $S(x) = (x, s(x))$ einen Schnitt in f^*E . Deshalb arbeitet man oft nicht direkt mit Schnitten von f^*E , sondern mit den Abbildungen $s: M' \rightarrow E$ von oben. Solches s nennt man einen *Schnitt von E entlang f* und die Menge aller solcher Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma_f(E)$. Nach obigen Überlegungen ist $\Gamma_f(E) \cong \Gamma(f^*E)$. Beachte, dass im Allgemeinen $\Gamma_f(E) \neq \Gamma(E|_{f(M')})$ ist – z.B. sei $f: M' \rightarrow M$ eine konstante Abbildung, dann kann ein Schnitt von E entlang f immer noch von $x \in M'$ abhängen, wogegen Schnitte in $\Gamma(E|_{f(M')=\{*\}})$ konstant sind. Die lokale Darstellung eines Elements in $\Gamma_f(E)$ über $U \subseteq M'$ ist $a^i(s_i \circ f)$, wobei $a^i \in C^\infty(U)$ und s_i ein lokaler Rahmen von E über $f(U) \subseteq M$ ist.

Beachten Sie, dass $\Gamma(E^) \cong \Gamma(E)^*$ als $C^\infty(M, \mathbb{K})$ -Moduln ist und wir damit eine Paarung $\Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$, $(\omega, s) \mapsto \omega(s)$ haben (was einfach über jedem Punkt $x \in M$ einfach die Paarung/Auswertungsabbildung $E_x^* \times E_x \rightarrow \mathbb{K}$ ist). Insbesondere ist $\omega \in \Gamma(E^*)$ eindeutig bestimmt, wenn man $\omega(s)$ für alle $s \in \Gamma(E)$ kennt.

Lemma I.2.38. Sei $f: M' \rightarrow M$ und $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E . Sei $s \in \Gamma_f(E)$ - lokal sei $s = a^i(s_i \circ f)$, $a^i \in C^\infty(U \subseteq M')$. Dann definiert sich durch

$$\nabla_X^{f^*E} s|_U = X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f$$

für $X \in \mathfrak{X}(M')$ ein Zusammenhang auf f^*E , wobei $(\nabla_{df(X)}^E s_i \circ f)(p)$ als $(\nabla_{d_p f(X(p))}^E s_i)(f(p))$ gelesen wird.

Beweis. Man muss einmal nachrechnen, dass die Definition unabhängig von der lokalen Darstellung ist: Sei t_j ein weiterer lokaler Rahmen von E auf $f(U) \subseteq M$. Dann definieren $\varphi_\alpha(t_i(y)) = (y, e_i)$ bzw. $\varphi_\beta(s_i(y)) = (y, e_i)$ lokale Trivialisierung sei $\mu_{\alpha\beta}$ die zugehörige Übergangsfunktion und wir schreiben $\mu_{\alpha\beta}(y)(e_j) =: \mu_j^i(y)e_i$. Dann ist $t_j(y) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(y, e_j)) = \varphi_\beta^{-1}(y, \mu_{\alpha\beta}(y)(e_j)) = \mu_j^i(y)s_i(y)$. Ein Rahmen entsteht aus einem alten also genau durch punktwweisen Multiplikation mit der Matrix der Übergangsfunktion.

Soll also $b^j(t_j \circ f) = a^i(s_i \circ f)$ sein, dann muss $b^j(x)\mu_j^i(f(x)) = a^i(x)$ gelten und wir haben:

$$\begin{aligned} X(a^i)(s_i \circ f) + a^i(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f &= X(b^j(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f \\ &= (X(b^j)(\mu_j^i \circ f) + b^j X(\mu_j^i \circ f))(s_i \circ f) + b^j(\mu_j^i \circ f)(\nabla_{df(X)}^E s_i) \circ f \\ &= X(b^j)((\mu_j^i s_i) \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E \mu_j^i s_i) \circ f \\ &= X(b^j)(t_j \circ f) + b^j(\nabla_{df(X)}^E t_j) \circ f. \end{aligned}$$

Damit ist ∇^{f^*E} wohldefiniert und man überprüft leicht, dass es auch wirklich ein Zusammenhang ist. \square

Beispiel I.2.39. (i) Sei $f: M' \rightarrow M$ eine Einbettung. Dann ist $\nabla_X^{f^*E} s = \nabla_{df(X)}^E (s \circ f^{-1})$

(ii) Bildet $f: M' \rightarrow M$ nur auf einen Punkt $p \in M$ ab. Dann ist $f^*E \cong M' \times \pi^{-1}(p)$ und $\nabla_X^{f^*E} (s = a^\alpha s_\alpha(p)) = X(a^\alpha) s_\alpha(p)$.

Bemerkung I.2.40. (i) Sei $c: I \rightarrow M$ eine Kurve und $\varphi(t)$ ein Schnitt eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ entlang c . Für den induzierten Zusammenhang auf dem Pullbackbündel c^*E schreiben wir oft einfach $\frac{\nabla}{dt} := \nabla_{\partial_t}^{c^*E}$. Das ist eine Erweiterung von $\frac{\nabla}{dt}$ wie wir es in DiffGeo I verwendet haben, [3, Bem. II.4.5]. Dort war $\frac{\nabla}{dt} \varphi := \nabla_{\dot{c}} \varphi$ wobei φ ein Schnitt auf $E|_{c(I)}$ war. (A priori war ja ∇_X erst einmal nur für Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiert und \dot{c} ist nur ein Vektorfeld auf der Spur von c . Allerdings folgt aus den definierenden Eigenschaften von ∇ , dass $(\nabla_X s)(p)$ zwar von s in einer Umgebung von s von p aber nur vom Wert von X in p abhängt. Damit ist $\nabla_{\dot{c}} \varphi$ in $c(t)$ wohldefiniert.) Jetzt ist $\varphi(t)$ ein Schnitt von E entlang c , was wie oben besprochen, den obigen Fall einschließt aber nicht nur, vgl. auch Beispiel I.2.39.i.

(ii) In lokalen Koordinaten haben wir für einen Schnitt $\varphi \in \Gamma_f(E)$ entlang $c: \varphi(t) = \varphi^i(t)s_i(c(t))$. Wir kürzen ab $\check{s}_i = s_i \circ c$ und $\check{\Gamma}_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k \circ c$. Es gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \varphi(t) = \dot{\varphi}^j(t) \check{s}_j(t) + \varphi^i(\nabla_{\dot{c}} s_i)(c(t)) = (\dot{\varphi}^j(t) + \varphi^i(t) \dot{c}^k(t) \check{\Gamma}_{ki}^j(t)) \check{s}_j(t). \quad (I.3)$$

I.2.6.2. Krümmung

Definition I.2.41. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang ∇ . Die Abbildung $F: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ mit

$$(X, Y, s) \mapsto F(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$$

heißt *Krümmung* von ∇ . Ist $F = 0$, dann nennen wir den Zusammenhang *flach*.

Bemerkung I.2.42. Ist M eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang. Dann nennen wir $R := F$ *Riemannschen Krümmungstensor*.

Bemerkung I.2.43. Man rechnet direkt nach, dass F $C^\infty(M)$ -linear in allen Komponenten ist und $F(X, Y)s = -F(Y, X)s$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ gilt. Damit kann F als Element in $\Omega^2(M; \text{End}(E))$ aufgefasst werden.

Definition I.2.44. Wir definieren eine lineare Abbildung $D: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ durch

$$D(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $s \in \Gamma(E)$.

Bemerkung I.2.45. (i) In obiger Definition wird ∇ als Abbildung $\Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$, $s \mapsto \nabla s$ mit $(\nabla s)(X) = \nabla_X s$ aufgefasst. Das ist möglich, da ∇ tensoriell in der ersten Komponente ist.

(ii) Wohldefiniertheit folgt, da $D((f\alpha) \otimes s) = D(\alpha \otimes (fs))$ für $f \in C^\infty(M)$ gilt.

(iii) Für $k = 0$ ist $D = \nabla: \Omega^0(M; E) \cong \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$.

(iv) Die Abbildung $D \circ D: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M; E)$ ist die Krümmung F .

Beweis. Wir rechnen lokal: Sei $e_i = \partial_{x^i}$ für lokale Koordinaten x^i . Dann ist $\nabla s = dx^i \otimes \nabla_{e_i} s$ (denn $\nabla_X s = X^i \nabla_{\partial_{x^i}} s = dx^i(X) \nabla_{e_i} s$) und damit

$$\begin{aligned} D(dx^i \otimes \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) &= (-dx^i \wedge \nabla \nabla_{e_i} s)(e_j, e_k) \\ &= -dx^i(e_j) \nabla_{e_k} \nabla_{e_i} s + dx^i(e_k) \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s \\ &= -\nabla_{e_k} \nabla_{e_j} s + \nabla_{e_j} \nabla_{e_k} s = F(e_j, e_k)s. \end{aligned} \quad \square$$

1.2.6.3. Lokale Darstellung von ∇ und F mittels Differentialformen

Sei s_i ein lokaler Rahmen des Vektorbündels E vom Rang r über $U \subseteq M$. Dann ist $\nabla_X s_k = \omega_k^i(X) s_i^*$ mit $\omega_k^i(X) \in C^\infty(U)$. Da ∇ tensoriell in der ersten Komponente ist, ist $\omega_k^i \in \Omega^1(U)$. Die Menge der ω_k^i enthalten alle Informationen über ∇ auf U . Wir fassen alle zu $\omega = (\omega_k^i)$ zusammen und erhalten eine 1-Form mit Werten in $r \times r$ -Matrizen, also $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ – die sogenannte *Zusammenhangsform von ∇ auf U bzgl. des Rahmen s_i* .

Analog haben wir $F(X, Y)(s_k) = \Omega_k^i(X, Y) s_i$ mit $\Omega_k^i(X, Y) \in C^\infty(U)$. Da $F(X, Y) = -F(Y, X)$ und F tensoriell in X , und Y ist, haben wir $\Omega_k^i \in \Omega^2(U)$. Wir fassen diese zu $\Omega = (\Omega_k^i) \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ zusammen und nennen dies die *Krümmungsform von F auf U bzgl. des Rahmen s_i* .

Satz I.2.46 (Strukturgleichung (= die definierende Gleichung von F in der lokalen Darstellung)). *Es gilt $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$. Das ist Kurzschreibweise für*

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i.$$

Beweis. Übungsaufgabe 20. □

Wir betrachten als nächstes die ω und Ω die zu verschiedenen Trivialisierungen gehören:

Seien $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und analog $\varphi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^r$ mit den natürlichen Rahmen $s_i(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_i)$ und $t_i(x) := \varphi_\beta^{-1}(x, e_i)$, wobei e_i die Standardorthonormalbasis des \mathbb{R}^r ist. Sei $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ die Übergangsfunktion.

Die Zusammenhangsformen auf U_α, U_β bzgl. der Rahmen t_i bzw. s_i bezeichnen wir mit ω_α bzw. ω_β . Analog die Krümmungsformen mit Ω_α bzw. Ω_β .

Satz I.2.47. *Es gilt*

$$\omega_\beta = \mu_{\alpha\beta} \omega_\alpha \mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^{-1} = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \quad (\text{I.4})$$

$$\Omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \Omega_\alpha \mu_{\beta\alpha}. \quad (\text{I.5})$$

*Im Vergleich zu Christoffelsymbolen: Für Christoffelsymbole braucht man immer zusätzlich einen lokalen Rahmen auf TU - z.B. lokale Koordinaten: $\omega_k^i(X) = X^r \Gamma_{rk}^i$ mit $\nabla_{\partial_{x^r}} s_k = \Gamma_{rk}^i s_i$.

Beweis. Wir schreiben $\mu_{\alpha\beta}(x)(e_j) = \mu_j^i(x)e_i$.

Es ist $t_j(x) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, e_j)) = \varphi_\beta^{-1}(x, \mu_{\alpha\beta}(x)(e_j)) = \mu_j^i(x)s_i(x)$, wobei die letzte Gleichheit folgt, da φ_β die Vektorraumstruktur auf den Fasern respektiert, vgl. Definition I.1.5. Damit erhalten wir für $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}\nabla_X t_j &= \nabla_X(\mu_j^\ell s_\ell) \\ (\omega_\alpha)_j^i(X) t_i &= (d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X))s_\ell \\ (\omega_\alpha)_j^i(X) \mu_i^\ell &= d\mu_j^\ell(X) + \mu_j^k(\omega_\beta)_k^\ell(X),\end{aligned}$$

also $\mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha = d\mu_{\alpha\beta} + \omega_\beta\mu_{\alpha\beta}$. Mittels der äußeren Ableitung erhalten wir aus (I.4) zusammen mit $\Omega_\beta = d\omega_\beta + \omega_\beta \wedge \omega_\beta$ aus Satz I.2.46:

$$\begin{aligned}\Omega_\beta &= d(\mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1}) + (\mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1}) \wedge (\mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= -d\mu_{\alpha\beta} \wedge \omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} + \mu_{\alpha\beta}d\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} + \mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \mu_{\alpha\beta}^{-1}d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta} \wedge \mu_{\alpha\beta}^{-1}d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1} \\ &\quad + \mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} - d\mu_{\alpha\beta} \wedge \omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} - \mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1} + d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= \mu_{\alpha\beta}d\omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} + \mu_{\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1} = \mu_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\mu_{\alpha\beta}^{-1}.\end{aligned}\quad \square$$

Lemma I.2.48. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen über einer offenen Überdeckung U_α , Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ und zugehörigen lokalen Rahmen s_i^α . Seien $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ derart, dass (I.4) gilt. Dann gibt es einen Zusammenhang ∇ auf E , für welcher die ω_α die lokalen Darstellungen bzgl. obiger lokaler Trivialisierungen sind.

Beweis. Wir setzen $\nabla_X(s_i^\alpha)|_{U_\alpha} = (\omega_\alpha)_i^k(X)s_k^\alpha$ und setzen mittels Linearität und Leibnizregel fort. Die Kompatibilitätsbedingung (I.4) stellt sicher, dass ∇ nicht von der gewählten Trivialisierung abhängt. \square

I.2.7. Paralleltransport

Definition I.2.49. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, ∇ ein affiner Zusammenhang auf E und $c: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Ein Lift φ von c , d.h. ein Schnitt $\varphi \in \Gamma_c(E)$, heißt *horizontal*, falls $\frac{\nabla}{dt}\varphi(t) = 0$ gilt (vgl. Bemerkung I.2.40 für die Definition).

Satz I.2.50. In der Situation von Definition I.2.49. Sei $t_0 \in I$. Zu $\varphi_0 \in E_{c(t_0)}$ gibt es genau einen horizontalen Lift φ längs c mit $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Beweis. Der Beweis ist komplett analog zum Beweis für den Levi-Civita Zusammenhang in [3, Satz II.5.4] und beruht darauf, dass es sich hier um ein Anfangswertproblem für die ODE $\frac{\nabla}{dt}\varphi(t) = 0$ handelt. \square

Definition I.2.51. Sei $c: I \rightarrow M$ wie oben. Seien $t_0, t_1 \in I$. Die Abbildung

$$\|_{t_0, t_1}^c: E_{c(t_0)} \rightarrow E_{c(t_1)}, \varphi_0 \mapsto \varphi(t_1),$$

wobei $\varphi(t)$ der horizontale Lift von c mit $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ist, heißt *Paralleltransport* längs c .

Bemerkung I.2.52. (i) Der Paralleltransport stellt einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Fasern des Vektorbündels her. Beachte: Wie auch schon auf dem Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, ist der Paralleltransport abhängig von der Kurve entlang derer verschoben wird.

(ii) Ist c eine konstante Kurve, dann ist jeder horizontale Lift ein konstanter Schnitt entlang c .

(iii) Nach Picard-Lindelöf hängt der horizontale Lift auch glatt von den Anfangswerten ab.

Satz I.2.53.

(i) $\|_{t_0, t_1}^c$ ist eine lineare Abbildung.

(ii) $\|_{t_0, t_1}^c: E_{c(t_0)} \rightarrow E_{c(t_1)}$ ist ein Vektorraumisomorphismus. War der Zusammenhang metrisch, dann ist dieser Isomorphismus sogar eine Isometrie.

I. Bündeltheorie

(iii) $\|_{t_0, t_2}^c = \|_{t_1, t_2}^c \cdot \|_{t_0, t_1}^c$. Insbesondere ist $\|_{t_0, t_0}^c = Id$.

Beweis. (i) Linearität klar nach Linearität von ∇ .

(iii) Klar nach Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des AWP für horizontale Lifte.

(ii) Es ist eine lineare Abbildung zwischen gleich dimensionalen Vektorräumen. Es reicht also Injektivität zu zeigen: Sei $v \in E_{c(t_0)}$ mit $\|_{t_0, t_1}^c(v) = 0$. Dann ist $v = \|_{t_1, t_0}^c(0) = 0$.

Ist der Zusammenhang metrisch, dann folgt isometrisch ganz analog zum Beweis im Fall des Levi-Civita Zusammenhangs, vgl. [3, Satz II.5.7]. □

Bemerkung I.2.54. Insbesondere folgt aus dem letzten Satz: Betrachtet man eine Basis (e_1, \dots, e_r) von $E_{x=c(t_0)}$. Dann ist $(e_1(t) := \|_{t_0, t}^c e_1, \dots, e_r(t) := \|_{t_0, t}^c e_r)$ wieder eine Basis von $E_{c(t)}$. Wir nennen dann $(e_1(t), \dots, e_r(t))$ einen *parallelen Rahmen von E entlang c*.

Satz I.2.55. Für $\varphi \in \Gamma_c(E)$ gilt

$$\left(\|_{s, t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \varphi(s) \right) = \|_{s, t}^c \circ \nabla_{\frac{d}{ds} c}^* \varphi(s) = \frac{d}{ds} \circ \|_{s, t}^c \varphi(s).$$

Man beachte, dass $z(s) := \|_{s, t}^c \varphi(s) \in E_{c(t)}$ für alle s und deshalb $\frac{d}{ds} \circ \|_{s, t}^c \varphi(s) = \frac{d}{ds} z(s)$ als Differentiation im festen Vektorraum $E_{c(t)}$ sinnvoll ist.

Beweis. Sei $e_1(s), \dots, e_r(s)$ eine Basis von $E_{c(s)}$. Sei $(e_1(t), \dots, e_r(t))$ der zugehörige parallele Rahmen längs c . Sei $\varphi(t) = \varphi^j(t) e_j(t)$. Dann ist $\|_{s, t}^c \varphi(s) = \varphi^j(s) e_j(t)$ und damit $\frac{d}{ds} \|_{s, t}^c \varphi(s) = \dot{\varphi}^j(s) e_j(t)$. Andererseits ist

$$\frac{\nabla}{ds} (\varphi^j(s) e_j(s)) = \varphi^j(s) \underbrace{\frac{\nabla}{ds} e_j(s)}_{=0} + \dot{\varphi}^j(s) e_j(s) = \dot{\varphi}^j(s) e_j(s)$$

$$\|_{s, t}^c \circ \frac{\nabla}{ds} \varphi(s) = \|_{s, t}^c (\dot{\varphi}^j(s) e_j(s)) = \dot{\varphi}^j(s) e_j(t).$$

□

Vorl. 10 Man kann damit aus der Paralleltransport auch den Zusammenhang wieder konstruieren:

Folgerung I.2.56. Es gilt

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \varphi \right) (t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|_{t, t_0}^c (\varphi(t)) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$$

für jeden Schnitt φ längs c .

Interpretation der Krümmung mittels Paralleltransport.

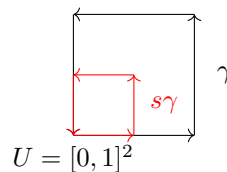
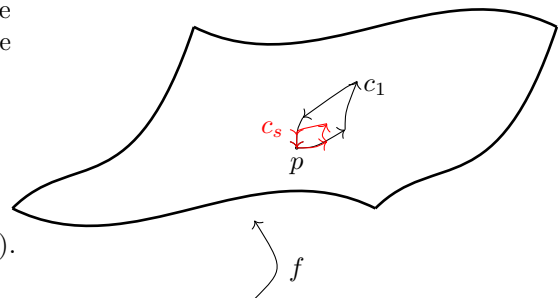
Sei $p \in M$ und $f: U = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine glatte Abbildung mit $f(0) = p$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Kurve mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (4t, 0) & t \leq 1/4 \\ (1, 4t) & 1/4 < t \leq 1/2 \\ (1 - 4t, 1) & 1/2 < t \leq 3/4 \\ (0, 1 - 4t) & 3/4 < t \end{cases}$$

Wir setzen $c: [0, 1]^2 \rightarrow M$, $c_s(t) = c(s, t) = f(s\gamma(t))$. Sei $\varphi_0 \in E_p$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} \|_{1, 0}^{c_s} \varphi_0 = 0$ und

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} |_{s=0} \|_{1, 0}^{c_s} \varphi_0 = 2R(u, v)\varphi_0$$

mit $u = \partial_x f(0 \in \mathbb{R}^2)$, $v = \partial_y f(0)$, vgl. Übungsaufgabe 23.



Horizontaler Lift von Tangentialvektoren.

Definition I.2.57. Sei $v \in T_x(M)$, $\pi(e) = x$. Wir definieren $v^* \in T_e E$ durch $X^*(e) := \dot{\tilde{\gamma}}_e(0) \in T_e E$, wobei $\tilde{\gamma}_e$ der horizontale Lift einer Kurve $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma_x(0) = x$ und $\dot{\gamma}_x(0) = X(x)$ mit $\tilde{\gamma}_e(0) = e$, vgl. Satz I.2.50, ist. Wir nennen v^* den *horizontalen Lift von v bzgl. (eines fest gewählten Zusammenhangs) ∇* .

Wohldefiniertheit von v^* folgt aus (I.3), der Formel für $\frac{\nabla}{dt}\varphi(t)$ in lokalen Koordinaten: Sei $\tilde{\gamma}_e(t) = \varphi^i(t)s_i(\gamma(t))$. Dann muss

$$\dot{\varphi}^j(t) + \varphi^i(t)\dot{\gamma}^k(t)\Gamma_{ki}^j(\gamma(t)) = 0 \text{ für alle } j \tag{I.6}$$

sein. Nun bestimmt e die $\varphi^i(0)$ und $\Gamma_{ki}^j(\gamma(0))$ und v die $\dot{\gamma}^k(0)$. Also ist $\dot{\varphi}^j(0)$ und damit v^* schon durch e und v eindeutig bestimmt.

Als nächstes wollen wir sehen, wie horizontale Lifte von γ durch verschiedene Elemente der Faser $\pi^{-1}(\gamma(0))$ zusammenhängen. Wegen der Linearität des Zusammenhangs, bzw. der Linearität von (I.6), erhalten wir direkt $\tilde{\gamma}_{\lambda \cdot e}(t) = \lambda \cdot \tilde{\gamma}_e(t)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

Anstatt einzelne Vektoren kann man auch ein ganzes Vektorfeld auf ein Vektorfeld auf E liften:

Lemma I.2.58. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Der horizontale Lift $X^*(e) := (X(\pi(e)))^*$ von X bzgl. ∇ ist ein glattes Vektorfeld auf E .

Beweis. Folgt aus glatter Abhängigkeit der Lösung von (I.3) von Anfangswerten und Koeffizienten. □

Lemma I.2.59. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

(i) $(fX + Y)^* = (f \circ \pi)X^* + Y^*$.

(ii) $d_e\pi(X^*(e)) = X(\pi(e))$ und damit ist der vertikale Tangentialraum $T_e(E_{\pi(e)}) = \ker d_e\pi$.

(iii) $X^*(\lambda \cdot e) = d_e S_\lambda(X^*(e)) = \lambda \cdot X^*(e)$, wobei $S_\lambda: E \rightarrow E$, $e \mapsto \lambda \cdot e$, ist.*

Beweis. (i) folgt aus der Linearität des Zusammenhangs

(ii) $d_e\pi(X^*(e)) = d_e\pi(\dot{\tilde{\gamma}}_e(0)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\pi \circ \tilde{\gamma}_e) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_{\pi(e)} = X(\pi(e))$.

(iii) folgt direkt aus $\tilde{\gamma}_{\lambda \cdot e}(t) = \lambda \cdot \tilde{\gamma}_e(t)$ □

Definition I.2.60. Für $e \in E$ nennen wir die Menge

$$Q_e E := \{v^* \in T_e E \mid v \in T_{\pi(e)} M\}$$

horizontaler Tangentialraum an E in e bzgl. ∇ .

Bemerkung I.2.61. (i) Wegen letztem Lemma ist $Q_e E \cong T_{\pi(e)} M$ ein Untervektorraum und $T_e E = T_e E_x \oplus Q_e E \cong E_x \oplus Q_e E$. Die jeweiligen Projektion auf den horizontalen bzw. vertikalen Part schreiben wir als $\text{hor}_e: T_e E \rightarrow Q_e E$ bzw. $\text{ver}_e: T_e E \rightarrow E_{\pi(e)}$.

(ii) Des weiteren ist die Abbildung $e \in E \mapsto Q_e E \in \text{Gr}_m(TE)$ ein glatter Schnitt im Grassmannbündel $\text{Gr}_m(TE) \rightarrow E$ zum Vektorbündel $TE \rightarrow E$ ($m = \dim M$, vgl. Definition I.1.2.7). Eine solche Abbildung nennt man eine *m-dimensionale Distribution von E* .

(iii) Nach (iii) von oben gilt $d_e S_\lambda(Q_e E) = Q_{\lambda \cdot e} E$ und damit auch $\text{ver}_{\lambda \cdot e} d_e S_\lambda = \lambda \text{ver}_e$.

Folgerung I.2.62. Abbildungen $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(E)$ mit den Eigenschaften aus Lemma I.2.59 stehen in 1:1 Beziehung zu Schnitten $QE \in \Gamma(\text{Gr}_m(TE))$, die mit einer direkten Zerlegung $T_e E = Q_e E \oplus T_e E_{\pi(e)} \cong Q_e E \oplus E_{\pi(e)}$ kommen, für die $\text{ver}_{\lambda \cdot e} d_e S_\lambda = \lambda \text{ver}_e$ gilt.

Lemma I.2.63. $[X, Y]^* = \text{hor}[X^*, Y^*]$

*Da S_λ faserweise linear ist, ist die Ableitung am Ende auch einfach nur Multiplikation mit λ , allerdings ändert sich der Definitions- und Wertebereich: $d_e S_\lambda: T_e E \rightarrow T_{\lambda \cdot e} E$. Aber oft werden diese Räume auch identifiziert.

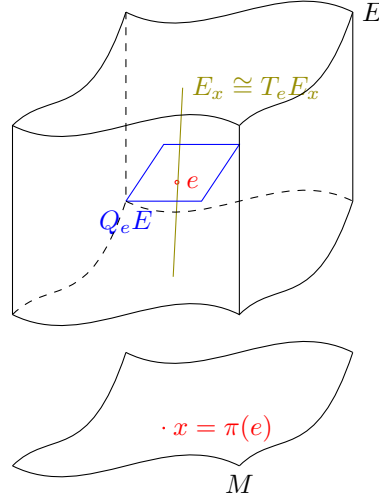


Abb. I.3.: Für ein $\varphi \in \Gamma(U)$ ($U \subseteq M$) gilt $\nabla_x \varphi = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(U)$ genau dann, wenn $T_{\varphi(x)}\varphi(U) = Q_{\varphi(x)}E$ für alle $x \in U$.

Beweis. Da auf beiden Seiten der Gleichung in jedem Punkt Elemente im horizontalen Tangentialraum stehen, reicht es zu zeigen, dass $d\pi([X^*, Y^*]) = [X, Y]$ gilt. Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (d\pi([X^*, Y^*]))(f)(\pi(e)) &= d_{\pi(e)}f d_e \pi([X^*, Y^*](e)) = [X^*, Y^*](f \circ \pi)(e) \\ &= X^*(Y^*(f \circ \pi)(e)) - Y^*(X^*(f \circ \pi)(e)) \\ Y^*(f \circ \pi)(e) &= d_{\pi(e)}f d_e \pi(Y^*(e)) \stackrel{\text{Lem. I.2.59.ii}}{=} d_{\pi(e)}f(Y(\pi(e))) = Y(f) \circ \pi(e) \\ X^*(Y^*(f \circ \pi)) &= d(Y(f))d\pi(X^*) = d(Y(f))(X \circ \pi) = X(Y(f)) \circ \pi \\ d\pi([X^*, Y^*](f)) &= [X, Y](f). \end{aligned} \quad \square$$

Kommt man auch zurück?

Beispiel I.2.64. Sei $E = M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ ein triviales Vektorbündel. Dann ist $T_e E \cong T_{\pi(e)}M \oplus \mathbb{R}^r$ und der flache Zusammenhang entspricht genau dieser Zerlegung von $T_e E$.

Lemma I.2.65. Die Abbildungen $X \in \mathfrak{X}(M) \rightarrow X^* \in \mathfrak{X}(E)$, die die Eigenschaften aus Lemma I.2.59 erfüllen, stehen in 1:1 Beziehung zu den affinen Zusammenhängen auf E .

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{X}(M) \rightarrow X^* \in \mathfrak{X}(E)$ wie im Lemma gegeben und $Q_e E$ die zugehörigen horizontalen Tangentialräume. Sei $s \in \Gamma(E)$. Wir setzen:

$$(\nabla s)(p): T_p M \xrightarrow{d_p s} T_{s(p)} E \xrightarrow{\text{ver}_{s(p)}} E_p,$$

also $(\nabla_X s)(p) = \text{ver}_{s(p)}(d_p s(X(p)))$.

Wir rechnen nach, dass ∇ ein affiner Zusammenhang ist: Linearität und Tensoriell in der ersten Komponente folgt aus der Linearität der Projektion ver_e . Weiterhin ist

$$\begin{aligned} (\nabla_X(fs))(p) - d_p f(X(p))s(p) - f(p)(\nabla_X s)(p) &= \text{ver}_{(fs)(p)} d_p(fs)(X(p)) - d_p f(X(p))s(p) - f(p)\text{ver}_{s(p)} d_p s(X(p)) \\ &= \text{ver}_{f(p)s(p)} f(p) d_p s(X(p)) + \underbrace{\text{ver}_{f(p)s(p)} d_p f(X(p))s(p) - d_p f(X(p))s(p)}_{\in E_p \cong T_{f(p)s(p)} E_p \subseteq T_{f(p)s(p)} E_p} - f(p)\text{ver}_{s(p)} d_p s(X(p)) \end{aligned}$$

Bem. I.2.61.iii und $\text{ver}_{\underline{f(p)s(p)}} \equiv \text{id}$ auf $T_{f(p)s(p)} E_p$ 0.

Kommen die horizontalen Lifte $X \mapsto X^*$ von einem Zusammenhang ∇ , so ist dieser gleich $\text{ver} \circ ds$, da der Zusammenhang lokal durch einen parallelen Rahmen eindeutig bestimmt ist und für $\nabla s = 0$ auch $\text{ver} ds = 0$ gilt. \square

Horizontaler Lift $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(E)$

$$\begin{cases} (fX + Y)^* = (f \circ \pi)X^* + Y^* \\ d\pi \circ X^* = X \circ \pi \\ X^*(\lambda e) = d_e S_\lambda(X^*(e))^* \end{cases}$$

$$Q_e E := \{X^*(e) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

$$X^*(e) := (d_e \pi : Q_e E \rightarrow T_{\pi(e)} M)^{-1}(X(\pi(e)))$$

Horizontale Tangentialräume $Q_e E \in \Gamma(\text{Gr}_m(TE))$

$$\begin{cases} T_e E = Q_e E \oplus T_e E_{\pi(e)} \cong Q_e E \oplus E_{\pi(e)} \\ \text{mit Projektion } \text{ver}_e : T_e E \mapsto E_{\pi(e)} \\ \text{ver}_{\lambda e} d_e S_\lambda = \lambda \text{ver}_e \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X^*(e) &:= \dot{\tilde{\gamma}}_e(0) \\ \text{mit } \nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}_{\pi(e)}(t)} \dot{\tilde{\gamma}}_e(t) &= 0 \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{\pi(e)}(0) &= X(\pi(e)) \end{aligned}$$

affiner Zusammenhang $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$

$$\begin{cases} \text{lin. in beiden Argumenten} \\ \nabla_{fX} s = f \nabla_X s \\ \nabla_X (fs) = f \nabla_X s + df(X)s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} s(t) = 0 \quad (s \in \Gamma_c(E)) \\ \implies \parallel_{t_1, t_2}^c s(t_1) = s(t_2) \end{aligned}$$

[2]†

Paralleltransport $\parallel_{t_1, t_2}^c : E_{c(t_1)} \rightarrow E_{c(t_2)}$

$$(\nabla_x s)(p) := \text{ver}_{s(p)} d_p s(X(p))$$

$$\nabla_X s_i^\alpha = (\omega_\alpha)_i^j(X) s_j^\alpha$$

lok. Zusammenhangsformen $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$

$$\begin{cases} \text{zu off. Überd. } \{U_\alpha\}, \text{ lok. Rahmen } s_i^\alpha \text{ von } E|_{U_\alpha}, \text{ Übergangsfkt. } \mu_{\alpha\beta} \\ \omega_\beta = \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} \end{cases}$$

Abb. I.4.: Äquivalente Beschreibungen von affinen Zusammenhängen auf einem \mathbb{K} -Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ vom Rang r und $\dim M = m$.

* $S_\lambda : E \rightarrow E, e \mapsto \lambda \cdot e$, ist die faserweise skalare Multiplikation.

† Dazu muss man erst einmal Paralleltransport unabhängig von einem Zusammenhang definieren - dazu führt [2] den Begriff Paralleltransportabbildung ein.

1.2.7.1. Vom Tangential- zum Repèrebündel

Vorl. 12 Sei M^m eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei

$$\text{GL}(M, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) \mid \nu_x \text{ ist Basis in } T_x M\} \text{ und } \text{GL}(M) := \bigsqcup_{x \in M} \text{GL}(M, x).$$

Wir setzen $\pi: \text{GL}(M) \rightarrow M, \nu_x \in \text{GL}(M, x) \mapsto x$.

Seien φ_α lokale Trivialisierungen von TM und $\mu_{\alpha\beta}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Da $\varphi_\alpha|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$ ein Vektorraumisomorphismus ist, gibt es einen Vektorraumisomorphismus $A_\alpha(x): T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varphi_\alpha(v) = (x, A_\alpha(x)v)$. Dann ist $\mu_{\alpha\beta}(x) = A_\beta(x)A_\alpha(x)^{-1} \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} \text{GL}(M, x) \rightarrow U_\alpha \times \text{GL}_m(\mathbb{R}) \\ \nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_m) &\mapsto (x, A_\alpha(x)(\nu_1, \dots, \nu_m)). \end{aligned}$$

Es ist

$$\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x \in U_\alpha \cap U_\beta, B \in \text{GL}_m(\mathbb{R})) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(B)).$$

Dies bestimmt nach Satz I.1.15 die Topologie und glatte Struktur von $\text{GL}(M)$ und macht es zu einem Faserbündel mit Strukturgruppe $\text{GL}_m(\mathbb{R})$ – das sogenannte *Repèrebündel* oder auch *Rahmenbündel* von M . Aber wir haben hier sogar mehr: Da die Übergangsfunktionen die gleichen wie von TM sind, gilt $\mu_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}_m(\mathbb{R}) \subseteq \text{Diff}(\text{GL}_m(\mathbb{R}))$.

Beachte: $\text{GL}(M)$ ist i.A. kein Vektorbündel, da es i.A. keine globalen Basisfelder auf M und damit überhaupt keine Schnitte gibt.

Ganz analog können wir aus einem Vektorbündel E vom Rang r mittels

$$\text{GL}(E, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_r) \mid \nu_x \text{ ist Basis von } E_x\} \text{ und } \text{GL}(E) := \bigsqcup_{x \in M} \text{GL}(E, x)$$

und die analogen Definitionen für π und φ_α das Faserbündel $\text{GL}(E)$ mit Faser und Strukturgruppe $\text{GL}_r(\mathbb{R})$. Haben wir allerdings eine Bündelmetrik h auf E (im Falle von TM z.B. eine Riemannsche Metrik) können wir auch folgendes Faserbündel definieren

$$\text{O}(E, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_r) \mid \nu_x \text{ ist orthonormale Basis von } E_x\} \text{ und } \text{O}(E) := \bigsqcup_{x \in M} \text{O}(E, x)$$

Aus einer lokalen Trivialisierung φ_α von E können wir auch immer eine machen, für die eine Orthonormalbasis f_i bzgl. h auf die Standardbasis e_i des \mathbb{R}^r abgebildet wird, indem man $\tilde{\varphi}_\alpha := (\text{id} \times F_\alpha) \circ \varphi_\alpha$ mit $F_\alpha(A_\alpha(x)f_i) := e_i$ setzt. Für eine solche Trivialisierung haben die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}(x)$ sogar Werte in $\text{O}(r)$ (für reelle Vektorbündel) bzw. $U(r)$ (für komplexe Vektorbündel), da Orthonormalbasen wieder auf Orthonormalbasen abgebildet werden müssen. D.h. obige Konstruktion liefert lokale Trivialisierungen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} \text{O}(M, x) \rightarrow U_\alpha \times \text{O}(r) \\ \nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_r) &\mapsto (x, F_\alpha \circ A_\alpha(x)(\nu_1, \dots, \nu_r)). \end{aligned}$$

und damit ist $\text{O}(E) \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp und Strukturgruppe $\text{O}(r)$.

Im Falle eines orientierten reellen Vektorbündels E erhält man analog

$$\text{GL}_+(E, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_r) \mid \nu_x \text{ ist positiv orientierte Basis von } E_x\} \text{ und } \text{GL}_+(E) := \bigsqcup_{x \in M} \text{GL}(E, x)$$

ein Faserbündel mit Fasertyp und Strukturgruppe $\text{GL}_{r,+}(\mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}_r(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ oder im Falle eines orientierten Vektorbündels E mit Bündelmetrik

$$\text{SO}(E, x) := \{\nu_x = (\nu_1, \dots, \nu_r) \mid \nu_x \text{ ist positiv orientierte Orthonormalbasis von } E_x\}$$

und $\text{SO}(E) := \bigsqcup_{x \in M} \text{GL}(E, x)$ ein Faserbündel mit Fasertyp und Strukturgruppe $\text{SO}(r)$ bzw. $\text{SU}(r)$.

I.3. Hauptfaserbündel

I.3.1. Definition

Definition I.3.1. Ein $(G\text{-})$ Hauptfaserbündel ist ein Faserbündel $\pi: E \rightarrow M$, dessen Fasertyp eine Liegruppe G ist und für welches es lokale Trivialisierungen gibt, deren Übergangsfunktionen Werte in G annehmen. Dabei wird G mittels $g \mapsto (L_g: h \mapsto g \cdot h)$ als Teilmenge von $\text{Diff}(G)$ verstanden. Solche Übergangsfunktionen nennen wir dann G -Kozykel.

Vorl. 13

Bemerkung I.3.2. Es wird nicht gefordert, dass für jede Wahl von lokalen Trivialisierungen, die Übergangsfunktionen Werte in G annehmen.

Bemerkung I.3.3. Seien φ_α lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels, deren Übergangsfunktionen Werte in G annehmen. Wir definieren $\Psi: G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto \Psi(g, e) =: e \cdot g$ durch

$$(g \in G, e \in \pi^{-1}(\{x\}) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)) \xrightarrow{\text{id}_G \times \varphi_\alpha} (g, (x, h)) \mapsto (x, h \cdot g) \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(x, hg). \quad (\text{I.7})$$

Wohldefiniertheit folgt, da dies als Rechtswirkung mit der Linkswirkung von $\mu_{\alpha\beta}(x)$ kommutiert.

Mit letzter Bemerkung findet man äquivalente Definitionen eines G -Hauptfaserbündels:

Satz I.3.4. Sei G eine Liegruppe und $\pi: E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) $\pi: E \rightarrow M$ ist ein G -Hauptfaserbündel.
- (2) Es gibt eine glatte Rechtswirkung $G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto e \cdot g$ und G -äquivalente lokale Trivialisierungen (d.h. es gibt eine offene Überdeckung U_α von M und Diffeomorphismen $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ mit $\text{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ und $\varphi_\alpha(e \cdot g) = \varphi_\alpha(e) \cdot g$ für alle $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ und $g \in G$, wobei G auf $U_\alpha \times G$ mittels $(x, h) \cdot g = (x, hg)$ wirkt.)
- (3) Es gibt eine glatte Rechtswirkung $G \times E \rightarrow E$, $(g, e) \mapsto e \cdot g$, die fasertreu* und einfach-transitiv auf den Fasern † ist, und für alle α eine offene Überdeckung U_α von M und lokale Schnitte $U_\alpha \rightarrow E$.

Beweis. (1) \rightarrow (2) Mit der Rechtswirkung aus (I.7) sind die φ_α nach Konstruktion dann direkt G -äquivalent.

(2) \rightarrow (1) Es bleibt nur die Übergangsfunktionen zu berechnen: Es ist $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, h) = (x, \mu_{\alpha\beta}(x)(h))$ mit $\mu_{\alpha\beta}(x): G \rightarrow G$. Wegen der G -Äquivarianz folgt $\mu_{\alpha\beta}(x)(hg) = \mu_{\alpha\beta}(x)(h) \cdot g$ und damit $\mu_{\alpha\beta}(x) = L_{\mu_{\alpha\beta}(x)(e)}$.

(2) \rightarrow (3) Fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt, da diese Eigenschaften für die Wirkung auf $U_\alpha \times G$ gelten, und aus der G -Äquivarianz der lokalen Trivialisierungen. Lokale Schnitte erhält man z.B. durch $x \in U_\alpha \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(x, 1 \in G)$.

(3) \rightarrow (2) Aus den lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow E$ wollen wir uns geeignete lokale Trivialisierungen bauen - wir definieren die Inversen

$$\psi_\alpha: (x, g) \in U_\alpha \times G \mapsto s_\alpha(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Die ψ_α sind glatt. Aus fasertreu und einfach-transitiv auf den Fasern folgt insbesondere, dass $\pi^{-1}(\pi(e)) = \{e \cdot g \mid g \in G\}$ und ψ_α ein G -äquivarianter Diffeomorphismus ist. Damit sind $\varphi_\alpha := \psi_\alpha^{-1}$ die gesuchten lokalen Trivialisierungen. \square

Beispiel I.3.5. Sei G eine Liegruppe und M eine Mannigfaltigkeit.

- (i) Das triviale Faserbündel $\text{pr}_2: G \times M \rightarrow M$ ist ein G -Hauptfaserbündel.
- (ii) Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $f: M' \rightarrow M$ glatt. Dann ist f^*E ein G -Hauptfaserbündel über M' , vgl. Abschnitt I.1.2.6 für die Konstruktion der Übergangsfunktionen für f^*E .

*= bildet Fasern auf Fasern ab

†= Für alle $x \in M$ und alle $e, e' \in \pi^{-1}(x)$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $e \cdot g = e'$.

- (iii) Eine (*universelle*) *Überlagerung* einer Mannigfaltigkeit M ist eine (einfach-zusammenhängende) Mannigfaltigkeit \tilde{M} zusammen mit einer stetigen surjektiven Abbildung $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$, so dass es für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U von p gibt für die $\pi^{-1}(U)$ eine Vereinigung disjunkter offener Mengen in \tilde{M} ist und jede dieser offenen Mengen durch π homöomorph auf U abgebildet wird. Universelle Überlagerungen können als G -Hauptfaserbündel aufgefasst werden, wobei $G = \pi_1(M)$ die Fundamentalgruppe* ist, vgl. Übungsaufgabe 26.
- (iv) Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G , dann ist $\pi: G \rightarrow G/H$ nach Satz A.2.4 und Folgerung A.2.6 ein Faserbündel mit Fasertyp H , lokale Schnitte $s: U_{[g]} \rightarrow G$ und lokalen Trivialisierungen $\varphi(g \in U_{[g]}) = (gH, s(gH)^{-1}g) \in U_{[g]} \times H$. Weiterhin wirkt H von rechts auf G , diese Wirkung respektiert die Fasern von $\pi: G \rightarrow G/H$ und auf jeder Faser $\pi^{-1}(gH)$ diese Wirkung ist einfach-transitiv (da für $h \in H$, $gh_1, gh_2 \in \pi^{-1}(gH)$ ist $gh_1h = gh_2$ genau dann, wenn $h = h_1^{-1}h_2$ ist). Zusammen mit Satz I.3.4 ist $\pi: G \rightarrow G/H$ damit ein H -Hauptfaserbündel. Alternativ kann man auch direkt überprüfen, dass die Übergangsfunktionen zu obigen Trivialisierungen in H landen.
- (v) Sei $G \times E \rightarrow E$ eine freie und eigentliche Rechtswirkung. Dann ist $M := E/G$ versehen mit der glatten Struktur aus Satz A.2.13 eine Mannigfaltigkeit, die kanonische Projektion $\pi: E \rightarrow M$ eine Submersion und $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel.

Andererseits sind alle G -Hauptfaserbündel von dieser Form: Freiheit der Wirkung ist klar. Es bleibt also zu zeigen, dass die Wirkung auch eigentlich ist. Betrachten wir also die Abbildung $\iota: G \times E \rightarrow E \times E$, $(g, e) \mapsto (e \cdot g, e)$. Sei K ein Kompaktum von $E \times E$. Sei $(g_i, e_i) \in \iota^{-1}(K)$. Dann ist $(e_i \cdot g_i, e_i) \in K$ und es gibt Teilfolgen e_{i_j} bzw. $e_{i_j} \cdot g_{i_j}$ die in E wegen der Kompaktheit von K konvergieren gegen ein e bzw. f . Sei $x = \pi(e)$. Dann ist $x = \pi(f)$. Sei $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ eine G -äquivalente lokale Trivialisierung von E mit $x \in U$. Dann ist für j groß genug $e_{i_j}, e_{i_j} \cdot g_{i_j} \in \pi^{-1}(U)$, d.h. $e_{i_j} = \varphi(x_{i_j}, h_{i_j})$ und $e_{i_j} \cdot g_{i_j} = \varphi(x_{i_j}, h'_{i_j})$. Da $e_{i_j} \rightarrow e = \varphi(x, h)$, geht $x_{i_j} \rightarrow x$ in M und $h_{i_j} \rightarrow h$ in G . Analog $h'_{i_j} \rightarrow h'$ mit $f = \varphi(x, h')$. Wegen der G -Äquivarianz von φ ist $h'_{i_j} = h_{i_j} \cdot g_{i_j}$ und damit konvergiert g_{i_j} gegen $h^{-1}h'$ in G und $\iota^{-1}(K)$ ist kompakt.

Definition I.3.6. Zwei G -Hauptfaserbündel $\pi: E \rightarrow M$ und $\tilde{\pi}: \tilde{E} \rightarrow M$ heißen *isomorph*, falls es einen G -äquivalenten[†] Diffeomorphismus $f: E \rightarrow \tilde{E}$ mit $\tilde{\pi} \circ f = \pi$ gibt. Die Menge der Isomorphieklassen von G -Hauptfaserbündel über M bezeichnen wir mit $\text{Prin}_G(M)$.

Sind $E = \tilde{E}$ und $\pi = \tilde{\pi}$ mit zwei verschiedenen G -Wirkungen isomorph, so nennt man den Isomorphismus einen *vertikalen Automorphismus*[‡] Die Menge der vertikalen Automorphismen bezeichnen wir mit $\text{Aut}_M(E)$.

Sind zwei G -Hauptfaserbündel isomorph (als G -Hauptfaserbündel), dann sind sie auch als Faserbündel isomorph. Andererseits können zwei G -Hauptfaserbündel als Faserbündel isomorph sein, aber nicht als G -Hauptfaserbündel, vgl. Übungsaufgabe 27.

Satz I.3.7. Ein Hauptfaserbündel ist genau dann *trivial*, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.

Beweis. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Ist E trivial, dann gibt es einen Hauptfaserbündelisomorphismus $f: G \times M \rightarrow E$ und mit $s(x) = f(1, x)$ einen globalen Schnitt in E . Gibt es umgekehrt einen globalen Schnitt in E . Dann definiert $f: G \times M \rightarrow E$, $(x, g) \mapsto s(x) \cdot g$ einen Hauptfaserbündelisomorphismus. \square

Beispiel I.3.8. (i) Das Hopfbündel ist nicht trivial, da sonst S^3 diffeomorph zu $S^1 \times S^2$ sein müsste.

(ii) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Dann ist $\pi^*E \rightarrow E$ trivial: Es ist $\pi^*E = \{(e, e') \in E \times E \mid \pi(e) = \pi(e')\}$ und damit ist $e \in E \mapsto (e, e) \in \pi^*E$ ein globaler Schnitt.

*Sei $x_0 \in M$. Dann ist $\pi_1(M, x_0) := \{\gamma: S^1 = [0, 1]/(0 \sim 1) \rightarrow M \mid \gamma(0) = x_0\} / (\text{Homotopie})$ die Fundamentalgruppe von M in x_0 . Das ist wirklich eine Gruppe mit der Hintereinanderausführung zweier Kurven γ , vgl. [5, Kap. VIII §5]. Ist M zusammenhängend, sind $\pi_1(M, x_0)$ zu verschiedenen x_0 isomorph und deshalb schreibt man zumeist nur $\pi_1(M)$.

[†] G -äquivalent bezieht sich auf die Rechtswirkung aus (I.7), also $f(e \cdot g) = f(e) \cdot g$ für alle $g \in G$, $e \in E$.

[‡]Das 'vertikal' steht hier nur dabei, da viele Quellen bei Isomorphismen von Bündeln auch Diffeomorphismen auf M zulassen und nicht nur die Identität wie bei uns. Deshalb sind bei uns Automorphismen automatisch vertikal (auf M die Identität), wogegen es sonst extra gefordert werden muss.

Wir wollen als nächstes vertikale Automorphismen charakterisieren: Wir betrachten dazu G als rechte G -Mannigfaltigkeit mit der Konjugationswirkung: $(g, h) \mapsto h^{-1}gh$. Sei $\text{Hom}^G(E, G)$ die Menge der G -äquivarianten Abbildungen $u: E \rightarrow G$, also alle Abbildungen u mit $u(\Psi(h, e)) = h^{-1}u(e)h$ für $h \in G$ und $e \in E$. Mit der punktweisen Multiplikation ist $\text{Hom}^G(E, G)$ eine Gruppe:

$$\text{abgeschlossen: } (uv)(\psi(h, e)) = u(\psi(h, e))v(\psi(h, e)) = h^{-1}u(e)hh^{-1}v(e)h = h^{-1}(uv)(e)h$$

$$\text{Einselement: } e \in E \mapsto 1 \in G$$

$$\text{Inverses zu } u: u^{-1}: e \in E \mapsto u(e)^{-1} \in G$$

Lemma I.3.9.

(i) Für $u \in \text{Hom}^G(E, G)$ definiert $f_u(e) := \Psi(u(e), e)$ einen vertikalen Automorphismus von E .

Vorl. 14

(ii) Die Abbildung $u \in \text{Hom}^G(E, G) \mapsto f_u \in \text{Aut}_M(E)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. (i) $f_{u^{-1}}$ ist das Inverse zu f_u . Damit ist f_u ein Diffeomorphismus. Es bleibt die Äquivarianz:

$$f_u(\Psi(h, e)) = \Psi(u(\Psi(h, e)), \Psi(h, e)) = \Psi(h^{-1}u(e)h, \Psi(h, e)) \stackrel{\text{Rechtsw.}}{=} \Psi(h, \Psi(u(e), e)) = \Psi(h, f_u(e)).$$

(ii) Gruppenmorphismus klar. Injektivität folgt, da die Gruppenwirkung Ψ frei ist. Surjektivität: Sei $f \in \text{Aut}_M(E)$ und $p \in M$. Dann liegen $f(p)$ und p in der gleichen Faser und es gibt ein $u(p) \in G$ mit $f(p) = \Psi(u(p), p)$. Dies definiert eine Abbildung $u: E \rightarrow G$. Es bleibt zu zeigen, dass $u \in \text{Hom}^G(E, G)$ gilt, dann folgt Surjektivität mit $f = f_u$:

$$\Psi(u(e)h, e) = \Psi(h, \Psi(u(e), e)) = \Psi(h, f(e)) = f(\Psi(h, e)) = \Psi(u(\Psi(h, e)), \Psi(h, e)) = \Psi(hu(\Psi(h, e)), e)$$

Da die Wirkung frei ist, folgt $u(e)h = hu(\Psi(h, e))$. □

Wir erinnern uns, dass sowohl Faserbündel als auch Vektorbündel aus ihren Übergangsfunktionen wieder rekonstruiert werden konnten. Das gleiche gilt für Hauptfaserbündel:

Satz I.3.10. (Hauptfaserbündelversion von Satz I.1.8) Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) ein eindeutiges G -Hauptfaserbündel, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

Satz I.3.11. (Hauptfaserbündelversion von Folgerung I.1.13) Seien $E_i \rightarrow M$, $i = 0, 1$, G -Hauptfaserbündel, lokalen Trivialisierungen φ_α^i und Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^i: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$. Für alle α, β seien die $\mu_{\alpha\beta}^0$ und $\mu_{\alpha\beta}^1$ homotope Abbildungen mit Homotopie $\mu_{\alpha\beta}^t: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, so dass zu jeder Zeit $t \in [0, 1]$ die Kozykelbedingung erfüllt ist. Dann sind E_0 und E_1 isomorph.

Folgerung I.3.12. Sei H eine Lieuntergruppe von G , so dass es eine Homotopieäquivalenz $F: G \times [0, 1] \ni (g, t) \mapsto F_t(g) := F(g, t) \in G$ von H nach G gibt, so dass F_t für alle t ein Gruppenhomomorphismus ist. Dann ist $\text{Prin}_G(M) \cong \text{Prin}_H(M)$.

Beweisskizze. Seien nun $\mu_{\alpha\beta}$ die Übergangsfunktionen eines G -Hauptfaserbündels E über M . Wir setzen $\mu_{\alpha\beta}^t = F_t \circ \mu_{\alpha\beta}$. Dann ist nach letztem Satz E isomorph zum G -Hauptfaserbündel mit Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}^1 = F_1 \circ \mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow H \subseteq G$. Zu diesen gehört aber auch ein eindeutig bestimmtes H -Hauptfaserbündel. □

Beispiel I.3.13. $H = O(n) \subseteq G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$. Wir wählen $F_t(g) = (1 - t + t|\det g^{-1}|^{\frac{1}{n}})g$. Wegen $1 - t + t|\det g|^{-\frac{1}{n}} > 0$, bildet F_t auch wirklich nach $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ ab. Also ist $\text{Prin}_{\text{Gl}_n(\mathbb{R})}(M) \cong \text{Prin}_{O(n)}(M)$.

I.3.2. Vom Repère-Bündel zurück zum Tangentialbündel – Assoziierte Bündel

In Abschnitt I.2.7.1 haben wir aus dem Tangentialbündel TM bzw. einem Vektorbündel vom Rang r , das Repèrebündel $\text{GL}(M)$ bzw. das Faserbündel $\text{GL}(E)$, jeweils ein $\text{GL}_m(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel, konstruiert. Nun wollen wir sehen, wie man zurückkommt:

I. Bündeltheorie

Sei $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die definierende Darstellung von $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, also $\rho = \mathrm{id}: \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. Auf der Menge $\mathrm{GL}(M) \times \mathbb{R}^m$ betrachten wir die $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ -Wirkung

$$((s_1, \dots, s_m) \in \mathrm{GL}(M, x), y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m) \cdot g := ((s_1, \dots, s_m) \cdot g, \rho(g^{-1})y)$$

und setzen

$$E := (\mathrm{GL}(M) \times \mathbb{R}^m) / \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \quad \text{mit } \hat{\pi}: E \rightarrow M, [(s, y)] \mapsto \pi(s).$$

Die Abbildung

$$f: (\mathrm{GL}(M) \times \mathbb{R}^m) / \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \rightarrow TM, [(s_1, \dots, s_m), y = (y^1, \dots, y^m)] \mapsto y^i s_i$$

erfüllt $\pi \circ f = \hat{\pi}$ und ist bijektiv.

Dies ist ein allgemeines Konstruktionsprinzip:

Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und sei $\rho: G \times F \rightarrow F$ eine Linkswirkung auf einer Mannigfaltigkeit F . Auf dem Produkt $P \times F$ haben wir mittels

$$(p, v) \cdot g := (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

eine G -Rechtswirkung. Da die G -Wirkung auf P schon frei ist, ist auch diese G -Wirkung auf $P \times F$ frei. Es bezeichne

$$E := (P \times F) / G =: P \times_{\rho} F$$

den zugehörigen Quotientenraum (versehen mit der Quotiententopologie), $[(p, v)]$ die Äquivalenzklasse von (p, v) und

$$\hat{\pi}: E \rightarrow M, [(p, v)] \mapsto \pi(p)$$

die zugehörige Projektion.

Satz I.3.14. $\pi: E \rightarrow M$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp F – das zu P und ρ assoziierte Faserbündel

Beweisskizze. Da P ein G -Hauptfaserbündel ist, gibt es G -äquivalente lokale Trivialisierungen

$$\varphi_{\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times G, p \mapsto (\pi(p), \psi_{\alpha}(p)).$$

Seien $\mu_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow G$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\alpha}: \hat{\pi}^{-1}(U_{\alpha}) &\rightarrow U_{\alpha} \times F \\ [(p, v)] &\mapsto (\pi(p), \psi_{\alpha}(p) \cdot v). \end{aligned}$$

Es ist $\hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow F, [(p, v)] \mapsto \psi_{\alpha}(p) \cdot v$ eine Bijektion und macht damit $\hat{\pi}^{-1}(x)$ zu einer Mannigfaltigkeit (man überprüft, dass die glatte Struktur unabhängig von der Wahl von α ist). Damit ist $\hat{\varphi}_{\alpha}|_{\hat{\pi}^{-1}(x)}: [(p, v)] \in \hat{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$ glatt und die Übergangsfunktionen sind $\tilde{\mu}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \mathrm{Diff}(F), x \mapsto L_{\mu_{\alpha\beta}(x)}$, und erfüllen damit die Kozykelbedingung. Nach dem Bündeltrivialisierungslemma I.1.15 folgt die Behauptung. \square

Satz I.3.15. *Wir sind in obiger Situation. Sei weiterhin $V := F$ ein r -dimensionaler Vektorraum und $\rho: G \times V \rightarrow V$ eine Darstellung. Dann ist das assoziierte Bündel $P \times_{\rho} V$ ein Vektorbündel vom Rang r .*

Beweisskizze. Wir versehen die Fasern von $P \times_{\rho} V$ mit einer Vektorraumstruktur, indem wir fordern, dass für $p \in P$ die Abbildungen $\iota_p: V \rightarrow P \times_{\rho} V, v \mapsto [(p, v)]$, linear und damit Vektorraumisomorphismen sind. Damit dies wohldefinierte Vektorraumstrukturen auf den Fasern E_p gibt, ist zu zeigen, dass für $E_p = E_{p'}$ die Abbildung ι_p genau dann linear ist, wenn $\iota_{p'}$ linear ist. Wegen $E_p = E_{p'}$ gibt es ein $g \in G$ mit $p \cdot g = p'$. Es gilt

$$\iota_{p'=p \cdot g}(v) = [(p \cdot g, v)] = [(p, \rho(g)v)] = \iota_p \circ \rho(g)v.$$

Da die ρ_g Vektorraumisomorphismen sind, folgt die obige Behauptung und wir haben die Fasern mit einer Vektorraumstruktur ausgestattet.

Man zeigt dann noch, dass die Abbildungen $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_{\alpha}|_{E_p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow V$ für alle α und $p \in \pi^{-1}(U_{\alpha})$ linear sind. \square

Folgerung I.3.16. Die Isomorphieklassen von $GL_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln über einer Mannigfaltigkeit M stehen in $1 : 1$ Beziehung zu Isomorphieklassen von $GL_r(\mathbb{K})$ -Hauptfaserbündeln und $\rho: GL_r(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$ assoziierten Vektorbündeln über M von Rang r (hier isomorph als Vektorbündel) und damit ins $1 : 1$ Beziehung zu Vektorbündeln M vom Rang r .

Beweis. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r . Dann haben wir $E \mapsto GL(E) \mapsto GL(E) \times_\rho \mathbb{K}^r$. Da E und $GL(E) \times_\rho \mathbb{K}^r$ die gleichen Übergangsfunktionen haben, sind sie isomorph. \square

I.3.3. Exkurs: Čech-Kohomologie

Wir betrachten die Hauptfaserbündelversion von Satz I.1.9:

Satz I.3.17. Gegeben zwei G -Hauptfaserbündel E, E' über M . Zu einer gegebenen Überdeckung $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_\alpha$ von M seien die Übergangsfunktionen $\mu_{\alpha\beta}$ bzw. $\mu'_{\alpha\beta}$. Dann sind die G -Hauptfaserbündel genau dann isomorph (als G -Hauptfaserbündel), falls es glatte Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, G)$ mit

$$\mu_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \mu'_{\alpha\beta} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{I.8}$$

Insbesondere ist das Hauptfaserbündel E trivial, wenn $\mu_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ für geeignete h_α gilt.

Wir betrachten eine Familie von $h = \{h_\alpha\}_\alpha$ als 'Čech' 0-Kokette mit Koeffizienten in G und eine Familie $\mu = \{\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha\beta}$ als 'Čech' 1-Kokette mit Koeffizienten in G . Das heißt Übergangsfunktion $\mu_{\alpha\beta}$ bilden eine 1-Kokette, der die Kozykelbedingung erfüllt. Wir sagen zwei 1-Koketten $\mu_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha\beta}$ sind genau dann äquivalent oder kohomolog, wenn es eine 0-Kokette gibt, so dass (I.8) erfüllt ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen von Übergangsfunktionen, also 1-Kozyklen, die die Kokettenbedingung erfüllen, bezeichnen wir mit $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$. Nach Konstruktion repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von Vektorbündeln über M vom Rang r , welche über den offenen Mengen von \mathfrak{U} trivialisiert werden können.

Sei (\mathfrak{V}, ι) eine Verfeinerung von \mathfrak{U} , d.h. \mathfrak{V} ist eine offene Überdeckung von M und $\iota: \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ mit $V \subseteq \iota(V)$ für alle $V \in \mathfrak{V}$. Durch Einschränkung der Kozyklen erhalten wir eine Abbildung $r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}: \check{H}^1(\mathfrak{U}; G) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{V}; G)$. Man kann zeigen, dass diese Abbildung unabhängig von der Wahl von ι ist und dass $r_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} = r_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}} r_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$ für eine Folge von Verfeinerungen $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ gilt.

Nun können wir den direkten Limes nehmen

$$\check{H}^1(M; G) := \varinjlim \check{H}^1(\mathfrak{U}; G).$$

Nun repräsentiert diese Menge die Isomorphieklassen von G -Hauptfaserbündeln über M . Sind alle $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ zusammenziehbar. Dann ist $\check{H}^1(M; G) = \check{H}^1(\mathfrak{U}; G)$.

Ganz analog kann man sehen, dass $\check{H}^1(M; GL_r(\mathbb{K}))$ bijektiv zur Menge der \mathbb{K} -Vektorbündel über M vom Rang r ist.

Aus einer 0-Kokette h kann man durch $(d_1 h)_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta^{-1}$ einen 1-Kokette machen. 1-Kokette μ für die es einen 0-Kokette h mit $\mu = d_1 h$ gibt, nenn man Korand.

Man kann die Definitionen zu 2-Koketten $\xi = (\xi_{\alpha\beta\gamma}: U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow G)_{\alpha\beta\gamma}$ mit $(d_2 \mu)_{\alpha\beta\gamma} := \mu_{\gamma\beta} \mu_{\alpha\gamma}^{-1} \mu_{\beta\alpha}$ erweitern. D.h. $d_2 \mu = 0$ ist äquivalent zu unserer Kozykelbedingung.

Insgesamt erhalten wir so aber keine exakte Sequenz $0 \xrightarrow{d_0} \{h\} \xrightarrow{d_1} \{\mu\} \xrightarrow{d_2} \{\xi\} \dots$, denn ist G nicht abelsch, ist der Randoperator d von oben i.A. kein Gruppenhomomorphismus und damit $\ker d_k$ bzw. im d_k keine Untergruppen. Insbesondere kann $d^2 h = d_{k+1} d_k h = 1$ nur für abelsche Gruppen garantiert werden.

Ist G abelsch, gibt die Definition $\check{H}^k(\mathfrak{U}; G) := \ker d_{k+1} / \text{im } d_k$ Gruppen, die k -te Čech-Kohomologiegruppe von M mit Koeffizienten in G .

Im Allgemeinen? Da $d_0 = 0$ ist, spielt das für \check{H}^0 keine Rolle und wir haben $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G) = \ker d_1$ und sehen $h \in \ker d_1$ genau dann, wenn $h_\alpha = h_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt. Damit können wir $\check{H}^0(\mathfrak{U}; G)$ mit $C^\infty(M, G)$ identifizieren.

*Wir nehmen bei Hauptfaserbündel immer implizit an, dass wir die lokalen Trivialisierungen immer schon so gewählt haben, dass die Übergangsfunktionen in G abbilden.

Passt auch unser \check{H}^1 von oben in diesen Rahmen? Ist G nicht abelsch, ist weder $\ker d_2$ noch im d_1 eine Gruppe. Aber die 0-Koketten wirken auf den 1-Koketten

$$(h \cdot \mu)_{\alpha\beta} = h_\alpha \mu_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}.$$

Man rechnet nach, dass diese Wirkung die Kozykelbedingung erhält, damit ist $\check{H}^1(\mathfrak{U}; G) = \ker d_2 / \sim$, wobei \sim obige Wirkung ist. Ist G nicht abelsch, dann ist $\check{H}^1(M; G)$ jedoch keine Gruppe. Es ist nur eine Menge, die aber ein ausgezeichnetes Element besitzt (eine punktierte Menge) – das triviale Vektorbündel vom Rang r .

Zusammenhang zur singulären Kohomologie: Ist G abelsch* und diskret, dann ist $\check{H}^1(M; G)$ einfach die erste Čech-Kohomologie von M mit Koeffizienten in G . Insbesondere ist $\check{H}^1(M; G)$ dann eine Gruppe und stimmt mit der singulären Kohomologiegruppe $H_{\text{sing}}^1(M, G)$ überein. Nur abelsch reicht nicht: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (mit der kontinuierlichen Topologie†) ist $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = 0$ für alle M und $i > 0$ ([4, Thm. 2.11.1 und Thm. 2.11.2] für garbentheoretische Argumente - folgt im Prinzip, da \mathbb{R} und \mathbb{C} eine Zerlegung der Eins erlauben.)

Beispiel I.3.18. $\text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(M) \stackrel{\text{Folg I.3.16}}{\cong} \text{Prin}_{\text{GL}_1(\mathbb{R})}(M) \stackrel{\text{Bsp I.3.13}}{\cong} \text{Prin}_{O(1) \cong \mathbb{Z}_2}(M) \cong \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong H_{\text{sing}}^1(M, \mathbb{Z}_2)$
 (Die \mathbb{Z}_2 -Hauptfaserbündel über M entsprechen den zweifachen Überlagerungen von M .)
 Insbesondere ist $\text{Vec}_{\mathbb{R}}^1(S^1) \cong H_{\text{sing}}^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ – das sind die Isomorphieklassen des trivialen Bündels und des Möbiusbandes, vgl. Übungsaufgabe 5. In diesem Falle kann man auch $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ auch direkt ausrechnen, haben wir sogar schon in Beispiel I.1.14.

Was aber immer noch gilt (mit dem gleichen Beweis wie in der standard Čech-Kohomologietheorie [4, Chapter I.§2]):

Ist $1 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G' \rightarrow 1$ eine exakte Folge von topologischen Gruppen, dann gibt es eine exakte Folge von punktierten Mengen:

$$\{*\} \rightarrow \check{H}^0(M; K) \xrightarrow{i_*} \check{H}^0(M; G) \xrightarrow{j_*} \check{H}^0(M; G') \rightarrow \check{H}^1(M; K) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(M; G) \xrightarrow{j_*} \check{H}^1(M; G').$$

Beispiel I.3.19. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{exp}} \mathbb{C}^* \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit $\check{H}^i(M, \mathbb{C}) = 0$ folgt, dass $\check{H}^1(M; \mathbb{C}^* = \text{GL}_1(\mathbb{C})) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist. Damit ist die Menge der Isomorphieklassen von komplexen Geradenbündeln (bzw. der Isomorphieklassen von $\text{GL}_1(\mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel) über M , zu $H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ isomorph.

Ist $M = S^1$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^1; \mathbb{Z}) = 0$ und alle komplexen Geradenbündel über S^1 sind trivial (Es gibt also insbesondere keine 'komplexe Variante' des Möbiusbandes).

Ist $M = S^2$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ und es sind genau die komplexen Geradenbündel aus Übungsaufgabe 6.

Dort (zusammen mit der Fußnote) haben wir direkt gesehen, dass $\check{H}^1(S^2, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$.

Ist $M = S^n$ für $n > 2$, dann ist $H_{\text{sing}}^2(S^n; \mathbb{Z}) = 0$. D.h. auch hier sind alle komplexen Geradenbündel über S^n , $n > 2$, trivial. Das kann man auch direkt mit dem Kriterium für die Clutchingfunktionen ($\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(S^m) \cong [S^{m-1}, \text{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*]$) in Abschnitt I.2.2.7 ablesen.

Beispiel I.3.20. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0.$$

Da alles abelsche Gruppen sind, gibt das eine exakte Sequenz in Kohomologietheorie. Mit $\check{H}^i(M, \mathbb{R}) = 0$ folgt, dass $c_1: \check{H}^1(M; S^1) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}) = H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist - die sogenannte *erste Chern*

* Jede kompakte zusammenhängende abelsche Liegruppe ist ein Torus. Fordert man nur kompakt und abelsch, erhält man auch noch Produkte von Tori mit diskreten abelschen Gruppen. Bei fehlender Kompaktheit kann man noch Produkte mit \mathbb{R}^n bilden.

† Versehen mit der diskreten Topologie erhält man $\check{H}^i(M, \mathbb{K}) = H_{\text{deRham}}^i(M, \mathbb{K})$. Der Unterschied liegt in der Menge der erlaubten Abbildungen $U \subseteq M \rightarrow \mathbb{K}$. Bei der diskreten Topologie sind stetige Abbildungen automatisch lokal konstant.

Klasse. Insbesondere sehen wir, dass $\text{Prin}_{S^1}(M) \cong H_{\text{sing}}^2(M; \mathbb{Z})$ ist.

Ist $M = S^2$, dann ist $\text{Prin}_{S^1}(S^2) \cong H_{\text{sing}}^2(S^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Man kann zeigen, dass der Erzeuger das Hopfbündel ist, [10, Kapitel 3.5].

I.3.4. Reduktionen/Lifte von Hauptfaserbündeln

Definition I.3.21. Sei $\pi_P: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\lambda: H \rightarrow G$ ein Liegruppenmorphismus. Eine λ -Transformation von P besteht aus einem H -Hauptfaserbündel $\pi_Q: Q \rightarrow M$ und einer glatten Abbildung $f: Q \rightarrow P$ mit $\pi_P \circ f = \pi_Q$ und $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$. Für eine Lieuntergruppe $H \subseteq G$ und λ die Inklusion, nennt man Q auch H -Reduktion von P . Für λ surjektiv nennt man Q eher einen (H -)Lift von P .

Wir nennen zwei λ -Transformationen (Q, f) , bzw. (Q', f') von P äquivalent, wenn es einen H -Hauptfaserbündel-Isomorphismus $\varphi: Q \rightarrow Q'$ mit $f' \circ \varphi = f$.

Beispiel I.3.22. Reduktionen des Repèrebündels $\text{GL}(M)$:

Für die Wahl einer Riemannschen Metrik auf M^m haben wir in Abschnitt I.2.7.1 das $O(m)$ -Hauptfaserbündel $O(M) := O(TM)$ konstruiert. Für die Inklusionen $O(m) \subseteq \text{GL}_m(\mathbb{R})$ und $f: O(M) \rightarrow \text{GL}(M)$ ist $O(M)$ eine $O(m)$ -Reduktion von $\text{GL}(M)$. Die $O(m)$ -Hauptfaserbündel $O(M)_i$ zu zwei verschiedenen Riemannschen Metriken g_i auf M ein äquivalente Reduktionen (Wähle $\varphi: O(M)_1 \rightarrow O(M)_2$ fiberweise die Gram-Schmidt Orthonormalisierung bzgl. g_2 .)

Ist M orientierbar, dann können wir sogar $\text{GL}_+(M)$ wie in Abschnitt I.2.7.1 definieren und dann $\text{GL}_+(M)$ eine $\text{GL}_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion von $\text{GL}(M)$. Weiß man andererseits, dass für eine Mannigfaltigkeit M eine $\text{GL}_+(\mathbb{R}^m)$ -Reduktion (Q, f) von $\text{GL}(M)$ gibt, dann ist M schon orientierbar: Als erstes sehen wir, dass aus $f(q \cdot h) = f(q) \cdot h$ folgt, dass f injektiv ist. D.h. wir nehmen o.B.d.A. an, dass $f: Q \rightarrow \text{GL}(M)$ die Inklusion ist. Wir nennen eine Basis ν von $T_x M$ positiv orientiert, falls $\nu \in \text{GL}_+(M, x)$. Das definiert eine Orientierung auf M .

Im allgemeinen führt eine Zusatzstruktur auf M oder dem Vektorbündel E , wie Bündelmetrik und Orientierung, zu einer Reduktion von $\text{GL}(M)$. Nicht alle Zusatzstrukturen existieren auf allen Mannigfaltigkeiten oder Bündeln (z.B. Orientierung). Dann wird diese Bündelreduktionen nicht immer existieren. Untersuchungen der Existenz der Bündelreduktion führen (falls solche Strukturen nicht immer existieren) dann zu topologischen Obstruktionen für die jeweilige Struktur.

Ähnlich ist es bei der Existenz von Liften:

Beispiel I.3.23. Für $n \geq 3$ hat $SO(n)$ immer Fundamentalgruppe \mathbb{Z}_2 (Beweis siehe [8, Lem. 1.4]). Die universelle Überlagerung nennen wir $\text{Spin}(n)$. Das ist nach Konstruktion erst einmal nur eine Mannigfaltigkeit besitzt aber auch eine Gruppenstruktur, die die Projektion $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ zu einem Liegruppenmorphismus macht.*

Am Beispiel $n = 3$: Wir identifizieren die Standardsphäre S^3 mit der Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1 und $SO(3)$ sei die spezielle orthogonale Gruppe die auf $\text{span}\{i, j, k\} \cong \mathbb{R}^3$ wirkt. Sei $\rho: S^3 \times \text{span}\{i, j, k\} \rightarrow \text{span}\{i, j, k\}$, $\rho(p)q = pqp^{-1}$ (Multiplikation als Quaternionen). Dann ist $\rho(p)$ ein Element in $SO(3)$, vgl. Übungsaufgabe 30. Damit ist $\rho: S^3 \rightarrow SO(3)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus und eine zweifache Überlagerung. Also ist $\text{Spin}(3) = SU(2)$.

Hat man eine orientierte Mannigfaltigkeit M^m , dann gibt es dazu ein $SO(m)$ -Hauptfaserbündel $SO(M) := SO(TM)$, vgl. Abschnitt I.2.7.1. Gibt es einen Lift von $SO(M)$ bzgl. der zweifachen Überlagerung $\lambda: \text{Spin}(m) \rightarrow SO(m)$, so nennt man die Mannigfaltigkeit spin und die Wahl eines solchen Liftes nennt man *Spinstruktur* von M .

* Das folgt aus:

Satz I.3.24. Sei G eine Liegruppe und $p: \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung. Wählt man $e \in p^{-1}(1 \in G)$, dann besitzt L eine eindeutige Gruppenstruktur mit e als neutrales Element, die L zu einer Liegruppe macht und p zu einem Liegruppenmorphismus.

Beweisskizze. Sei $m: G \times G \rightarrow G$ die Gruppenmultiplikation in G . Sei $f: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$ definiert durch $f = m \circ (p \times p)$. Da $\tilde{G} \times \tilde{G}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ von f , d.h. $p \circ \tilde{f} = f$ mit $\tilde{f}(e, e) = e$. Dieses \tilde{f} definiert die gesuchte Gruppenstruktur auf \tilde{G} . \square

Satz I.3.25. Ein G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M$ ist genau dann auf die abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ reduzierbar, wenn das assoziierte Faserbündel $P \times_{\ell} G/H$ mit $\ell: (g, kH) \in G \times G/H \mapsto gkH \in G/H$ einen globalen Schnitt besitzt.

Beweis. Übungsaufgabe 31 □

Vorl. 16 Satz I.3.26. Sei $\lambda: H \rightarrow G$ ein Liegruppenmorphismus und $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ eine Darstellung von G . Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und (Q, f) ein λ -Transformation von P . Dann sind die assoziierten Vektorbündel $P \times_{\rho} V$ und $Q \times_{\rho\lambda} V$ isomorph.

Beweis. Wir setzen

$$\Psi: Q \times_{\rho\lambda} V \rightarrow P \times_{\rho} V, \quad [(q, v)] \mapsto [(f(q), v)].$$

Wohldefiniertheit folgt aus:

$$\Psi([(qh, \rho(\lambda(h)^{-1})v)]) = [(f(qh), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q), v)] = \Psi([(q, v)]).$$

Linear und fasertreu ist klar.

Injektivität: Sei $\Psi([(q, v)]) = \Psi([(q', v')])$ für $q, q' \in Q_x$ und $v, v' \in V$. Dann gibt es $h \in H$ mit $q' = q \cdot h$. Damit ist $f(q') = f(q) \cdot \lambda(h)$ und

$$\Psi([(q', v')]) = \Psi([(q, v)]) = [(f(q), v)] = [(f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(f(q'), \rho(\lambda(h)^{-1})v)].$$

Da die H -Wirkung frei auf den Fasern von Q ist, muss $v' = \rho(\lambda(h)^{-1})v$ und damit $[(q', v)] = [(q \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h)^{-1})v)] = [(q, v)]$ gelten.

Surjektivität: Sei $[(p, v)] \in P \times_{\rho} V$ mit $p \in P_x$. Wir wählen $q \in Q_x$. Da die G -Wirkung auf P einfach transitiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $f(q) = p \cdot g$. Damit ist

$$\Psi([(q, \rho(g^{-1})v)]) = [(f(q), \rho(g^{-1})v)] = [(p \cdot g, \rho(g^{-1})v)] = [(p, v)].$$

Glattheit von Ψ und Ψ^{-1} sieht man direkt in den Bündelkarten aus Satz I.3.14. □

Beispiel I.3.27. Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r und ρ die definierte Darstellung von $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$. Sei $\iota: O(r) \rightarrow \text{Gl}_r(\mathbb{R})$ die Inklusion. Nach Abschnitt I.2.7.1 haben wir das $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel $\text{GL}(E)$ und zu einer Bündelmetrik ein $O(r)$ -Hauptfaserbündel $O(E)$ konstruiert. Nun ist $\text{GL}(E) \times_{\rho} \mathbb{R}^r \cong E \cong O(E) \times_{\rho\iota} \mathbb{R}^r$.

I.3.5. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

I.3.5.1. Motivation

In Abschnitt I.2.7.1 haben wir aus einem reellem Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ vom Rang r das $\text{Gl}_r(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel $\text{GL}(E)$ konstruiert. Wir nehmen nun einen affinen Zusammenhang ∇^E auf E . Gibt es einen natürlichen Weg dazu einen 'Zusammenhang' auf $\text{GL}(E)$ zu konstruieren bzw. gibt es eine gute Zusammenhangsdefinition auf $\text{GL}(E)$?

Ganz naiv – auf einem formalen Level – könnte man sagen der Zusammenhang auf E ist eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$. Aber $\Gamma(\text{GL}(E))$ ist oft leer, z.B. ist $\Gamma(\text{GL}(M))$ nur dann nicht leer, wenn das Tangentialbündel trivial ist. Aber das bildet nur ein formales Level des Zusammenhangs ab.

Der Zusammenhang auf E kommt immer mit einem Paralleltransport, vgl. Abschnitt I.2.7.

Da es lokal auch in $\text{GL}(E)$ Schnitte gibt und die einfach aus einer (lokalen) Basis von Schnitten auf E bestehen. Können wir einfach einen (lokalen) Paralleltransport auf $P := \text{GL}(E)$ definieren, in dem wir jedes Basiselement einzeln mittels transportieren:

Sei $p \in P_x$. Dann ist $p = (p_1, \dots, p_m)$ mit $p_i \in E_x$. Sei $c: I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = x$. Dann haben wir auf E einen Paralleltransport $\|_{0,t}^c$, womit wir jedes p_i entlang c transportieren können. Wir definieren

$$p(t) := \|_{0,t}^c p := (\|_{0,t}^c p_1, \dots, \|_{0,t}^c p_m).$$

Da $\|_{0,t}^c: E_{x=c(0)} \rightarrow E_{c(t)}$ ein Vektorraumisomorphismus ist, vgl. Satz I.2.53 und p eine Basis von E_x ist, ist $\|_{0,t}^c p \in P_{c(t)}$ und damit $\|_{0,t}^c p$ ein Paralleltransport auf P .

Auf Seite 29 haben wir gesehen, $\frac{d}{dt}|_{t=0}(p_i(t)) := \|\dot{c}_{0,t} p_i\| \in T_{p_i}E$ nur von $\dot{c}(0) \in T_xM$ aber nicht der konkreten Wahl von c abhängt. Damit gilt das auch für $\frac{d}{dt}|_{t=0}p(t)$ und wir erhalten den entsprechenden *horizontalen Lift* $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$ für unser Hauptfaserbündel. Die Linearität des horizontalen Lifts und $d_p\pi(X^*(p)) = X(\pi(p))$ überträgt sich einfach von Lemma I.2.59 - nur die dritte Eigenschaft (Kompatibilität mit skalarer Multiplikation auf den Fasern von E) muss ersetzt werden durch die entsprechende Operation auf P - die Gruppenoperation ersetzt werden: (Zur Unterscheidung bezeichnen wir den horizontalen Lift auf E mit \hat{X} und den auf P noch immer mit X^*)

$$X^*(p \cdot g) = X^*((p_1 \cdot g, \dots, p_r \cdot g) = (\hat{X}(p_1 \cdot g), \dots, \hat{X}(p_r \cdot g)) \\ \stackrel{\text{Lin. von } \nabla^E}{=} (\hat{X}(p_1) \cdot g, \dots, \hat{X}(p_r) \cdot g) = X^*(p) \cdot g \stackrel{\text{Bsp. A.1.10.i}}{=} d_p R_g(X^*(p))$$

Hierbei wird die Linearität des Zusammenhangs ∇^E bzw. (I.6) genutzt um wie auf Seite I.2.59 die Kompatibilität des Liftes mit der Rechtswirkung der $GL_r(\mathbb{K})$ zu folgern.

Analog erhält man auch die horizontalen Tangentialräume $Q_pP := \{X^*(p) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\} \subseteq T_pP$ mit der vertikalen und horizontalen Projektionsabbildung und aus Bemerkung I.2.61 wird $d_p R_g(Q_pP) = Q_{p \cdot g}P$. Da $\nabla_X(s = (s_1, \dots, s_m)) := (\nabla_X s_1, \dots, \nabla_X s_m)$ zumindest lokal noch sinnvoll ist, haben wir die gleichen lokalen Zusammenhangseinsformen $\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ mit den gleichen Transformationsformeln wie in (I.4) (da die Übergangsfunktionen von E und $P = GL(E)$ übereinstimmen).

Wir werden noch sehen, dass man auf dem Hauptfaserbündel aus den lokalen Zusammenhangseinsform immer eine globale *Zusammenhangsform* $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ definieren kann.

I.3.5.2. (Äquivalente) Definitionen für Zusammenhänge

Definition I.3.28. Ein *Zusammenhang* auf dem G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M^m$ ist ein glatter Schnitt Q in $\text{Gr}_m(TP)$ (dem Grassmannbündel zu $TP \rightarrow P$, vgl. I.1.2.7) $Q: p \in P \mapsto Q_pP \in \text{Gr}_m(T_pP)$, so dass $T_pP = Q_pP \oplus T_p(P_x)$ gilt und so dass Q rechtsinvariant ist, d.h., für alle $g \in G$ und $p \in P$ gilt $d_g R(Q_pP) = Q_{p \cdot g}P$. Wir nennen Q_pP einen *horizontalen Tangentialraum an P in $p \in P$* und $T_p(P_x) \subseteq T_pP$ den *vertikalen Tangentialraum an P in $u \in P$* . Die Projektionen auf die einzelnen Komponenten von T_pP bezeichnen wir mit *ver*: $T_pP \rightarrow T_p(P_{\pi(p)})$ und *hor*: $T_pP \rightarrow Q_pP$

Lemma I.3.29. (i) $T_p(P_{\pi(p)}) = \ker d_p\pi$

(ii) Für $X \in \mathfrak{g}$ sei $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ definiert durch $\tilde{X}(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \exp(tX)) \in T_p(P_{\pi(p)})$ (\tilde{X} heißt von X erzeugtes fundamentales Vektorfeld.) Es gilt

$$d_g \Psi_p(X(g)) = \tilde{X}(\Psi_p(g)),$$

wobei $\Psi: G \times P \rightarrow P$ die Rechtswirkung auf P ist.

(iii) $\mathfrak{g} \rightarrow \{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\}$, $X \mapsto \tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$, ist ein linearer Isomorphismus* (insbesondere ist $\{\text{fundamentale Vektorfelder auf } P\} \subseteq \mathfrak{X}(P)$ ein Untervektorraum).

(iv) $T_p(P_{\pi(p)}) = \{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\}$

Beweis. (i) Es ist $\pi^{-1}(x) = P_x$ und die Behauptung folgt aus dem Satz vom regulären Wert, vgl. auch [3, (I.1)].

(ii) $d_g \Psi_p(X(g)) \stackrel{\text{lin. sinv}}{=} d_g \Psi_p d_1 L_g(X(1)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Psi_p \circ L_g(\exp tX) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot g) \cdot \exp tX = \tilde{X}(p \cdot g)$

(iii) Linearität folgt aus (ii) und der Linearität von $d_g \Psi_p$. Surjektivität ist klar nach Konstruktion. Es ist noch die Injektivität zu zeigen: Sei $\tilde{X} = 0$. Nach Definition ist $\gamma(t) = p \cdot \exp(tX)$ Lösung von $\dot{\gamma}(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$ mit Anfangswert $\gamma(0) = p$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung dieses Anfangswertproblems, vgl. Übungsaufgabe 15, ist $\gamma(t)$ wegen $\tilde{X} = 0$ konstant gleich p und damit ist $p \cdot \exp(tX)$ konstant in t . Da die Wirkung von G frei ist und \exp in einer Umgebung der Null ein Diffeomorphismus aufs Bild ist, folgt $X = 0$.

(iv) Mit (i) und

$$d_p \pi(\tilde{X}(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \pi(p \cdot \exp tX) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \pi(p) = 0$$

*sogar ein Liealgebrenisomorphismus, dazu muss man nur $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ nachrechnen (dabei benutzt man wieder (ii))

folgt $\{\tilde{X}(p) \mid X \in \mathfrak{g}\} \subseteq T_p(P_{\pi(p)})$. Da beides Vektorräume von gleicher Dimension sind, folgt die Gleichheit. \square

Haben wir einen Zusammenhang Q auf P gegeben, definieren wir $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_p P$. Das definiert ein $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und man kann nachrechnen, dass

- (i) $R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ für alle $g \in G$, d.h. $\omega_{p \cdot g}(d_p R_g(Z)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$ für alle $p \in P$ und $Z \in T_p P$.
- (ii) $\omega(\tilde{X}) = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ (Erst einmal ist $\omega(\tilde{X}) \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$, d.h. die rechte Seite der Gleichung ist als konstante Funktion mit Wert X aufzufassen.)

gilt, vgl. Übungsaufgabe 33.

Wie muss man die Wirkung von $\text{Ad}(g^{-1})$ hier verstehen? Nach Definition A.1.19 ist $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto (R_{g^{-1}} \circ L_g)_*$. Haben wir eine Basis a_i von \mathfrak{g} , dann ist $\omega = \omega^i \otimes a_i$ für $\omega^i \in \Omega^1(P)$. D.h. wir verstehen die Wirkung von $\text{Ad}(g^{-1})$ auf $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ (und analog für alle anderen Operationen auf \mathfrak{g}) hier immer so, dass er nur auf den Liealgebraeteil wirkt – also $\text{Ad}(g^{-1})\omega(X) = \omega^i(X)\text{Ad}(g^{-1})(a_i)$. Analog wirken Operationen, die standardmäßig auf Differentialformen definiert sind, auf liealgebrawertigen Differentialformen, in dem Sie nur auf die ω^i wirken.

Definition I.3.30. Ein Element $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, für welches die beiden obigen Bedingungen gelten, nennt man *Zusammenhangsform* dem G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M$. Die Menge der Zusammenhangsformen auf P bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(P)$.

Die Bedingungen (i) und (ii) bleiben unter Addition und skalarer Multiplikation erhalten, damit ist $\mathcal{A}(P)$ ein affiner Raum (aber kein Vektorraum, da $\omega = 0$ keine Zusammenhangseinsform ist). Andersherum gehört zu einer Zusammenhangseinsform auch wieder ein Zusammenhang:

Satz I.3.31. Sei $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Sei $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf P . Dann definiert

$$u \in P \mapsto Q_u P := \ker \omega_u$$

einen Zusammenhang auf P . Insbesondere ist die Abbildung invers zur obigen Zuordnung $Q \mapsto \omega$.

Beweis. Übungsaufgabe 33. \square

Beispiel I.3.32. Wir betrachten das Hopfbündel $S^3 \rightarrow S^2$. Das ist ein $S^1 = U(1)$ -Hauptfaserbündel und damit $\mathfrak{g} \cong i\mathbb{R}$. Sei $p \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das reelle Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Dann ist $\omega_p(Y \in T_p S^3 \subseteq \mathbb{R}^4) := i\langle Y, ip \rangle$ ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel, vgl. Übungsaufgabe 37.

Vorl. 17 Die Zusammenhangsform ω steht in engem Zusammenhang zu den Zusammenhangseinsformen, die wir schon kennen.

Satz I.3.33. Seien $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$ lokale Schnitte von P zu einer offenen Überdeckung U_α . Wir setzen $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$. Dann ist

$$\omega_\alpha = \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\beta + dL_{\mu_{\alpha\beta}^{-1}} d\mu_{\alpha\beta}^*$$

Sind umgekehrt zu einer offenen Überdeckung U_α und lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$ Einsformen $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$, die obige Transformationsformel erfüllen, gegeben. Dann gibt es eine Zusammenhangseinsform $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit $\omega_\alpha = s_\alpha^* \omega$.

Beweisskizze. Für die Berechnung der Transformation von ω_α , benutzen wir

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t) \cdot g(t)) = d_x R_g(\dot{p}(0)) + \widetilde{d_g L_{g^{-1}}(\dot{g}(0))}(x \cdot g) \tag{I.9}$$

*Im Fall von Matrixgruppen, also $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ ist das genau die Formel (I.4), die wir für die lokalen Zusammenhangsformen von Vektorbündeln gesehen haben.

vgl. Übungsaufgabe 33.ii. Sei $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, $X \in T_u M$ und γ eine Kurve durch $\gamma(0) = u$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann gilt (mit $s_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, 1) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, 1) = \varphi_\beta^{-1}(x, \mu_{\alpha\beta}(x)) = \varphi_\beta^{-1}(x, 1)\mu_{\alpha\beta}(x) = s_\beta(x)\mu_{\alpha\beta}(x)$)

$$\begin{aligned} d_u s_\alpha(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_\alpha(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (s_\beta(\gamma(t)) \cdot \mu_{\alpha\beta}(\gamma(t))) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} d_{s_\beta(u)} R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(X)) + \widetilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)) \end{aligned}$$

mit $Y = d_{\mu_{\alpha\beta}(u)} L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u \mu_{\alpha\beta}(X))$ und damit

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(X) &= (s_\alpha^* \omega)(X) = \omega_{s_\alpha(u)}(d_u s_\alpha(X)) \\ &= \omega_{s_\alpha(u)} \left(d_{s_\beta(u)} R_{\mu_{\alpha\beta}(u)}(d_u s_\beta(X)) + \underbrace{\widetilde{Y}(s_\beta(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u))}_{=s_\alpha(u)} \right) \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}) \omega_{s_\alpha(u) \cdot \mu_{\alpha\beta}(u)^{-1} = s_\beta(u)}(d_u s_\beta(X)) + Y \\ &= \text{Ad}(\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}) \omega_\beta(X) + d_{\mu_{\alpha\beta}(u)} L_{\mu_{\alpha\beta}(u)^{-1}}(d_u \mu_{\alpha\beta}(X)). \end{aligned}$$

Sind die ω_α wie oben gegeben. Für $u \in U_\alpha$ haben wir mit $p = s_\alpha(u)$

$$T_p P = T_p(P_u) \oplus ds_\alpha(T_u M),$$

d.h. ein Vektor in $T_p P$ setzt sich zusammen als $\widetilde{Y}(p) + ds_\alpha(X)$ für ein $Y \in \mathfrak{g}$ und $X \in T_u M$. Wir definieren $\omega_p: T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ durch $\omega_p(\widetilde{Y}(p) + ds_\alpha(X)) = \omega_\alpha(X) + Y$ und $\omega_{p,g} := \text{Ad}(g^{-1})\omega_p$. Damit ist ω für alle $\pi^{-1}(U_\alpha)$ definiert. Man rechnet nach, dass ω eine Zusammenhangseinsform auf $\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ definiert und diese unabhängig von α ist. \square

Ganz analog erhält man:

Satz I.3.34. Sei $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$. Dann gibt es nach Lemma I.3.9.ii gibt es ein $g \in \text{Hom}^G(P; G)$ mit $\vartheta(u) = u \cdot g(u)$ für alle $u \in P$. Dann ist

$$(\vartheta^* \omega)_u = \text{Ad}(g(u)^{-1})\omega_u + d_{g(u)} L_{g(u)^{-1}} d_u g.$$

Bemerkung I.3.35. Insbesondere zeigen die letzten beiden Sätze, dass die Rückrichtung $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ mit den Transformationsformeln wird wieder zu ω zusammengesetzt, ist nur eindeutig, wenn die lokalen Schnitte s_α vorgegeben sind und dann ist $s_\alpha^* \omega = \omega_\alpha$. Hat man $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$, so sind auch $\vartheta \circ s_\alpha$ lokale Schnitte und obige Konstruktion würde die ω_α zu $\vartheta^* \omega$ zusammenbauen. Das ist nicht verwunderlich, da die $\mu_{\alpha\beta}$ das Hauptfaserbündel und damit auch die Zusammenhangseinsform nur bis auf vertikale Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Seien nun $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ zwei Zusammenhangseinsformen und $\omega_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha$ die zugehörigen lokalen Zusammenhangseinsformen zu lokalen Schnitten $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow P$. Dann gilt

$$\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} \circ (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha).$$

Wir betrachten das assoziierte Bündel $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ (das sogenannte *adjungierte Bündel*). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ ein lokaler Schnitt in $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gilt nun

$$[(s_\beta, (\omega_\beta - \tilde{\omega}_\beta)(X))] = [(s_\alpha \mu_{\beta\alpha}, \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}}(\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] = [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))].$$

Also definieren die $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ einen wohldefinierten globalen Schnitt von $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$. Setzen wir $[(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))] := [(s_\alpha, (\omega_\alpha - \tilde{\omega}_\alpha)(X))]$ haben wir eine wohldefinierte Einsform mit Werten in $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$, also ein Element in $\Gamma(T^* M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$. Wir haben also gesehen, dass $\omega - \tilde{\omega}$ als Element in $\Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}) = \Gamma(T^* M \otimes (P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}))$ aufgefasst werden kann. Andersherum liefert diese Konstruktion zu jedem Element $\eta \in \Omega^1(M; P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g})$ aus einer Zusammenhangseinsform ω ein neue Zusammenhangseinsform $\tilde{\omega}$: Lokal haben wir $\eta_\alpha(X) = [(s_\alpha, z_\alpha^X)]$ für $z_\alpha^X: U_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$. Definieren wir $z_\alpha(X) := z_\alpha^X$ haben wir $z_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$. Wir setzen $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + z_\alpha$. Die analogen Transformationsformeln wie oben (insbesondere ist $z_\beta = \text{Ad}_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} z_\alpha$) zeigen, dass die $\tilde{\omega}_\alpha$ einen wohldefinierten Zusammenhang $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ definieren.

$E \rightsquigarrow \mathbf{GL}(E) =: P$ – Was ist ein Zusammenhang auf P ?

Horizontaler Lift $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$

Horizontale Tangentialräume $QP \in \Gamma(\text{Gr}_m(TP))$

$$(fX + Y)^* = (f \circ \pi)X^* + Y^*$$

$$d\pi \circ X^* = X \circ \pi$$

$$X^*(\lambda e) = d_e S_\lambda(X^*(e))$$

$$Q_e P := \{X^*(e) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

$$T_p P = Q_p P \oplus T_p P_{\pi(p)} \cong Q_e P \oplus P_{\pi(p)}$$

mit Projektion $\text{ver}_p : T_p P \mapsto P_{\pi(p)}$

$$\text{ver}_{\lambda e} d_e S_\lambda = \lambda \text{ver}_e$$

$$X^*(e) := (d_e \pi : Q_e P \rightarrow T_{\pi(e)} M)^{-1}(X(\pi(e)))$$

lin. Strukt. auf $E \rightsquigarrow$ Gruppenwirk. auf P
 Umschreiben der jeweiligen Bedingungen, vgl. Seite 41

$$X^*(e) := \dot{\gamma}_e(0)$$

mit $\nabla_{\dot{\gamma}_{\pi(e)}(t)} \dot{\gamma}_e(t) = 0$
 $\dot{\gamma}_{\pi(e)}(0) = X(\pi(e))$

P hat i.A. nur lok. Schnitte

affiner Zusammenhang $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$

lin. in beiden Argumenten

$$\nabla_f X s = f \nabla_X s \quad \text{lokal}$$

$$\nabla_X (f s) = f \nabla_X s + df(X) s$$

$$(\nabla_x s)(x) := \text{ver}_{s(x)} d_x s(X(x))$$

$$\frac{\nabla}{dt} s(t) = 0 \quad (s \in \Gamma_c(E))$$

$$\implies \parallel_{t_1, t_2}^c s(t_1) = s(t_2)$$

$$\nabla_X s_i^\alpha = (\omega_\alpha)_i^j(X) s_j^\alpha$$

Paralleltransport $\parallel_{t_1, t_2}^c : E_{c(t_1)} \rightarrow E_{c(t_2)}$

lok. Zusammenhangsformen $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$

Schnitt $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha)$ von $P|_{U_\alpha}$
 zu off. Überd. $\{U_\alpha\}$, lok. Rahmen s_i^α von $E|_{U_\alpha}$, Übergangsfkt. $\mu_{\alpha\beta}$

ok für Matrixgruppen, also $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$
 (sonst vgl. Satz I.3.33)

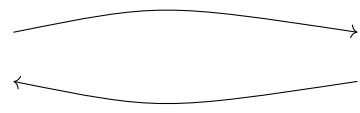
$$\omega_\beta \in \mu_{\beta\alpha}^{-1} \omega_\alpha \mu_{\beta\alpha} + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}$$

Abb. I.5.: Wie kann man das verstehen? Das unterliegende 'Bild' in schwarz ist die Übersicht über äquivalente Beschreibungen von Zusammenhängen eines Vektorbündels von Seite 31. Das farbliche behandelt die Frage, wie man die Definitionen anpassen kann/muss, um einen Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel $\mathbf{GL}(E)$ (und später allgemein auf Hauptfaserbündel) zu definieren. Leitidee ist dabei das Bild links unten.

Horizontaler Lift $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}(P)$

$$\begin{cases} (fX + Y)^* = (f \circ \pi)X^* + Y^* \\ d\pi \circ X^* = X \circ \pi \\ X^*(p \cdot g) = d_p R_g(X^*(p)) \end{cases}$$

$$Q_e P := \{X^*(e) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\}$$



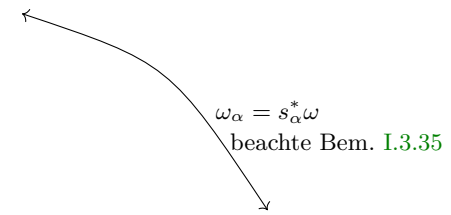
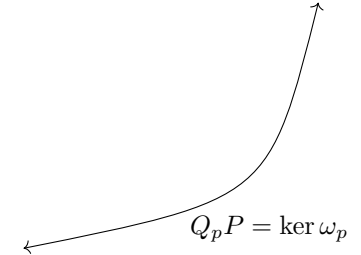
$$X^*(e) := (d_e \pi: Q_e P \rightarrow T_{\pi(e)} M)^{-1}(X(\pi(e)))$$

Horizontale Tangentialräume $Q_p P \in \Gamma(\text{Gr}_m(TP))$

$$\begin{cases} T_p P = Q_p P \oplus T_p P_{\pi(p)} \cong Q_p P \oplus P_{\pi(p)} \\ \text{mit Projektion } \text{ver}_p: T_p P \mapsto P_{\pi(p)} \\ Q_{p \cdot g} P = d_p R_g(Q_p P) \end{cases}$$

Zusammenhangseinsform $\omega: \Omega^1(P; \mathfrak{g})$

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = X \\ R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega \end{cases}$$



lok. **Zusammenhangseinsformen** $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$

$$\begin{cases} \text{zu off. Überd. } \{U_\alpha\}, \text{ lok. Schnitt } s_\alpha \text{ von } P|_{U_\alpha}, \text{ Übergangsfkt. } \mu_{\alpha\beta} \\ \omega_\beta = \text{Ad}(\mu_{\beta\alpha}^{-1})\omega_\alpha + dL_{\mu_{\beta\alpha}^{-1}} d\mu_{\beta\alpha} \end{cases}$$

Abb. I.6.: Äquivalente Zusammenhangsbegriffe für G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$. Während für Vektorbündel die Beschreibung als affiner Zusammenhang meistens in Verwendung ist, ist es für Hauptfaserbündel meistens die Zusammenhangseinsform.

Wir haben also gesehen:

Lemma I.3.36. Die Menge $\mathcal{A}(P)$ der Zusammenhangseinsformen auf $P \rightarrow M$ steht in 1:1 Beziehung mit $\Omega^1(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$. Insbesondere erhält diese Abbildung die affine Struktur auf $\mathcal{A}(P)$ und $\mathcal{A}(P)$ ist damit ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M; P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ (und damit insbesondere unendlich-dimensional).

Bemerkung I.3.37. (Induzierter Zusammenhang auf dem assoziierten Vektorbündel) Sei $E := P \times_{\rho} V$ ein zu G -Hauptfaserbündel P und zu $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ assoziiertes Vektorbündel. Sei ω eine Zusammenhangseinsform auf P . Dann definiert (kommt später)

$$\nabla_X[(s(u), v(u))] := [s(u), X(v)(u) + \rho_*(s^*\omega(X))v(u)]$$

einen Zusammenhang auf E , vgl. Übungsaufgabe 35.

I.3.6. Krümmung

Da die lokalen Zusammenhangseinsformen eines Hauptfaserbündels sich wie die eines Vektorbündels, vgl. (I.4), verhalten, können wir die lokalen Krümmungsformen Ω_{α} mittels der Strukturgleichung aus Satz I.2.46 definieren:

$$\Omega_{\alpha} := d\omega_{\alpha} + \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha},$$

wobei wir für $\eta = \eta^i \otimes a_i \in \Omega^k(U; \mathfrak{g})$, $\kappa = \kappa^j \otimes a_j \in \Omega^{\ell}(U; \mathfrak{g})$ mit a_i Basis von \mathfrak{g} , $\eta^i \in \Omega^k(U)$, $\kappa^j \in \Omega^{\ell}(U)$

$$\eta \wedge \kappa := \frac{1}{2} \eta^i \wedge \kappa^j [a_i, a_j] \tag{I.10}$$

Vorl. 18 und $d\eta := d\eta^i \otimes a_i$.^{*} Dann ist insbesondere für $\eta \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$

$$d\eta(X, Y) := X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \tag{I.11}$$

(dabei ist $\eta(Y) \in C^{\infty}(M, \mathfrak{g})$ und $X(\eta(Y)) = X(\eta^i(Y) \otimes a_i) = X(\eta^i(Y)) \otimes a_i$), weil diese Formel schon auf dem Level der Differentialformen richtig ist, vgl. Tabelle I.3, und

$$\begin{aligned} 2\eta \wedge \eta(X, Y) &= (\eta^i(X)\eta^j(Y) - \eta^j(X)\eta^i(Y))[a_i, a_j] \\ &\stackrel{2.\text{Summ: } i \leftrightarrow j}{=} 2\eta^i(X)\eta^j(Y)[a_i, a_j] \\ &= 2[\eta^i(X)a_i, \eta^j(Y)a_j] = 2[\eta(X), \eta(Y)]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit analogem Beweis wie für (I.5) die Transformationsformel

$$\Omega_{\beta} = \text{Ad}(\mu_{\beta}^{-1})\Omega_{\alpha}.$$

Für Hauptfaserbündel kommen die ω_{α} aber sogar von einer globalen Zusammenhangsform $\omega_{\alpha} = s_{\alpha}^*\omega$. Damit ist

$$\Omega_{\alpha} = d(s_{\alpha}^*\omega) + (s_{\alpha}^*\omega) \wedge (s_{\alpha}^*\omega) = s_{\alpha}^*(d\omega + \omega \wedge \omega)$$

(vgl. Tabelle I.3 für die Eigenschaften des Pullbacks) und wir können auch eine globale Krümmungsform $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ definieren. Dann erhält man ganz analog zur Transformationsformel der lokalen Krümmungseinsformen, dass für ein $\vartheta \in \text{Aut}_M(P)$ und eine Zusammenhangseinsform $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ die Krümmungsform $\Omega^{\vartheta^*\omega}$ zu $\vartheta^*\omega$ gleich $\text{Ad}(g^{-1})\Omega^{\omega}$ ist, wobei $g \in \text{Hom}^G(P; G)$ mit $\vartheta(p) = p \cdot g(p)$ ist.

Satz I.3.38. Es ist $\Omega(X, Y) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y))$.[†]

^{*}Für $\omega_{\alpha} \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ haben wir der Strukturgleichung erst mal Sinn gegeben, in dem wir es erst einmal nur als Kurzschreibweise für die jeweilige Gleichung in den einzelnen Einträgen von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ gegeben haben, vgl. Satz I.2.46. Für $\eta, \kappa \in \Omega^1(U)$ und damit jedem Eintrag von $\Omega^1(U, \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}))$ ist (I.10) richtig. Deshalb nehmen wir (I.10) hier als Definition und man muss noch zusätzlich nachrechnen, dass es unabhängig der Basiswahl von \mathfrak{g} ist.

[†]Oft wird so die Krümmung auf Hauptfaserbündel ad-hoc definiert und daraus die Strukturgleichung abgeleitet.

Beweis. Es ist $X = \text{ver}(X) + \text{hor}(X)$ und nach Satz I.3.31 $\omega(\text{hor}(X)) = 0$. Ist $Y \in T_p P_{\pi(p)}$, dann gibt es für ein $Z \in \mathfrak{g}$ ein fundamentales Vektorfeld \tilde{Z} mit $Y = \tilde{Z}(p)$.
Damit haben wir insgesamt:

$$\omega \wedge \omega(X, \text{hor}(Y)) = 0 \rightsquigarrow \Omega(X, \text{hor}(Y)) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y))$$

$$\begin{aligned} d\omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) &\stackrel{(I.11)}{=} \tilde{Z}(\omega(\tilde{U})) - \tilde{U}(\omega(\tilde{Z})) - \omega([\tilde{Z}, \tilde{U}]) \\ &= \tilde{Z}(U) - \tilde{U}(Z) - [Z, U] = -[Z, U] \\ &= -\omega \wedge \omega(\tilde{Z}, \tilde{U}) \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{Z}, \tilde{U}) = 0 = \Omega(\tilde{Z}, \tilde{U}). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass $U \in \mathfrak{g}$ als Funktion $M \rightarrow \mathfrak{g}$ konstant und deshalb $\tilde{Z}(U) = 0$ gilt. Außerdem haben wir für die vorletzte Zeile verwendet, dass $[\tilde{Z}, \tilde{U}] = \widetilde{[Z, U]}$ gilt. Das folgt aus $\tilde{Z} = (\Psi_p)_*(Z)$, vgl. Lemma I.3.29.ii, und das $(\Psi_p)_*$ mit der Lieklammer kommutiert.

$$\begin{aligned} d\omega(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) &= -\text{hor}(Y)\omega(\tilde{Z}) - \omega([\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &= -\text{hor}(Y)(Z) - \omega([\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]) \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \rightsquigarrow (d\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) = 0 = \Omega(\tilde{Z}, \text{hor}(Y)) \end{aligned}$$

Für die Gleichheit (*) haben wir benutzt, dass $[\tilde{Z}, \text{hor}(Y)]$ wieder ein horizontales Vektorfeld ist, vgl. Übungsaufgabe 36 \square

Definition I.3.39. Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit gegebenem Zusammenhang. Wir definieren $D: \Omega^k(P; \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{k+1}(P; \mathfrak{g})$ durch $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\eta(\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{k+1}))$, wobei $d\eta$ wie auch (I.11) auch mittels der Formel für reellwertige Differentialformen aus Tabelle I.3 definiert ist.

In dieser Notation ist z.B. $\Omega = D\omega$.

Lemma I.3.40. (*Bianchi-Identität*) $D\Omega = 0$

Beweis. Folgt sofort aus der Definition von D mit $\omega(\text{hor}(X)) = 0$ und $[\text{hor}(X), \text{hor}(Y)] = \text{hor}([X, Y])$. \square

Auch für die Krümmung für Vektorbündel und dem D aus Definition I.2.44 gilt $DF = 0$, vgl. Übungsaufgabe 34

Definition I.3.41. Sei ein Zusammenhang ω auf dem G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ gegeben. Wir bezeichnen mit $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ die Menge der *horizontalen k -Formen auf P mit Werten in \mathfrak{g}* . Dies sei die Menge aller $\eta \in \Omega^k(P; \mathfrak{g})$ für die gilt:

- (i) Für $p \in P$, $X_i \in T_p P$ und mindestens ein X_i ein vertikaler Vektor gilt $\eta_p(X_1, \dots, X_k) = 0$.
- (ii) $R_g^* \eta = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta$.

Beispiel I.3.42. $\omega \notin \Omega_{\text{hor}}^1(P; \mathfrak{g})$, da zwar (ii) aber nicht (i) erfüllt ist. Aber es ist $\Omega \in \Omega_{\text{hor}}^2(P; \mathfrak{g})$: (i) ist erfüllt nach Satz I.3.38. (ii) folgt mit den Rechnungen aus folgendem Satz.

Satz I.3.43. Die Einschränkung des Differentials D aus Definition I.3.39 ergibt die Abbildung

$$D: \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$$

und für $\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ gilt

$$D\eta = d\eta + \text{ad}(\omega) \wedge \eta, \tag{I.12}$$

wobei $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) := (-1)^{i+1} \text{ad}(\omega(X_i))\eta(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1})$ ist.

Insbesondere liefert (I.12) eine explizitere Formel für $D\Omega$.

Beweis. Als erstes wollen wir nachrechnen, dass $D(\eta \in \Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})) \in \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P; \mathfrak{g})$ gilt. Die Bedingung (i) aus der Definition von $\Omega_{\text{hor}}^k(P; \mathfrak{g})$ ist direkt nach Konstruktion erfüllt. Es bleibt (ii) zu zeigen: Es gilt $d_p R_g(\tilde{X}(p)) = \text{Ad}(g^{-1})X(p)$, vgl. Übungsaufgabe 36. D.h. insbesondere, dass dR_g eines vertikalen Vektors wieder ein vertikaler Vektor ist. Damit haben wir $\text{hor } dR_g(X) = \text{hor}(dR_g(\text{hor } X) + dR_g(\text{ver } X)) = dR_g(\text{hor } X)$ und

$$\begin{aligned} (R_g^* D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= D\eta(dR_g(X_1), \dots, dR_g(X_{k+1})) = d\eta(\text{hor } dR_g(X_1), \dots, \text{hor } dR_g(X_{k+1})) \\ &= d\eta(dR_g(\text{hor } X_1), \dots, dR_g(\text{hor } X_{k+1})) \\ &= (R_g^* d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\ &= (dR_g^* \eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\ &= (d(\text{Ad}(g^{-1}) \circ \eta))(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1}) \\ &= ((\text{Ad}(g^{-1}) \circ d\eta)(\text{hor } X_1, \dots, \text{hor } X_{k+1})) \\ &= (\text{Ad}(g^{-1}) \circ D\eta)(X_1, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Es bleibt noch (I.12) nachzurechnen:

Sind alle X_i horizontal, dann ist $D\eta = d\eta$ nach Definition I.3.39 und $\omega(X_i) = 0$. Also gilt in diesem Fall (I.12).

Sind mindestens zwei der X_i vertikal, dann ist $(\text{ad}(\omega) \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ und $D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ nach Definition. In diesem Fall müssen wir also noch nachrechnen, dass auch $d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$ ist:

Nach Tabelle I.2 gilt:

$$d\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = (-1)^i X_i(\underbrace{\eta(\dots, \check{X}_i, \dots)}_{=0 \text{ da min ein Vektor vertikal}}) + \sum_{i < \ell} (-1)^{i+\ell} \eta([X_i, X_\ell], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_\ell, \dots, X_{k+1}).$$

Auch in der zweiten Summe ist immer mindestens ein Vektor vertikal, da die Lieklammer zweier vertikaler Vektoren wieder einen vertikalen Vektor liefert und damit ist in diesem Falle $d\eta = 0$.

Der verbleibende Fall ist nun genau eines der X_i ist vertikal. O.B.d.A. sei $X_1 = \tilde{Y}$ vertikal. Dann sind $X_i = Z_i^*$ für $i > 1$ und $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist wieder $D\eta = 0$ und wir haben

$$\text{ad}(\omega) \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+1}) := \text{ad}(\omega(X_1))\eta(X_2, \dots, X_{k+1})$$

sowie

$$\begin{aligned} (d_p \eta)(X_1(p), \dots, X_{k+1}(p)) &= \tilde{Y}(\eta(Z_2^*, \dots, Z_{k+1}^*))(p) + (-1)^{\ell+1} \eta(\underbrace{[\tilde{Y}, Z_\ell^*]}_{=0 \text{ vgl. ÜA 36}}, Z_2^*, \dots, \check{Z}_\ell^*, \dots, Z_{k+1}^*)(p) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(Z_2^*(p \cdot \exp(tY)), \dots, Z_{k+1}^*(p \cdot \exp(tY))) \\ \text{rechtsinv. der horiz. Vek.} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_{p \cdot \exp(tY)}(d_p R_{\exp(tY)}(Z_2^*(p)), \dots, d_p R_{\exp(tY)}(Z_{k+1}^*(p))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (R_{\exp(tY)}^* \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Ad}(\exp(-tY)) \circ \eta)_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)) \\ &= \underbrace{\text{Ad}_*(-Y)}_{=-\text{ad}(Y)} \eta_p(Z_2^*(p), \dots, Z_{k+1}^*(p)). \end{aligned}$$

□

I.4. Klassische Yang-Mills-Theorie

I.4.1. Klassische Elektrodynamik

Wir fangen bei der klassischen Elektrodynamik an. Wie in Beispiel I.2.32 haben wir die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \\ \operatorname{div} E &= 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Wir fassen nun die B - und E -Felder in der Matrix

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ 0 & 0 & -B_3 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zusammen und setzen $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. Dann lassen sich die Maxwellgleichungen umschreiben zu (wir haben einfach $4\pi = c = 1$ gesetzt).

$$\begin{aligned} dF &= 0 \quad (\text{das sind die beiden oberen Maxwellgleichungen}) \\ *d * F &= \tilde{j} \end{aligned}$$

mit $\tilde{j} = \rho dt + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$ (Der Hodge-Stern ist hier bzgl. der Minkowskimetrik auf \mathbb{R}^4). Schränken wir uns auf den Vakuumfall ein, bleibt noch

$$dF = 0 \quad \delta F := - *d * F = 0.$$

Wir sehen, dass aus der ersten Gleichung lokal (und auf \mathbb{R}^4) immer die Existenz eines $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = dA$ folgt. Ein solches A nennt man (*Vektor-)*Potential. Schreibt man auch die zweite Gleichung mit Hilfe des Potentials muss man statt der obigen Maxwellgleichungen nur noch eine Gleichung

$$\delta dA = 0$$

lösen. Diese ist hochgradig unterbestimmt – löst A die Gleichung, dann auch $A + d\varphi$, für ein $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Das nennt man *Eichfreiheit*. Will man diese Gleichung lösen, führt man zumeist eine zweite Gleichung ein, die diese Unterbestimmtheit aufhebt. Das nennt man *Eichfixierung*. Sehr beliebt im Kontext der Elektrodynamik ist die *Lorenz-Eichung* $\delta A = 0$, dann ist $\delta dA = \underbrace{(\delta d + d\delta)}_{=:\square} A = 0^*$ und man hat eine

'schöne' hyperbolische Gleichung (Wellengleichung). Man muss sich bei einer Eichfixierung immer überlegen, dass man dadurch keine Lösung verliert. Normalerweise überlegt man sich das, in dem man zeigt, dass man aus einer beliebigen Lösung so umeichen kann (hier addieren eines $d\varphi$), dass die resultierende Lösung die Eichfixierung erfüllt. † Wir möchte eine Lösung der Maxwellgleichungen also $F \in \Omega^2(U, \mathbb{R})$ bzw. $A \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ als Krümmung bzw. Zusammenhang eines geeigneten G -Hauptfaserbündels $P \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^4$ interpretieren. Lokale Zusammenhangseinsformen sind Elemente aus $\Omega^1(U, \mathfrak{g})$. Wir wollen $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ (das i ist nicht so wichtig), also $\omega_\alpha = iA$ als Lösung. Dann ist da $i\mathbb{R}$ abelsch ist, $\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = 0$ und damit die lokale Krümmungsform gegeben durch $\Omega_\alpha = idA \in \Omega^2(U, i\mathbb{R})$. Bzgl. eines anderen lokalen Schnittes $\varphi_\beta: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ führt, da $i\mathbb{R}$ abelsch ist, zur gleichen lokalen Krümmungsform $\Omega_\beta = \Omega_\alpha$ und zur lokalen Krümmungsform $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha} = iA + \mu_{\beta\alpha}^{-1} d\mu_{\beta\alpha}$. D.h. die Eichfreiheit von oben entspricht

*Der d'Alembert \square ist einfach die Notation für den Laplaceoperator auf dem Minkowskiraum (oder allgemeiner auf Lorentzmannigfaltigkeiten).

†Es gibt auch andere Eichungen (=Eichfixierung), z.B. *Coloumb-Eichung* $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, wenn man A als Vektorfeld (A_0, \vec{A}) auffasst, *axiale Eichung* $g(X, A) = 0$ für einen fixierten Vektor $X \in \mathbb{R}^4, \dots$

hier der unterschiedlichen Wahl lokaler Trivialisierung des Bündels. Die Maxwellgleichungen sind nun geschrieben für die Krümmung des Hauptfaserbündels nun

$$d\Omega = 0 \text{ und } *d*\Omega = 0.$$

Die erste Gleichung ist wegen der Bianchi-Identität automatisch erfüllt. Die zweite Gleichung kann auch als Bewegungsgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung) der folgenden Wirkung gesehen werden:

$$S(F) := \int_U F \wedge *F,$$

wobei $F \wedge *F \in \Omega^4(U, i\mathbb{R})$ wie in (I.10) verstanden wird.

Wir haben jetzt klassische Elektrodynamik als Gleichung an die Krümmung eines G -Hauptfaserbündels über $U \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ interpretiert. Was genau G am besten sollte, sieht man an der klassischen Theorie nicht. $G = \mathbb{R}$ oder $G = S^1$ sind beides auf dem klassischen Niveau ununterscheidbar. Erst auf dem Niveau der Quantentheorie (die Theorie hier ist ein klassischer Limes der Quantenelektrodynamik) sieht man, dass $G = S^1$ die gute Wahl ist, da die Quantentheorie eine $U(1)$ -Symmetrie hat*.

Über zusammenziehbare Gebiete $U \subseteq \mathbb{R}^4$ sind die Hauptfaserbündel sowieso immer trivial. Aber man kann die obigen Gleichungen z.B. auf für Bündel über $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ betrachten und erhält als Lösung Dirac-Monopole, vgl. Übungsaufgabe 36.

Wo war hier die Eichfixierung? Die kam noch nicht vor. Die Gleichung $*d*d\omega = 0$ ist genauso unterbestimmt wie ohne Bündelinterpretation. Eine Eichfixierung wäre auch hier eine zusätzliche Gleichung an ω . entsprechen Änderung des Schnittes und damit auch einer Umeichung - deshalb werden auf der Ebene des Hauptfaserbündels vertikale Automorphismen Eichtransformationen genannt. Mit der obigen Transformationsformel haben wir lokal $\omega_\beta = \omega_\alpha + \mu_{\beta\alpha}^{-1}d\mu_{\beta\alpha} = i(A + d\varphi)$ mit $\mu_{\beta\alpha} = e^{i\varphi}$.

I.4.2. Klassische Yang-Mills Theorie

Wir betrachten im Folgenden klassische Yang-Mills Theorie nur als ad-hoc Verallgemeinerung der klassischen Elektrodynamik. Das ist dahingehend unvollständig, dass die zugehörige Quantentheorie (= Standardmodell (Elektrodynamik $G = U(1)$ und schwache $G = SU(2)$ sowie starke Wechselwirkung $G = SU(3)$ und ihr Zusammenwirken) eine sehr erfolgreiche (und interessante) physikalische Theorie ist.† Allerdings ist völlig unklar, wie oder ob überhaupt diese Theorie einen klassischen Limes besitzt und selbst wenn, ob dieser die klassische Yang-Mills Theorie ist. Das blenden wir hier aber mal leider aus.

Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel. Wir betrachten nur einfache kompakte Matrixgruppen $G \subseteq \text{Gl}(n, \mathbb{K})$ – die wichtigsten Fälle sind $SU(2)$ und $SU(3)$.

Wir betrachten die folgende Wirkung auf den Zusammenhängen ω auf P (F die zugehörige lokale Krümmungsform und A die lokale Zusammenhangseinsform)

$$S(F) := \int_M \text{Tr}(F \wedge *F)$$

Hier ist $F \wedge *F \in \Omega \in \Omega^m(U, \mathfrak{g})$ und $\text{Tr}: \Omega^m(U, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^m(U)$ ist die Spur auf dem Liealgebrenteil $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}()$. Da G kompakt und einfach ist, entspricht das der Killingform. Insbesondere muss man sich überlegen, dass $\text{Tr}(F \wedge *F)$ unabhängig der gewählten lokalen Trivialisierung ist.

Berechnet man hier die Bewegungsgleichung erhält man

$$D*\Omega = 0$$

(Da die Elektrodynamik abelsch ist, ist dort $D*\Omega = d*\Omega$.)

*Damit das im klassischen Limes erhalten bleibt, geht noch die (experimentell bestätigte) Annahme ein, dass die Quantentheorie geeignet ans elektromagnetische Feld koppelt.

†... wenn auch mathematisch noch nicht wirklich vollständig verstanden, vgl. auch https://en.wikipedia.org/wiki/Yang-Mills_existence_and_mass_gap

I.4.2.1. (Anti-)Selbstduale Lösungen

Sei (M, g) eine orientierte 4-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit Zusammenhang ω und Krümmung $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$.

Falls $*\Omega = \pm\Omega$ gilt, dann ist wegen der Bianchi-Identität $D\Omega = 0$ die Yang-Mills-Gleichung $D*\Omega = 0$ automatisch erfüllt. Das wäre eine einfache Möglichkeit an Lösungen zu kommen. Bevor wir uns ein Beispiel anschauen:

Der Hodge-Stern ist eine Abbildung $*$: $\Omega^2(M) \rightarrow \Omega^2(M)$ mit $** = (-1)^{2(4-2)} = 1$. Gilt $*\alpha = \pm\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega^2(M)$, nennt man α *selbstdual* (für $+$) und *antiselbstdual* (für $-$). Die Menge aller (anti-)selbstdualen 2-Formen bezeichnen wir mit $\Omega_{\pm}^2(M)$.

Lemma I.4.1. $\Omega_{\pm}^2(M)$ sind jeweils der Raum der Schnitte eines Untervektorbündel $\Lambda_{\pm}^2(M)$ von $\Lambda^2(M)$ und es gilt $\Lambda^2(M) = \Lambda_+^2(M) \oplus \Lambda_-^2(M)$.

Beweisskizze. Da $*$ ein punktwiser Operator und damit ist $\Lambda_{\pm}^2(M)|_{x \in M} = \{\beta \in \Lambda^2(M)|_{x \in M} \mid *\beta = \pm\beta\}$. Damit sind $\Lambda_{\pm}^2(M)$ Untervektorbündel von $\Lambda^2(M)$ vom Rang 3: Ist (s_1, \dots, s_4) ein positiv orientierte Orthonormalbasis von $(T_x M, g_x)$ und σ^i die zugehörige duale Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} e_{\pm}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \pm \sigma^3 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^3 \mp \sigma^2 \wedge \sigma^4) \\ e_{\pm}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 \wedge \sigma^4 \pm \sigma^2 \wedge \sigma^3) \end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis von $\Lambda_{\pm}^2(M)|_x$. □

Beispiel I.4.2 (BPST*-Instantonen = Selbstduale $SU(2)$ -Zusammenhänge auf \mathbb{R}^4). Wir identifizieren $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ – den Quaternionen und $SU(2)$ mit der symplektischen Gruppe $Sp(1) := \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ durch

$$\iota: x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in Sp(1) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \\ x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

Die Liealgebra von $Sp(1)$ ist $\mathfrak{sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \text{Re}q = 0\}$ mit $[q_1, q_2] = q_1q_2 - q_2q_1 = 2\text{Im}(q_1q_2)$. Wir kürzen ab: $dx = dx^1 + idx^2 + jdx^3 + kdx^4$ und $d\bar{x} = dx^1 - idx^2 - jdx^3 - kdx^4$. Sei $P = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$ das triviale $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Wir betrachten lokale Zusammenhangsformen A (und Krümmungsformen F) im folgenden immer bzgl. der kanonischen Trivialisierung von P – also ist $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2))$.

Man kann nachrechnen, dass

$$A_{x \in \mathbb{H}} := \text{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right)$$

ein selbstdualer Zusammenhang (d.h. $*F = F$ für die zugehörige Krümmungsform), vgl. Übungsaufgabe 38.

Für $\mu \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{H}$, kann man weitere selbstduale Zusammenhänge

$$(A_{\mu,b})_x := \text{Im} \left(\frac{\mu^2(x-b) \cdot d\bar{x}}{1 + \mu^2|x-b|^2} \right)$$

finden. Das diese wirklich selbstduale Zusammenhänge, rechnet man am leichtesten nach, in dem man $A_{\mu,b} = \Phi_{\mu,b}^* A$ mit dem Diffeomorphismus $\Phi_{\mu,b}(y) = \mu(y-b)$ betrachtet.

Man kann sich nun fragen, ob für verschiedene (μ, b) die lokalen Zusammenhangsformen $A_{\mu,b}$ nicht in Wirklichkeit zum gleichen Zusammenhang auf P gehören. Das ist nicht so, vgl. Übungsaufgabe 38.

*benannt nach A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwarz und Y. Tyupkin

Beispiel I.4.3 (Das quaternionische Hopfbündel). (Das ist in Wirklichkeit nur die konforme Kompaktifizierung des letzten Beispiels) Wir betrachten $S^7 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ und

$$\pi: S^7 \rightarrow S^4, \quad (z_1, z_2) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_2 & \text{falls } z_1 \neq 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man kann zeigen, vgl. Übungsaufgabe 39, dass $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ mit der $SU(2) \cong Sp(1)$ -Wirkung $(z_1, z_2) \cdot q := (\bar{q}z_1, \bar{q}z_2)$ ein $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über S^4 ist und $A_{(z_1, z_2)} := \text{Im}(z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2)$ einen selbst-dualen Zusammenhang auf diesem Bündel definiert.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

II.1. Definitionen und erste Eigenschaften

II.1.1. Im \mathbb{R}^n

Ein Differentialoperator auf \mathbb{R}^n ist definiert als

Vorl. 20

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{II.1}$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein *Multiindex* mit $|\alpha| := \sum_i |\alpha^i|$, $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, und $D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^1} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^n}$ ist. Gibt es ein α mit $|\alpha| = k$ und $a_\alpha \neq 0$, dann nennen wir k die *Ordnung* von P (sonst ist die Ordnung kleiner als k).

In vielen Anwendungen in der Analysis und Stochastik muss man geringere Regularität der Koeffizienten a_α zulassen, aber wir beschränken uns hier auf glatte Koeffizienten. Also ist hier $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Allgemeiner kann P auch auf \mathbb{K}^ℓ -wertige Funktionen operieren und \mathbb{K}^r -wertige Funktionen ausgeben - dazu muss dann a_α eine $r \times \ell$ -matrixwertige Funktion sein. Dabei operieren die partiellen Ableitungen dann komponentenweise.

Beispiel II.1.1. (i) Laplace-Operator: $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Wärmeoperator: $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i}$

(iii) Wellenoperator: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i}$

(iv) Cauchy Riemann Operator $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(v) Sturm-Liouville Operatoren: $y \in C^\infty(I \subseteq \mathbb{R}) \mapsto (-py')' + qy$ für $p, q \in C^\infty(I)$ und $p > 0$

(vi) Dirac-Operator:

$$D = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} : C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$$

mit $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Man rechnet nach, dass D^2 der Wellenoperator ist.

(vii) $\text{rot}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\text{div}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\text{grad}: C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

II.1.2. Auf Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel

Definition II.1.2. Ein (skalärer) Differentialoperator der Ordnung k auf einer Mannigfaltigkeit ist eine lineare Abbildung $P: C^\infty(M, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{K})$, die in jeder Karte die Form (II.1) annimmt.

Beispiel II.1.3. 0-te Ordnung Operatoren sind einfach Multiplikationsoperatoren $Pf = af$ für ein $a \in C^\infty(M, \mathbb{K})$

Beispiel II.1.4. Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$, aufgefasst als Derivation $X: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f \mapsto X(f)$, ist ein skalärer Differentialoperator erster Ordnung: Lokal ist $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jeder skalare Differentialoperator erster Ordnung auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ kann als Vektorfeld plus einem 0-te Ordnungsoperator aufgefasst werden, vgl. Übungsaufgabe 44. Die Hintereinanderausführung von Vektorfeldern und Linearkombinationen davon sind auch wieder Differentialoperatoren von entsprechend höherer Ordnung.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Beispiel II.1.5. Seien x^i die euklidischen Koordinaten und y^i weitere Koordinaten auf \mathbb{R}^n . Dann ist $\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ und die euklidische Metrik ist in den Koordinaten y^i durch $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \rangle = \delta_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$ gegeben. Der Laplaceoperator ist damit (hier ist $\det g$ die Determinante von g_{ij})

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^i} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ \operatorname{grad} f &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial y^\ell}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\ell} = g^{k\ell} \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^\ell} \\ X^i \frac{\partial}{\partial x^i} &= X^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} =: \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \\ \operatorname{div} X &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} = |\det g|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(X^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} |\det g|^{\frac{1}{2}} \right) - |\det g|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} |\det g|^{\frac{1}{2}} \right) X^i \\ &= |\det g|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\tilde{X}^k |\det g|^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung verwendet, dass $\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} |\det g|^{\frac{1}{2}} \right) = 0$ ist. Dies folgt mit $\frac{\partial \det g}{\partial g_{ij}} = g^{ij} \det g^*$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} |\det g|^{\frac{1}{2}} \right) &= |\det g|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial \det g}{\partial g_{rs}} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y^k} = |\det g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} g^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y^k} \right) \\ &= |\det g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} g^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y^k} \right) \\ &= |\det g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \sum_{u,\ell} \frac{\partial x^u}{\partial y^r} \frac{\partial x^u}{\partial y^s} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^\ell} \frac{\partial y^s}{\partial x^\ell} \right) \right) \\ &= |\det g|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial x^u}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i \partial x^u} \right) = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$-\Delta f = |\det g|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(g^{k\ell} |\det g|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial y^\ell} \right).$$

Diese Gleichung verwendet man auch um den Laplaceoperator auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) zu definieren. Man kann nachrechnen, dass $\Delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ der eindeutig bestimmte Operator ist, für den der Satz von Green

$$\int_M g(du, d\varphi) \operatorname{dvol}_g = \int_M \varphi \Delta u \operatorname{dvol}_g$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$ gilt, vgl. Übungsaufgabe 43.

Im \mathbb{R}^n konnten wir analog zu (II.1) einen Differentialoperator $P: C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^\ell) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^s)$ als Operator der Form (II.1) definieren, wobei nun die $a_\alpha(x) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^\ell, \mathbb{K}^s)$ waren. So können wir nun analog den Begriff des Differentialoperators auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten auch auf Vektorbündeln übertragen:

Definition II.1.6. Eine lineare Abbildung $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$, die in Koordinaten, die E und F trivialisieren, die Form (II.1) mit $a_\alpha \in \Gamma(\operatorname{Hom}(E, F))$ (also insbesondere $a_\alpha(x) \in \operatorname{Hom}(E_x, F_x)$) annimmt, ist ein *Differentialoperator* zwischen den Vektorbündeln E und F . Die Menge der Differentialoperatoren zwischen E und F der Ordnung ℓ bezeichnen wir mit $\operatorname{Diff}^\ell(E, F)$. Ist $E = F$, so schreiben wir auch $\operatorname{Diff}^\ell(E)$.

Beispiel II.1.7. Die äußere Ableitung $d: \Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) = \Gamma(\Lambda^{k+1} M)$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung: In lokalen Koordinaten hat ein $\alpha \in \Omega^k(M)$ die Form $f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und damit ist $d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, vgl. Seite 19. Also ist $d = b_a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}$ mit $b_a(x)(e \in \Lambda_x^k M) =$

*Das folgt direkt aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinanten.

$dx^a|_x \wedge e \in \Lambda_x^{k+1}M$.

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$. Sei g eine (semi-)Riemannsche Metrik auf M und ∇^g der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang. Wir können ∇ auch als Abbildung $\Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E) = \Gamma(T^*M \otimes E)$ auffassen. Ähnlich wie für d können wir sehen, dass auch ∇ ein Differentialoperator erster Ordnung ist, vgl. Übungsaufgabe 43.

Bemerkung II.1.8. (Intrinsische Darstellung von Differentialoperatoren) Benutzen wir den durch ∇^g und ∇ auf dem Vektorbündel $T^*M \otimes E$ induzierten Zusammenhang, vgl. Satz I.2.37, erhalten wir den Zusammenhang $\nabla: \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) = \Gamma(T^2M \otimes E)$ mittels:

$$\nabla_X^{T^*M \otimes E}(\alpha \otimes s) = (\nabla_X^{T^*M} \alpha) \otimes s + \alpha \otimes (\nabla_X^E s).$$

Auch das ist wieder ein Differentialoperator erster Ordnung. Induktiv können wir das fortführen (der Einfachheit halber bezeichnen wir auch diese ganzen Zusammenhänge einfach mit ∇):

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M^{\otimes 3} \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

Damit können wir diese Zusammenhänge insbesondere auch hintereinanderausführen und erhalten einen Differentialoperator durch

$$Pu := \sum a_k \nabla^k u \quad \text{mit } a_k \in \Gamma(\text{Hom}(T^*M^{\otimes k} \otimes E, F)) \cong \Gamma(TM^{\otimes k} \otimes \text{Hom}(E, F))$$

Hierbei wirkt der $TM^{\otimes k}$ -Anteil von a_k mit dem $T^*M^{\otimes k}$ -Anteil von $\nabla^k u$ mittels der natürlichen Paarung. Alle Differentialoperatoren zwischen Vektorbündeln E und F kann man so schreiben. Z.B. seien $E = F = TM$ über (M, g) . Dann sollte

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = a_1 \nabla - a_0$$

gelten. Wir bestimmen a_1 und a_0 : Für $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\nabla Y = dx^j \otimes \left(\frac{\partial Y}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^\ell Y^k \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right)$ und damit $a_1 = \partial_{x^1} \otimes \text{id} \in \Gamma(TM \otimes \text{Hom}(TM, TM))$ sowie $a_0 = \Gamma_{1k}^\ell dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell} \in \Gamma(T^*M \otimes TM) = \Gamma(\text{Hom}(TM, TM))$.

II.1.2.1. Formal adjungierte Operatoren

Seien E, F Vektorbündel über einer semi-Riemannschen Metrik (M, g) mit gewählten Bündelmetriken. Ist $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein Differentialoperator, dann ist sein *formal adjungierter Operator* der eindeutig bestimmte Differentialoperator $P^\dagger: \Gamma_c(F) \rightarrow \Gamma_c(E)$ für den

$$\int_M \langle \varphi, P\psi \rangle d\text{vol}_g = \int_M \langle P^\dagger \varphi, \psi \rangle d\text{vol}_g$$

für alle $\psi \in \Gamma_c(E)$ und $\varphi \in \Gamma_c(F)$ gilt. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Bündelmetrik auf F bzw. E . *

Beispiel II.1.9. (i) d^\dagger bezeichnen wir mit δ , vgl. Tabelle I.3. Aus $d^2 = 0$ folgt $\delta^2 = 0$. Nach Definition des Laplaceoperators auf Funktionen in Beispiel II.1.5 ist $\Delta = \delta d$.

(ii) $Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u$, $u \in C^\infty(M, \mathbb{K})$. Durch partielle Integration erhalten wir dann $P^\dagger v = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} v)$.

II.2. Hauptsymbol und Klassifikation

II.2.1. Hauptsymbol

Schon am Beispiel II.1.5 des Laplaceoperator haben wir gesehen, dass der lokale Ausdruck je nach Wahl der Koordinaten stark variieren kann – so können z.B. niedrigere Ordnungsterme verschwinden oder auftauchen. Man kann allerdings den Termen mit den höchsten Ableitungen einen koordinatenunabhängigen Sinn geben:

Der adjungierte Operator P^ von P als Operator auf $L^2(E)$ (im funktionalanalytischen Sinne) stimmt auf $\Gamma_c(F)$ mit P^\dagger überein. Hat i.A. allerdings einen größeren Definitionsbereich.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Definition II.2.1. Sei $P \in \text{Diff}^\ell(E, F)$. In lokalen Koordinaten um $x \in U$ sei $P = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in \Gamma(\text{Hom}(E, F)|_U)$. Dann sei das *Hauptsymbol* von P im Punkt $\xi = \xi_j dx^j \in T_x^* M$ definiert als

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) := i^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Hierbei ist $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m}$ mit $m = \dim M$.

Bevor wir im nächsten Lemma zeigen, dass diese Definition koordinatenunabhängig ist, bemerken wir zunächst den Faktor i in der Definition. Das ist zwar Wahl der Definition, kommt aber daher, dass der Übergang von $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha$ zum Hauptsymbol eine Fouriertransformation ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \partial_{x^i} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (i \xi_i) f(x) dx$$

gilt.

Lemma II.2.2. *Es gilt*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(x) \in \text{Hom}(E_x, F_x),^*$$

wobei f eine Funktion mit $d_x f = \xi$ ist. Insbesondere ist damit das Hauptsymbol ein wohldefinierte glatte Funktion auf $T^* M$, die in jeder Faser ein Polynom der Ordnung ℓ ist.

Beweis. Wir verwenden die Leibnizregel und sehen, dass $e^{-itf} \circ P \circ e^{itf}$ ein Polynom in t der Ordnung ℓ ist. Der Term der Ordnung ℓ in x hat die Form

$$(it)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \prod_{i=1}^m (\partial_{x^i} f(x))^{\alpha_i} = (it)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

(damit ist die rechte Seite im Lemma insbesondere unabhängig von der Wahl von f) und damit folgt die Behauptung. \square

Vorl. 21 Analog erhalten wir, vgl. Übungsaufgabe 41,

Lemma II.2.3. *Es gilt für $z \in E_x$*

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi) z = \frac{i^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ und $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist.

Beispiel II.2.4. Für die ersten Beispiele aus II.1.1 haben wir das Hauptsymbol des

- (i) Laplaceoperator: $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = |\xi|^2$
- (ii) Wellenoperator: $-\xi_0^2 + |\xi|^2$ (wobei ξ_0 zu $t = x^0$ gehört)
- (iii) Wärmeoperator: $-|\xi|^2$
- (iv) Cauchy-Riemann-Operator: $\frac{i}{2}(\xi_1 + i\xi_2)$
- (v) Sturm-Liouville: $p\xi^2$

*Hierbei ist e^{itf} als Multiplikationsoperator zu verstehen. D.h. ist $\varphi \in \Gamma(E)$, dann ist $(P \circ e^{itf})(\varphi) = P(e^{itf} \varphi)$. Insbesondere sagt das Lemma also auch, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ell} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})(\varphi)(x)$ wirklich nur von $\varphi(x)$ abhängt. Das ist für $(P\varphi)(x)$ natürlich falsch, sobald P nicht Ordnung Null hat.

Allgemein haben wir mittels Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} (e^{-itf} \circ P \circ e^{itf})u &= (1 - itf - \frac{t^2}{2}f^2 + O(t^3))(Pu + itP(fu) - \frac{t^2}{2}P(f^2u) + O(t^3)u) \\ &= Pu + it(P(fu) - fPu) - \frac{t^2}{2}(P(f^2u) - 2fP(fu) + f^2Pu) + O(t^3)u \\ &= \left(P + it[P, f] - \frac{t^2}{2}[[P, f], f] + O(t^3) \right) u. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für Differentialoperatoren der Ordnung 1 bzw. 2:

$$\sigma_1(P)(x, \xi) = i[P, f], \quad \sigma_2(P)(x, \xi) = -\frac{1}{2}[[P, f], f].$$

Beispiel II.2.5. Vgl. Übungsaufgabe 41.

- (i) Das Hauptsymbol $\sigma_1(d)(x, \xi) \in \text{End}(T_x^*M)$ der äußeren Ableitung $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist $\sigma_1(d)(x, \xi)\alpha = i\xi \wedge \alpha$.
- (ii) Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Wir betrachten den Zusammenhang als Abbildung $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$. Das ist nach Beispiel II.1.7 ein Differentialoperator erster Ordnung. Sein Hauptsymbol ist $\sigma_1(\nabla)(x, \xi)v = i\xi \otimes v$ für $v \in \Gamma(E)$.

Lemma II.2.6. Seien $P, P_1 \in \text{Diff}^{\ell_1}(E_1, E_2)$ und $P_2 \in \text{Diff}^{\ell_2}(E_2, E_3)$. Dann ist

$$\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi).$$

Außerdem gilt $\sigma_\ell(P^\dagger) = \sigma_\ell(P)^*$.

Beweis. Direktes Einsetzen. □

Bemerkung II.2.7. Für skalare Differentialoperatoren ($E_i = M \times \mathbb{R}$) ist $\sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1}(P_1)(x, \xi) \circ \sigma_{\ell_2}(P_2)(x, \xi)$ und damit $\sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_1 \circ P_2)(x, \xi) = \sigma_{\ell_1+\ell_2}(P_2 \circ P_1)(x, \xi)$, obwohl i.A. $P_1 \circ P_2 \neq P_2 \circ P_1$ gilt.

II.2.2. Elliptische, hyperbolische, parabolische, ... Differentialoperatoren

Das meiste was wir über (lineare) partielle Differentialgleichungen wissen, geht auf die folgenden drei Prototypen aus der klassischen Physik zurück:

- (i) Wellengleichung: $(-\partial_t^2 + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$ Hauptsymbol: $-\xi_0^2 + \sum_i \xi_i^2$ (Niveaumengen sind Hyperboloide in $\mathbb{R}^{n+1} \rightsquigarrow$ hyperbolische DGL)
Eine Lösung $u(x, t)$ in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (und glattem Rand) beschreibt die Bewegung einer Membran Ω am Punkt $x \in \Omega$ zur Zeit t . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wellengleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 && \text{Anfängliche Position} \\ \partial_t u(x, 0) &= u_1 && \text{Anfängliche Geschwindigkeit} \\ u(x, t) &= v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 && \text{Randbedingung.} \end{aligned}$$

- (ii) Wärmegleichung: $(-\partial_t + \sum_i \partial_{x_i}^2)u = 0$ Das volle Symbol (mit den Termen niedrigerer Ordnung): $-\xi_0 + \sum_i \xi_i^2$ (Niveaumengen sind Paraboloiden in $\mathbb{R}^{n+1} \rightsquigarrow$ parabolische DGL)
Eine Lösung $u(x, t)$ in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (und glattem Rand) beschreibt die Temperatur in $x \in \Omega$ zur Zeit t . Typischer Weise sucht man eine Lösung der Wärmegleichung unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 && \text{Anfängliche Temperatur} \\ u(x, t) &= v \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq 0 && \text{(Dirichlet) Randbedingung.} \end{aligned}$$

Alternativ treten andere Randbedingung auf, z.B. *Neumannrandbedingung* $\partial_\nu u(x, t) = v$ für $x \in \partial\Omega, t \geq 0$, wobei ν das Einheitsnormalfeld von $\partial\Omega$ ist.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

- (iii) Laplacegleichung: $\sum_i \partial_{x_i}^2 u = 0$ Hauptsymbol: $\sum_i \xi_i^2$ (Niveaumengen sind Ellipsoide in $\mathbb{R}^{n+1} \rightsquigarrow$ *elliptische DGL*)
Lösungen der Laplacegleichung sind stationäre (zeitunabhängige) Lösungen der Wärmeleichung.

Auf Mannigfaltigkeiten sehen die Gleichungen analog aus (jeweils mit dem Laplaceoperator der Riemannschen Mannigfaltigkeit, vgl. Beispiel II.1.5. Auf geschlossenen (=kompakt und ohne Rand) Mannigfaltigkeiten entfallen die Randwertbedingungen.

Die charakteristischen Eigenschaften der obigen drei Gleichungen sind sehr verschieden. Z.B. sind Lösungen der Laplacegleichung immer glatt, wogegen $u(x, t) = f(x - t)$ die Wellengleichung in \mathbb{R} löst, sobald f zweimal differenzierbar ist.

Ein Großteil wichtiger Eigenschaften und Methoden für partielle Differentialoperatoren sind wahr oder falsch oder anwendbar je nachdem, ob das Hauptsymbol 'ähnlich' zu dem einer der obigen Gleichungen ist. Daher kommt es, dass Teilmenge von Differentialoperatoren in die Gruppe der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren eingeteilt werden:

Definition II.2.8. Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r . Einen Differentialoperator zweiter Ordnung $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ heißt *elliptisch/hyperbolisch/parabolisch*, wenn in jedem Punkt $(x, \xi) \in T^*M$ das Hauptsymbol (nun lokal eine $r \times r$ -Matrix) positiv oder negativ definit ist/genau einen negativen und sonst nur positive Eigenwerte hat/genau einen Null Eigenwert hat und alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben.

Bemerkung II.2.9. Es stellt sich heraus, dass die meisten Eigenschaften elliptischer Operatoren sich auf Differentialoperatoren $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ beliebiger Ordnung übertragen lassen, solange das Hauptsymbol invertierbar ist. Deshalb nennt man auch solche Operatoren *elliptisch*.

Auch viele (wenn auch nicht alle) der linearen partiellen Differentialgleichungen, die in der Geometrie auftauchen, sind von diesem Typ:

- (i) elliptisch: Laplace und Diracgleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
- (ii) parabolisch:
 - a) Wärmeleichung
 - b) Mittlerer Krümmungsfluss: Sei $F: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine zeitabhängige Einbettung einer Hyperfläche M in \mathbb{R}^{n+1} mit Normalenvektorfeld ν und mittlere Krümmung H . Dann ist der mittlere Krümmungsfluss Lösungen F von

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H\nu.$$

- c) Ricci(de Turk)fluss* ist eine Evolutionsgleichung für die Metrik:

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

- (iii) hyperbolisch:†
 - a) Wellengleichung
 - b) Cauchyprobleme, z.B. in der ART

II.3. Elliptische Diffops

Aus der eindimensionalen Analysis kennen wir

*https://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_flow

†https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation

Regularität: $u'' = f \in C^k \implies u \in C^{k+2}$
 Existenz: $f \in C^k \implies \exists u \in C^{k+2}$ mit $u'' = f$

Gilt das auch für den Laplace in höheren Dimensionen? Folgt aus $\Delta u = f \in C^k$ dann auch $u \in C^{k+2}$ und aus $f \in C^k$ Existenz von $u \in C^{k+2}$ mit $\Delta u = f$? *Nein*. Aber fast - wenn man C^k durch Hölderräume oder Sobolevräume ersetzt:

II.3.1. Grundlagen und erste Anwendungen

II.3.1.1. Hölderräume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Der Raum $C^k(\bar{\Omega})$ ist der Raum aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen deren Norm $\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \max_{\alpha, |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f|$ endlich ist. Das ist ein Banachraum (= vollständig normierter Raum).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (= Abschluss einer zusammenhängenden beschränkten offenen Teilmenge) und $\alpha \in (0, 1]$. Dann nennen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *Hölder stetig mit Exponent α* , wenn

$$[f]_{\alpha, A} = \sup_{x, y \in A, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Zum Beispiel ist $f(x) = |x|^\alpha$ Hölder stetig für alle Exponenten $\beta < \alpha$. Alle Hölder stetigen Funktionen sind insbesondere stetig. Lipschitz-Stetigkeit wäre $\alpha = 1$. Man beschränkt sich auf $\alpha \in (0, 1]$, da $\alpha = 0$ würde für alle beschränkten Funktionen gelten, solche müssen nicht stetig sein, und bei $\alpha > 1$ würde die Bedingung nur für konstante Funktionen gelten.

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Dann definieren wir den *Hölderraum* $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ als den Raum aller $f \in C^k(\bar{\Omega})$, deren $C^{k, \alpha}$ -Norm

$$\|f\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \underbrace{\max_{0 \leq |\beta| \leq k} \sup_{x, y \in A, x \neq y} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x - y|^\alpha}}_{=: [f]_{\alpha, \Omega} \text{ Hölder-Halbnorm}}$$

Für $0 < \gamma < \alpha \leq 1$ gilt $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k, \gamma}(\bar{\Omega}) \subseteq C^k(\bar{\Omega})$.

Verallgemeinerung auf Schnitte von Vektorbündel über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit gewähltem Zusammenhang ∇ und gewählter Bündelmetrik:

$$\|s\|_{C^k(E)} := \max_{0 \leq \ell \leq k} \sup_{x \in M} |\nabla^\ell s|,$$

wobei $|\nabla^\ell s|$ die Norm bzgl. der induzierten Bündelmetrik auf $T^*M^{\otimes \ell} \otimes E$. Zur Verallgemeinerung der Hölderhalbnorm für ein $s \in \Gamma(E)$ müssen wir $s(x)$ mit $s(y)$ vergleichen – dazu gibt es den Paralleltransport: Sei $\Omega \subseteq M$ eine Teilmenge von M für die je zwei $x, y \in \Omega$ durch eine eindeutige Geodäte $c_{x, y}$ in Ω verbunden ist. Sei $\|^{y, x}: E_y \rightarrow E_x$ Paralleltransport entlang $c_{y, x}$. Wir setzen wir

$$[s]_{\alpha, \Omega} := \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|s(x) - \|^{y, x} s(y)|}{d_M(x, y)^\alpha}.$$

Wählen wir nun eine lokal endliche Überdeckung U_i von M , so dass jedes U_i zwei Punkte durch eine eindeutige Geodäte verbunden werden können, dann setzen wir $[s]_{\alpha, M} = \sup_i [s]_{\alpha, U_i}$ sowie

$$\|s\|_{C^{k, \alpha}(E)} := \|s\|_{C^k(E)} + \sum_i [\nabla^k s]_{\alpha, U_i}.$$

Der Raum $C^{k, \alpha}(E)$ sind alle Schnitte mit $\|s\|_{C^{k, \alpha}(E)} < \infty$. Der resultierende Raum ist wieder ein Banachraum und hängt (im Gegensatz zur Norm) bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten M nicht von der gewählten Überdeckung U_i , des gewählten Zusammenhangs ∇^E , der gewählten Bündelmetrik und der Riemannschen Metrik ab.

Satz II.3.1 (Arzela-Ascoli). *Sei $0 < \alpha < \beta < 1$ und M kompakt. Dann ist die Inklusion $C^{k, \beta}(E) \hookrightarrow C^{k, \alpha}(E)$ kompakt, d.h. jede beschränkte Folge in $C^{k, \beta}(E)$ hat eine konvergente Teilfolge in $C^{k, \alpha}(E)$.*

II.3.1.2. Sobolevräume

Vorl. 22 Ab sofort sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Bündelmetrik h und Zusammenhang ∇ . Für $s \in \Gamma_c(E)$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, sei

$$\|s\|_{W^{k,p}} := \left(\int_M \sum_{j=0}^k |\nabla^j s|^p \, \text{dvol}_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hier ist $\nabla^j s \in \Gamma(T^* M^{\otimes j} \otimes E)$ und $|\nabla^j s|$ steht für die durch g und h auf $T^* M^{\otimes j} \otimes E$ induzierte Bündelmetrik. Der Sobolevraum $W_0^{k,p}(E)$ ist die Vervollständigung von $\Gamma_c(E)$, den kompakt getragenen glatten Schnitten auf E in der $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ -Norm. Im Falle geschlossener Mannigfaltigkeiten setzen wir $W^{k,p}(E) := W_0^{k,p}(E)^*$. Für $k = 0$ erhalten wir die L^p -Räume $L^p(E) := W^{0,p}(E)$. Die $W^{k,p}$ ($1 \leq p < \infty$) sind alles Banachräume, im Falle $p = 2$ sogar Hilberträume[†] (in dem Falle schreiben wir kurz $H^k(E) := W^{k,2}(E)$).

Ist die Mannigfaltigkeit kompakt, dann sind die $W^{k,p}$ -Normen zu verschiedenen Riemannschen Metriken g , Zusammenhängen ∇^E und Bündelmetriken äquivalent. (Das ist falsch bei nichtkompakten Mannigfaltigkeiten)[‡]

Satz II.3.2. Sei M^m geschlossen. Sei $\sigma(p, k) := k - \frac{m}{p}$, $0 \leq \ell \leq k$, $f \in W^{k,p}(E)$. Dann gilt

- (i) Für $\sigma(p, k) < \ell$ und q mit $\sigma(q, \ell) \leq \sigma(p, k)$, dann ist die Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow W^{\ell,q}(E)$ stetig, also ein beschränkter Operator, d.h. es gibt eine f -unabhängige Konstante $c > 0$ mit $\|f\|_{W^{\ell,q}} \leq c \|f\|_{W^{k,p}}$. Gilt zusätzlich $\ell < k$ und $\sigma(q, \ell) < \sigma(p, k)$, dann ist diese Inklusion ein kompakter Operator, d.h. jede beschränkte Folge in $W^{k,p}(E)$ enthält eine in $W^{\ell,q}(E)$ konvergierende Teilfolge.
- (ii) Ist $\alpha := \sigma(p, k) - \ell \in (0, 1)$, dann ist die Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^{\ell,\alpha}(E)$ stetig. Ist zusätzlich $0 < \gamma < \alpha$, dann ist Inklusion $W^{k,p}(E) \hookrightarrow C^{\ell,\gamma}(E)$ kompakt.

Einige wichtige Spezialfälle:

- (i) Ist $f \in H^k(E)$ und $k > m$, dann ist $f \in C^{k-m}(E)$.
- (ii) $C^\infty = \bigcap_k H^k$.

Bemerkung II.3.3. (Wissenswertes zu kompakten Operatoren) [9] Kompakte Operatoren $K: H_1 \rightarrow H_2$ zwischen zwei Hilberträumen sind insbesondere beschränkt (d.h. Operatornorm $\|P\| := \sup_{s \in H_1, \|v\|_{H_1}=1} \|Pv\|_{H_2}$ ist endlich). Die Menge der beschränkten Operatoren zwischen beliebigen Hilberträumen bilden mit der Hintereinanderausführung eine Algebra und die Teilmenge der kompakten Operatoren bilden ein Ideal in den beschränkten Operatoren.

Bemerkung II.3.4. Unsere Differentialoperatoren $P: \Gamma(E) \subseteq L^2(E) \rightarrow \Gamma(F) \subseteq L^2(F)$ der Ordnung $k \geq 1$ sind immer unbeschränkt (als Operator von L^2 nach L^2), d.h. die Operatornorm $\|P\| = \sup_{s \in \Gamma_c(E), \|v\|_{L^2(E)}=1} \|Pv\|_{L^2(F)}$ ist ∞ . Als Operatoren $P: H^k \rightarrow L^2$ sind sie allerdings beschränkt: Z.B. für $Pf := f'$ für $f \in C^\infty(S^1)$ gilt

$$\|P: H^1 \rightarrow L^2\| = \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f'\|_{L^2(S^1)} \leq \sup_{f \in C^\infty(S^1), \|f\|_{H^1(S^1)}=1} \|f\|_{H^1(S^1)} = 1.$$

*Diese Gleichheit gilt nicht für allgemeine Mannigfaltigkeiten, aber für vollständige Mannigfaltigkeiten.

†Hilbertraum = Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt kommt. Z.B. $s, s' \in L^2(E)$ hat das L^2 -Skalarprodukt $(s, s')_{L^2} := \int_M \langle s, s' \rangle_E \, \text{dvol}_f$ – also einfach immer die polarisierte Norm.

‡Es gibt alternative Definitionen in lokalen Koordinaten und lokalen Trivialisierungen. Setzt man $\tilde{W}^{k,p}(E)$ die Vervollständigung von $C_c^\infty(E)$ in der Norm

$$\|f\|_{\tilde{W}^{k,p}} := \left(\sum_i \|(\xi_i)_* (\rho_i f)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^m)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $\kappa_i: U_i \subseteq M \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ Koordinaten auf einer lokal endlichen Überdeckung U_i von M mit zugehöriger Zerlegung der Eins ρ_i ist, $\theta_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$ lokale Trivialisierungen von E sind und $\xi_i := (\kappa_i \times \text{id}) \circ \theta_i: E|_{U_i} \rightarrow V_i \times \mathbb{K}^r$. Im Falle von geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist diese Norm äquivalent zur obigen Norm und unabhängig, ansonsten braucht man Annahmen an die Karten und Trivialisierungen.

II.3.1.3. Existenz von Lösungen

Satz II.3.5 (Fredholm-Alternative). [?, p.641] Seien $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow M$ Vektorbündel über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung ℓ . Dann gilt

- (i) Sowohl $\ker P$ als auch $\ker P^\dagger$ sind endlich dimensional.
- (ii) Ist $f \in W^{\ell,2}(F)$, dann existiert genau dann eine Lösung u von $Pu = f$, wenn f orthogonal (in $L^2(F)$) zu $\ker P^\dagger$. Diese Lösung ist eindeutig, falls u orthogonal (in $L^2(E)$) zu $\ker P$ ist.
- (iii) Für skalare elliptische Differentialoperatoren gilt $\dim \ker P = \dim \ker P^\dagger$.

Ist $E = F$, dann sind insbesondere die Eigenräume $\ker(P - \lambda Id)$ endlich dimensional.

Zu wichtigen Kernpunkten für den Beweis der Fredholm-Alternative sagen wir in Abschnitt II.3.1.4 etwas.

Bemerkung II.3.6. Der Definitionsbereich $\Gamma(F)$ von P^\dagger liegt dicht im Definitionsbereich in $L^2(F)$. Auch wenn der Definitionsbereich vom Adjungierten P^* i.A. größer ist, folgt aus der Elliptizität, dass $\ker P^\dagger = \ker P^*$ ist.

Folgerung II.3.7. In der Situation von Satz II.3.5 gilt außerdem

- (i) $W^{p,k}(F) = P(W^{p,k+\ell}(E)) \oplus \ker P^\dagger$ ($1 < p < \infty$)
- (ii) $C^{k,\alpha}(F) = P(C^{k+\ell,\alpha}(E)) \oplus \ker P^\dagger$
- (iii) $C^\infty(F) = P(C^\infty(E)) \oplus \ker P^\dagger$

Beispiel II.3.8. (Gewöhnliche Differentialgleichungen auf $S^1 = [0, 2\pi]/\sim$) Sei $Pu = u' + a(x)u$, $u, a \in C^\infty(S^1)$. Dann ist P elliptisch und $P^\dagger u = -u' + a(x)u$. Aus $P^\dagger u = 0$ folgt $u(x) = u(0)e^{\int_0^x a(y)dy}$. Damit $u \in C^\infty(S^1)$ müssen an a Bedingungen gestellt werden, insbesondere muss $\int_0^{2\pi} a(y)dy = 0$ sein. Es ist also $\dim \ker P^\dagger \leq 1$. (Für $a(x) = \sin x$ ist z.B. $\ker P^\dagger = \text{span}\{e^{1-\cos x}\}$.) Die Fredholmalternative sagt also, wir können genau dann $Pu = f \in C^\infty(S^1)$ für u lösen, wenn $f \perp_{L^2} \ker P^\dagger$ steht.

Beispiel II.3.9. Sei (M, g) eine geschlossene zusammenhängende* Riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der Laplace auf Funktionen. Wir betrachten $Pu = \Delta u + c(x)u$ mit $c(x) \geq 0$, $c \not\equiv 0$, und wollen $Pu = f$ lösen. Als erstes zeigen wir, dass $\ker P = \{0\}$ ist. Sei dazu $Pu = 0$. Dann gilt

$$0 = \int_M u(\Delta u + cu)d\text{vol}_g = \int_M (|du|_g^2 + cu^2)d\text{vol}_g \geq 0.$$

Also muss u konstant und damit $u \equiv 0$ sein. Wegen $P = P^\dagger$ können wir die Fredholmalternative anwenden und erhalten, dass $\Delta u + cu = f$ für alle $f \in C^\infty(M)$ eine eindeutige Lösung hat. Ist $c \equiv 0$, ergibt obige Methode, dass $\Delta u = f$ genau dann eine Lösung hat, falls $\int_M f d\text{vol}_g = 0$ gilt. Analoge Argumente funktionieren auch für vektorwertige Funktionen und c eine positiv definite Matrix oder auf Vektorbündeln mit geeigneten c , vgl. Abschnitt II.3.2.

Beispiel II.3.10 (Hodge-Zerlegung). Sei (M, g) eine geschlossene zusammenhängende orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ der Hodge-Laplace (Auf $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ist $\Delta = \delta d$ gleich dem Laplace aus Beispiel II.1.5). Sei $\mathcal{H}^k := \ker \Delta \subseteq \Omega^k(M)$ der Raum der harmonischen k -Formen. Nach Satz II.3.5 ist \mathcal{H}^k endlich dimensional. Wegen $\int_M g(h, \Delta h)d\text{vol}_g = \int_M g(h, (d\delta + \delta d)h)d\text{vol}_g = \int_M (|dh|_g^2 + |\delta h|_g^2)d\text{vol}_g$ ist

$$\mathcal{H}^k = \{h \in \Omega^k(M) \mid dh = 0 \text{ und } \delta^\dagger h = 0\}.$$

Für $\varphi \in \Omega^p(M)$ sei $\varphi = \psi + h$ die Zerlegung mit $h \in \mathcal{H}^p$ und $\psi \perp \mathcal{H}^p$. Nach Folgerung II.3.7 gibt es damit ein $\omega \in \Omega^p(M)$ mit $\Delta\omega = \psi$ und damit

$$\varphi = \Delta\omega + h = d\delta\omega + \delta d\omega + h = d\alpha + \delta\beta + h$$

*Was ändert sich für nicht zusammenhängende Mannigfaltigkeit? Ist c auf allen Zusammenhangskomponenten irgendwo ungleich Null, ändert sich nichts. Ist c auf einer oder mehreren Zusammenhangskomponenten gleich Null, kann man dort nicht mehr $u \equiv 0$ folgern, sondern nur, dass u auf jeder dieser Komponenten einen konstanten Wert annimmt.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

mit $\alpha = \delta\omega$ und $\beta = d\omega$. Wegen $d^2 = 0$ ist $d\alpha \perp \delta\beta$. Weiterhin ist $d\alpha \perp h$ und $\delta\beta \perp h$. Wir haben also damit eine orthogonale Zerlegung einer p -Form in exakte, ko-exakte und harmonische Formen - die sogenannte *Hodge-Zerlegung*.

Sei nun $\varphi = d\alpha + \delta\beta + h$ geschlossen, also $d\varphi = 0$. Dann ist $0 = d\delta\beta$ und somit $\|\delta\beta\|^2 = \int_M \beta d\delta\beta d\text{vol}_g = 0$, also $\delta\beta = 0$. Jede geschlossene Form hat also eine Hodge-Zerlegung der Form $\varphi = d\alpha + h$. Also ist h die eindeutige harmonische Form in der de-Rham Kohomologiekategorie von φ : $[\varphi] \in H_{dR}^p(M) := \frac{\ker d^p: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)}{\text{im } d^{p+1}: \Omega^{p+1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)}$.

Weiterhin sieht man wegen $\Delta = d\delta + \delta d$ und $\delta = (-1)^{mp-1} * d*$: $\Omega^{p+1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$, dass der Hodge-Laplace mit dem Hodge-Stern Operator kommutiert. Also bildet $*$ harmonische Formen auf harmonische Formen ab. Da $*$ eine Isometrie (bzgl. der L^2 -Norm) ist, ist $*$: $\mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^{m-p}$ eine Isometrie - die *Poincaré Dualität*.

Bemerkung II.3.11. Eine Verallgemeinerung von (iii) für elliptische Operatoren auf Vektorbündeln ist der *Index* $\text{ind}(P) := \dim \ker P - \dim \ker P^\dagger$ - (iii) sagt also, dass der Index von skalaren Differentialoperatoren verschwindet. Man kann zeigen, dass Das impliziert, dass der Index eines elliptischen glaubt man das, kann man sehen, dass alle Informationen für den Index eines elliptischen Operator in seinem Hauptsymbol enthalten sind: Sei $P = P_m + Q$ ein elliptische Operator der Ordnung m , wobei P_m nur die Terme der höchsten Ordnung enthält und alle niedrigeren Ordnungen in Q : $H^{m-1} \rightarrow L^2$ zusammengefasst sind. Da die Soboleveinbettung $H^m \hookrightarrow H^{m-1}$ kompakt ist, ist auch die Einschränkung $Q: H^m \rightarrow L^2$ ein kompakter Operator, vgl. Bemerkung II.3.3.

II.3.1.4. Elliptische Abschätzungen

Vorl. 23 Um die Fredholmalternative zu beweisen, braucht man insbesondere ein Kriterium, wann der Kern vom elliptischen Operator endlich dimensional ist. Ein solches Kriterium kommt mit folgendem allgemeinem Lemma aus der Funktionalanalysis:

Lemma II.3.12. *Seien X, Y, Z reflexive Banachräume (X ist reflexiv, falls $X^{**} = X$. Z.B. sind die Sobolevräume $W^{k,p}$ für $1 < p < \infty$ reflexiv, die Hölderräume sind nicht reflexiv.). Sei $X \hookrightarrow Y$ eine kompakte Inklusion und $L: X \rightarrow Z$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Das Bild $L(X)$ ist in Z abgeschlossen und der Kern $\ker L$ ist endlich dimensional.*
- (ii) *Es gibt Konstanten c_1 und c_2 so dass*

$$\|x\|_X \leq c_1 \|Lx\|_Z + c_2 \|x\|_Y$$

für alle $x \in X$ ist.

Das heißt die Hauptarbeit für die Fredholmalternative wird das Beweisen von Abschätzungen wie in (ii) sein - im Falle von elliptischen Operatoren nennt man diese elliptische Abschätzungen:

Satz II.3.13. *Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung k über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es Konstanten c_i so dass**

- (i) *(Schauder Abschätzung)*

$$\|u\|_{C^{k+\ell, \alpha}} \leq c_1 \|Pu\|_{C^{\ell, \alpha}} + c_2 \|u\|_{C^0} \leq c_3 \|u\|_{C^{k+\ell, \alpha}}$$

für alle $u \in C^{k+\ell, \alpha}(E)$ und

- (ii) *(L^p -Abschätzung)*

$$\|u\|_{W^{p, k+\ell}} \leq c_4 \|Pu\|_{W^{p, \ell}} + c_5 \|u\|_{L^1} \leq c_6 \|u\|_{W^{p, k+\ell}}$$

für alle $u \in W^{p, k+\ell}(E)$ gilt.

*die rechte Ungleichung ist jeweils klar nach Definition von P .

Bemerkung II.3.14. (i) Die linken Teile der Ungleichungen sind die eigentlichen elliptischen Abschätzungen. Die rechten Ungleichungen folgen direkt, da P von k -ter Ordnung ist.

(ii) Allgemein könnte es sein, dass mit der Einschränkung von P auf $W^{p,k+\ell}(E)$ der Kern $\ker P$ mit steigendem ℓ immer kleiner werden könnte. Da jedoch P elliptisch ist und die Koeffizienten von P glatt sind, zeigt das folgende Regularitätstheorem, dass $\ker P \subseteq \Gamma(E)$ ist.

Satz II.3.15. (Elliptische Regularität) [,] Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ elliptisch, Ordnung k , über einer kompakten Mannigfaltigkeit. Sei $u \in W^{k,p}(E)$ für ein $p \in (1, \infty)$ und sei $Pu = f$. Sei $p \leq r$. Dann folgt aus $f \in W^{\ell,p}$, dass $u \in W^{k+\ell,p}$ ist, bzw. aus $f \in C^{\ell,\alpha}$, dass $u \in C^{k+\ell,\alpha}$ ist.

Folgerung II.3.16. Sei P elliptisch und $Pu = \lambda u$. Dann ist auch $P - \lambda$ elliptisch und damit $u \in C^\infty$.

Bemerkung II.3.17. (Sonstige oft genutzte Lemmata der Funktionalanalysis)

(i) Jede nichtleere beschränkte und abgeschlossene Menge eines Hilbertraumes (oder allgemeiner eines reflexiven Banachraumes) enthält eine schwach konvergente Teilfolge. Hierbei heißt $v_i \rightarrow v$ schwach konvergent in B , wenn $\langle u, v_i \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$ für alle $u \in B^*$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die duale Paarung von B und seinem Dual B^* ist. Im Falle eines Hilbertraumes ist das einfach das Skalarprodukt.

(ii) Jede in der Norm konvergente Folge in B , konvergiert auch schwach. Die Umkehrung gilt i.A. nicht. (Standardbeispiel ist $H = L^2(\mathbb{R})$, Sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } u \in [0, 1]$. Setze $v_i(x) := u(x - i)$. Dann konvergiert v_i schwach gegen 0 (Es reicht, gegen $C_c^\infty(\mathbb{R})$ -Funktionen zu testen, da diese dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen.). Aber die Norm von v_i ist konstant.)

(iii) Konvergiert v_i schwach in B gegen v , dann gilt $\|v\|_B \leq \liminf \|v_i\|_B$.

II.3.2. Laplace-artige Operatoren

Definition II.3.18. Ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem reellen Vektorbündel $E \rightarrow M$ über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist *Laplace-artig* (vom Laplace-Typ), wenn sein Hauptsymbol in $\xi \in T_x^*M$ die skalare Multiplikation mit $|\xi|_g^2$ ist.

Bemerkung II.3.19. Ist (M, g) Riemannsch, ist der Laplace-artige Operator damit automatisch elliptisch; ist (M, g) Lorentzsch, dann hyperbolisch. Nach Beispiel II.2.4 ist P genau dann Laplace-artig, wenn $[[P, f], f] = -2|df|_g^2$ gilt.

Beispiel II.3.20. Der Hodge-Laplace $\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ ist Laplace-artig: Nach ?

Bemerkung II.3.21. In lokalen Koordinaten $x \in U$ hat ein Laplace-artiger Operator die Form

$$P = -g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + a^k \partial_{x^k} + b$$

mit $a^k, b \in \Gamma(\text{End}(E)|_U)$.

Beispiel II.3.22. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über (M, g) und Zusammenhang ∇^E . Wir definieren den *Zusammenhangs-Laplace* (Bochner-Laplace) durch

$$\Delta := -\text{Tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E): \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E).$$

Die Spur geht hier über die beiden Faktoren T^*M im Bild von $\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$. (Man beachte, dass die Spur hier als Spur einer Bilinearform metrikabhängig ist, vgl. [3, App. A].)

Wir haben

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= (\nabla^{T^*M \otimes E}(dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s))(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla^{T^*M} dx^i \otimes \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + dx^i \otimes \nabla^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) \\ &= (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) \nabla_{\partial_{x^i}}^E s + \delta_k^i \nabla_{\partial_{x^\ell}}^E \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \end{aligned}$$

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Mit $0 = \partial_{x^k}(dx^i(\partial_{x^\ell})) = (\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) + dx^i(\nabla_{\partial_{x^k}}^{TM}(\partial_{x^\ell}))$ folgt $(\nabla_{\partial_{x^k}}^{T^*M} dx^i)(\partial_{x^\ell}) = -\Gamma_{kl}^i$ und damit

$$\begin{aligned} (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) &= \nabla_{\partial_{x^\ell}}^E \nabla_{\partial_{x^k}}^E s - \Gamma_{kl}^i \nabla_{\partial_{x^i}}^E s \\ \text{also } (\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s)(X, Y) &= (\nabla_Y^E \nabla_X^E - \nabla_{\nabla_X Y}^E) s. \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta s = -g^{ij}(\nabla_{\partial_{x^i}}^E \nabla_{\partial_{x^j}}^E - \Gamma_{ij}^k \nabla_{\partial_{x^k}}^E) s.$$

Ist e_i ein Orthonormalrahmen in Punkt p , so hat der Bochner-Laplace im Punkt p damit die Darstellung $\nabla_E = -\sum_i \nabla_{e_i}^E \nabla_{e_i}^E$.

Insbesondere ist der Bochner-Laplace also auch vom Laplace Typ. Vergleicht man Übungsaufgabe 43.ii mit der lokalen Darstellung von oben, sieht man: $\Delta = -(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$.

Satz II.3.23. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über (M, g) . Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein Operator vom Laplace-Typ. Dann gibt es einen eindeutigen Zusammenhang ∇^E auf E und ein eindeutiges $Q \in \Gamma(\text{End}(E))$ mit $P = \Delta^E + Q$, wobei Δ^E der Bochner-Laplace zu ∇^E ist.

Beweis. Es reicht ein ∇^E zu finden, so dass $[P - \Delta^E, f] = 0$ ist, denn dann ist $P - \Delta^E$ nach Beispiel II.2.4 ein Operator 0-ter Ordnung. Allgemein ist

$$\begin{aligned} [\Delta^E, f]s &= (\Delta f)s + 2df(\partial_{x^i})\nabla_{\partial_{x^i}}^E s =: (\Delta f)s + 2\langle df, \nabla^E s \rangle \\ [P - \Delta^E, f]s &= [P, f]s - (\Delta f)s - 2\langle df, \nabla^E s \rangle. \end{aligned}$$

Unser Ansatz für ∇^E ist also $2\langle df, \nabla^E s \rangle = [P, f]s - (\Delta f)s$. Das definiert einen eindeutigen Zusammenhang ∇^E und zeigt damit die Behauptung. \square

Beispiel II.3.24. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der induzierte Zusammenhang auf $\Lambda^k M$. Sei $\Delta = d\delta + \delta d$ der Hodge-Laplace auf $\Omega^k(M)$. Dann ist

$$\Delta = -(\nabla)^\dagger \nabla + Q$$

mit $Q = -e_i^\flat \wedge \iota(e_j)R(e_i, e_j)$, wobei e_i ein lokaler Orthonormalrahmen auf M ist, vgl. Übungsaufgabe 46.* Mehr solcher Identitäten in Abschnitt II.3.5.

II.3.3. Spektrum des Laplaceoperators auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Es gibt allgemeine abstrakte Sätze mit denen man einen Spektralsatz für den Laplaceoperator zeigen kann, siehe Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren in der Funktionalanalysis [9], vgl. Satz II.3.26. Um zu sehen was passiert und weil es einige oft auftretende Methoden verwendet, beweisen wir hier den Spektralsatz für den Laplaceoperator von Funktionen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu Fuß:

Satz II.3.25. Der Laplaceoperator $\Delta: C^\infty(M) \subseteq L^2(M) \rightarrow C^\infty(M) \subseteq L^2(M)$ auf einer zusammenhängenden geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) besitzt eine unendliche Folge von Eigenwerten $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit zugehörigen L^2 -orthonormalen Eigenfunktionen φ_j :

$$\Delta \varphi_j = \lambda_j \varphi_j. \tag{II.2}$$

Weiterhin ist der einzige Häufungspunkt der Eigenwerte $+\infty$. Insbesondere sind die Eigenräume endlich dimensional und die Eigenfunktionen bilden eine vollständige Basis in L^2 . Ist f glatt, dann konvergiert seine Zerlegung in Eigenfunktionen uniform in C^k für alle k .

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass aufgrund der Sätze zur elliptischen Regularität alle φ_j glatt sind.

(i) ($\lambda_j \geq 0$) Wir multiplizieren (II.2) mit φ_j und integrieren:

$$0 \leq \int_M |\nabla \varphi_j|_g^2 d\text{vol}_g = \int_M \varphi_j \Delta \varphi_j d\text{vol}_g = \lambda_j \int_M |\varphi_j|^2 d\text{vol}_g = \lambda_j.$$

*Hier ist R der Krümmungstensor zu ∇ auf $\Lambda^k M$, d.h. $R(e_i, e_j): \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$.

- (ii) ($\lambda_0 = 0$) Wähle $\varphi_0 = \text{vol}(M, g)^{-1/2}$.
- (iii) (Endlich-dimensionale Eigenräume und keinen endlichen Häufungspunkt) Sei $E_m := \{\varphi \mid \exists \lambda_j \leq m: (\Delta - \lambda_j)\varphi = 0\}$. Es reicht zu zeigen, dass E_m endlich dimensional ist. Wie in (i) erhalten wir $\int_M |\nabla \varphi|_g^2 d\text{vol}_g \leq m$ für $\varphi \in E_m$. Damit ist E_m in H^1 beschränkt. Nehmen wir an, dass E_m unendlich dimensional wäre, dann gebe es eine Orthonormalfolge $u_i \in E_m$. Diese in H^1 beschränkte Folge, hat eine in H^1 schwach konvergente Teilfolge $u_{i_j} \rightarrow \varphi \in H^1$. Nach dem Soboleveinbettungssatz für $H^1 \hookrightarrow L^2$ konvergiert eine Teilfolge $u_{i_{j_k}}$ in L^2 gegen φ .^{*} Damit muss auch $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ sein. Da die u_i aber alle orthonormal sind, gilt $\|u_i - u_j\|_{L^2}^2 = 2$. Keine Teilfolge von u_i kann also eine L^2 -Cauchyfolge sein, was den Widerspruch gibt.
- (iv) (Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal) Der Beweis ist wie bei symmetrischen Matrizen und benutzt die formale Selbstadjungiertheit von Δ :

$$\lambda_j \int_M \varphi_k \varphi_j d\text{vol}_g = \int_M \varphi_k \Delta \varphi_j d\text{vol}_g = \int_M (\Delta \varphi_k) \varphi_j d\text{vol}_g = \lambda_k \int_M \varphi_k \varphi_j d\text{vol}_g.$$

- (v) (Existenz der Eigenfunktionen und Häufungspunkt bei unendlich.) Wir haben schon gesehen, dass φ_0 existiert. Nehmen wir nun an wir haben die Existenz von $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ gezeigt (die zugehörigen normalisierten Eigenfunktionen heißen φ_j) und das sind insbesondere alle Eigenwerte (jeweils gezählt mit Multiplizität) $< \lambda_k$ und ein paar $= \lambda_k$ (Das müssen noch nicht alle sein – kann sein, dass das wir da noch nicht alle gefunden haben). Sei $E_k := \text{span}\{\varphi_j \mid j \leq k\}$ und E_k^\perp das zu E_k orthogonale Komplement in L^2 und sei $E_k^\perp := H^1 \cap (E_k^\perp)$. Sei $u \in E_k^\perp$. Wegen $\int_M \varphi_j \Delta u = \lambda_j \int_M \varphi_j u$ ist $\Delta u \in E_k^\perp$. Sei nun

$$\lambda := \inf_{u \in E_k^\perp} \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}. \tag{II.3}$$

Der Quotient rechts heißt *Rayleigh-Ritz-Quotient* und ist im Fall $u \in H^2$ gleich $\inf_{u \in E_k^\perp} \frac{\int_M u \Delta u d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2(g)}^2}$.

Analog zur min-max Charakterisierung von Eigenwerten von Matrizen (Satz von Courant-Fischer) erwarten wir, dass λ der $(k+1)$ -te Eigenwert ist: Sei nun $u_j \in E_k^\perp$ eine minimierende Folge für λ , also $\|u_j\|_{L^2(g)} = 1$ und $\|\nabla u_j\|_{L^2(g)}^2 \rightarrow \lambda$. Damit ist $\|\nabla u_j\|_{L^2(g)}$ in H^1 beschränkt und damit enthält u_j eine schwach konvergente Teilfolge in H^1 (die wir im Folgenden auch wieder mit u_j bezeichnen). D.h. es gibt ein $u \in H^1$ mit $\langle z, u_j - u \rangle_{H^1} \rightarrow 0$ für alle $z \in H^1$. Insbesondere ist $u \in E_k^\perp$, denn aus $u = \sum_{j \leq k} a_j \varphi_j + \bar{u}$ mit $\bar{u} \in E_k^\perp$ folgt mit der Wahl $z = \varphi_j$, dass $\langle z = \varphi_j, u_j - u \rangle_{H^1} = -\langle \varphi_j, u \rangle = -a_j = 0$ ist. Des Weiteren sagt der Soboleveinbettungssatz, dass u_j in L^2 gegen u konvergiert. Also ist $\|u\|_{L^2(g)} = 1$. Aus $\langle z, u_j - u \rangle_{H^1} = \langle z, u_j - u \rangle_{L^2} + \langle \nabla z, \nabla(u_j - u) \rangle_{L^2} \rightarrow 0$ folgt damit $\langle \nabla z, \nabla(u_j - u) \rangle_{L^2} \rightarrow 0$ und somit

$$\|\nabla u\|_{L^2(g)}^2 = \lim_j \langle \nabla u, \nabla u_j \rangle_{L^2} \leq \lim_j \|\nabla u\|_{L^2(g)} \|\nabla u_j\|_{L^2(g)} = \sqrt{\lambda} \|\nabla u\|_{L^2(g)}$$

Wäre $\nabla u = 0$, wäre $u = \text{const}$ und damit schon in $E_0 \subseteq E_k$. Es ist also $\|\nabla u\|_{L^2(g)} \leq \sqrt{\lambda}$. Andererseits sagt die Definition von λ , dass $\|\nabla u\|_{L^2(g)} \geq \sqrt{\lambda}$ ist. Also gilt schon Gleichheit und $u \in E_k^\perp$ minimiert (II.3). D.h. wie bei den kritischen Punkten aus der endlich dimensionalen Analysis, gilt für alle $v \in E_k^\perp$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\|\nabla(u + \epsilon v)\|_{L^2}^2}{\|u + \epsilon v\|_{L^2}^2} = \frac{\int_M g(\nabla u, \nabla v) d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^2} - \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 \int_M u v d\text{vol}_g}{\|u\|_{L^2}^4} \\ &= \int_M (g(\nabla u, \nabla v) - \lambda u v) d\text{vol}_g \end{aligned} \tag{II.4}$$

Da $u \in E_k^\perp$ ist, gilt die letzte Gleichung auch für alle $v \in E_k$ und damit insgesamt für alle $v \in H^1$. Wüssten wir schon, dass u zwei mal (schwach) differenzierbar ist, würde mittels partieller Integration

^{*}Das die Folge nicht nur irgendwie konvergiert, sondern auch gegen das $\varphi \in H^1$ folgt aus der Eindeutigkeit der Limiten: $u_{i_{j_k}} \rightarrow \varphi$ schwach in H^1 impliziert, dass diese Konvergenz auch schwach in L^2 . Damit muss auch der Limes in der L^2 -Normkonvergenz φ sein.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

direkt $\Delta u = \lambda u$ folgen und dann $u \in C^\infty$ mittels elliptischer Regularität. Wissen wir aber noch nicht.

Nach Beispiel II.3.9 ist der Kern von $L\tilde{u} := \Delta\tilde{u} + \tilde{u}$ gleich $\{0\}$. Da $u \in H^1$, folgt mit Folgerung II.3.7.i, dass es eine eindeutige Lösung $w \in H^3$ von $Lw = (1 + \lambda)u$. Wir zeigen, dass $u = w$ und damit $u \in H^3$ gilt:

$$\int_M vL(z := w - u)d\text{vol}_g = \int_M v((1 + \lambda)u - \Delta u - u)d\text{vol}_g = \int_M v(\lambda u - \Delta u)d\text{vol}_g \stackrel{\text{(II.4)}}{=} 0.$$

Diese Gleichung gilt für alle $v \in C^\infty(M)$. Man sagt z ist eine *schwache Lösung* von $Lz = 0$. Da $C^\infty(M)$ in H^1 dicht liegt, gilt $\int_M vLz d\text{vol}_g = 0$ auch für alle $v \in H^1(M)$. Wir wählen nun $v = u$ und erhalten

$$\int_M (\lambda z^2 + |\nabla u|_g^2) d\text{vol}_g = 0$$

Wegen $\lambda \geq 0$, muss $z = 0$ sein. Also ist $u \in H^3 \cap E_k^\perp$ und damit $\Delta u = \lambda u$. Insbesondere ist $\lambda \geq \lambda_k$ und wir haben gesehen, dass es immer noch einen weiteren Eigenwert gibt. Da die Eigenräume endlich-dimensional sind, bedeutet das auch, dass unendlich ein Häufungspunkt der Eigenwerte ist.

- (vi) (L^2 -Vollständigkeit und L^2 -uniforme Konvergenz der Eigenfunktionen) Sei Π_N die L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum, der durch die ersten N Eigenfunktionen von Δ aufgespannt wird:

$$\Pi_N \varphi := \sum_{j \leq N} \langle \varphi, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Wir werden zeigen, dass $\varphi - \Pi_N \varphi \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ und $\varphi \in L^2$. Dazu schränken wir uns zuerst auf den Fall $\varphi \in H^2$ ein. Es gilt, vgl. (v),

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} &\leq \frac{\int_M (\varphi - \Pi_N \varphi) \Delta (\varphi - \Pi_N \varphi) d\text{vol}_g}{\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2} \\ &\stackrel{\Pi_N \Delta = \Delta \Pi_N}{=} \frac{\int_M (\varphi - \Pi_N \varphi) \Delta \varphi - (\varphi - \Pi_N \varphi) \Pi_N \Delta \varphi d\text{vol}_g}{\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2} \\ &\stackrel{\Pi_N = \Pi_N^\dagger = \Pi_N^2}{=} \frac{\int_M |\nabla \varphi|_g^2 + |\nabla \Pi_N \varphi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2} \leq \frac{2 \int_M |\nabla \varphi|_g^2 d\text{vol}_g}{\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 &= \|\nabla \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2 + \|\nabla (1 - \Pi_N) \varphi\|_{L^2}^2 + \underbrace{\langle \nabla \Pi_N \varphi, \nabla (1 - \Pi_N) \varphi \rangle_{L^2}}_{= \langle \Pi_N \Delta \varphi, (1 - \Pi_N) \varphi \rangle_{L^2} = 0} \\ &\geq \|\nabla \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

verwendet haben. Da $\lambda_{N+1} \rightarrow \infty$ konvergiert, folgt $0 \leftarrow \|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2}^2$.

Sei nun $\varphi \in L^2$. Wir wissen, dass glatte Funktionen in L^2 dicht sind. D.h. es gibt $\varphi^i \in C^\infty$ mit $\varphi^i \rightarrow \varphi$ in L^2 und wir haben

$$\begin{aligned} \|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2} &\leq \|\varphi - \varphi^i\|_{L^2} + \|\varphi^i - \Pi_N \varphi^i\|_{L^2} + \|\Pi_N (\varphi^i - \varphi)\|_{L^2} \\ &\leq 2\|\varphi - \varphi^i\|_{L^2} + \|\varphi^i - \Pi_N \varphi^i\|_{L^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- (vii) (Ist f glatt, dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in C^k .) Wir zeigen die allgemeinere Aussage: Ist $f \in H^{2k}$, dann konvergiert die Zerlegung in Eigenfunktionen sogar in H^{2k} . Den Fall $k = 0$ haben wir schon abgehandelt. Wir definieren $|u|_{H^{2k}} := \|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2}$ für $u \in C^\infty(M)$. Es gilt

$$\|u\|_{L^2} \|(\Delta + \text{Id})u\|_{L^2} \geq \int_M u(\Delta + I)u d\text{vol}_g = \int_M |\nabla u|^2 d\text{vol}_g + \int_M u^2 d\text{vol}_g \geq \|u\|_{L^2}^2$$

und damit $\|(\Delta + \text{Id})^\ell u\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Da $(\Delta + \text{Id})^\ell$ noch immer ein elliptischer Operator ist, folgt:

$$\|u\|_{H^{2k}} \leq c(\|(\Delta + \text{Id})^k u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq c'|u|_{H^{2k}} \leq c''\|u\|_{H^{2k}}.$$

Beide Normen sind also äquivalent. Sei nun $u \in H^{2k}$, $u = \sum \alpha_j \varphi_j$, dann ist $v := (\Delta + \text{Id})^k u \in L^2$. Für v haben wir eine Zerlegung $v = \sum \beta_j \varphi_j$ in Eigenfunktion von Δ , die in L^2 -konvergiert. Dann ist $u = \sum \beta_j (\lambda_j + 1)^{-k} \varphi_j$, also $\alpha_j = \beta_j (\lambda_j + 1)^{-k}$ und

$$\|u - \Pi_N u\|_{H^{2k}} \leq C\|(\Delta + \text{Id})^k (u - \Pi_N u)\|_{L^2} = C\|v - \Pi_N v\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

□

Allgemeiner gilt

Vorl. 25

Satz II.3.26. Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein streng elliptischer Differentialoperator (siehe folgende Definition) auf dem Vektorbündel $E \rightarrow M$ über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen. Die zugehörigen Eigenwerte haben nur im Unendlichen einen Häufungspunkt.

Definition II.3.27. Ein Differentialoperator $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ist streng elliptisch, wenn für sein Hauptsymbol $\sigma(P)(x, \xi): E_x \rightarrow E_x$ die quadratische Form

$$Q(\eta \in E_x \cong \mathbb{K}^r) := \text{Re } \sigma(P)(x, \xi)_{ij} \eta^i \bar{\eta}^j \geq c|\eta|^2 |\xi|^2$$

für ein $c > 0$, welches von x abhängen darf, aber nicht von ξ und η .

Bemerkung II.3.28. Streng elliptische Operatoren sind insbesondere elliptisch.

Beispiel II.3.29. (i) Laplace-artige Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind streng elliptisch. Damit ist insbesondere der Hodge-Laplace streng elliptisch und der letzte Satz impliziert mit Beispiel ??, dass die deRham-Kohomologien endlich dimensionale Vektorräume sind.

(ii) Nur Differentialoperatoren gerade Ordnung können streng elliptisch sein.

Beispiel II.3.30. Wir betrachten S^1 , benutzen $\theta \in [0, 2\pi)$ als Koordinate und setzen

$$Pu = - (e^{-i\theta} \partial_\theta)^2 u$$

Es gilt $P e^{\pm i\lambda e^{i\theta}} = \lambda^2 e^{\pm i\lambda e^{i\theta}}$. Also ist λ^2 für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert – also alle komplexen Zahlen sind Eigenwerte. Das Hauptsymbol von P ist $e^{-2i\theta} \xi^2$ - damit ist P elliptisch aber nicht streng elliptisch.

II.3.4. Dirac-artige Operatoren

Definition II.3.31. Seien $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow M$ zwei Vektorbündel über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Ein Differentialoperator $D \in \text{Diff}^1(E, F)$ ist Dirac-artig (vom Dirac-Typ), wenn $D^\dagger D$ und DD^\dagger Laplace-artige Operatoren sind.

Beispiel II.3.32. (i) Für den Diracoperator aus Beispiel II.1.1(vii) gilt $D = D^\dagger$ und D^2 wirkt komponentenweise als Wellenoperator.

(ii) Ist $D \in \text{Diff}^1(E, F)$ vom Dirac-Typ, dann ist auch

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix} \in \text{Diff}^1(E \oplus F)$$

Dirac-artig und es gilt $\tilde{D} = \tilde{D}^\dagger$.

(iii) De Rham Operator: $d + \delta \in \text{Diff}^1(\Omega^* M := \bigoplus_k \Omega^k(M))$ ist Dirac-artig: Denn $(d + \delta)^\dagger = \delta + d$ und $(d + \delta)^2 = d\delta + \delta d = \Delta$ ist der Hodge-Laplace.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

Bemerkung II.3.33. Sei D ein symmetrischer (d.h. $D = D^\dagger$) Dirac-artiger Operator auf $E \rightarrow M$ zur (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $\sigma_1(D)(x, \xi): E_x \rightarrow E_x$ sein Symbol. Für festes x setzen wir $\theta(\xi) = i\sigma_1(D)(x, \xi)$. Aus $D = D^\dagger$ folgt $\theta(\xi) = -\theta(\xi)^\dagger$. Da D Dirac-artig ist, gilt weiterhin $\theta(\xi)^2 = -|\xi|_g^2 \text{Id}_{E_x}$. Polarisieren ergibt für $\xi, \eta \in T_x^*M$

$$\theta(\xi)\theta(\eta) + \theta(\eta)\theta(\xi) = -2g(\xi, \eta)\text{Id}_{E_x}.$$

Abstrakt gesprochen haben wir eine quadratische Form q auf dem Vektorraum V , einen Vektorraum W und eine lineare Abbildung

$$\text{cl}: V \rightarrow \text{End}(W)$$

so dass

$$\text{cl}(v)\text{cl}(v) = -q(v)\text{Id}_W$$

gilt (bei uns war $q = g_x$, $V = T_x^*M$ und $W = E_x$). Eine solche Abbildung cl nennen wir *Cliffordmultiplikation*. Mittels $\text{cl}(v^\sharp) := \text{cl}(v)$ erweitert man die Cliffordmultiplikation auch V^* . Ab jetzt sei q immer nichtentartet.

Definition II.3.34. Ein Vektorbündel E über einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) zusammen mit einer Cliffordmultiplikation

$$\text{cl}: \Gamma(T^*M) \rightarrow \text{End}(E)$$

heißt *Cliffordmodul*. Ein Zusammenhang ∇^E heißt *kompatibel mit der Cliffordmultiplikation*, falls $[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt (d.h. $\nabla_Y^E(\text{cl}(X)s) - \text{cl}(X)(\nabla_Y^E s) = \text{cl}(\nabla_Y X)s$ und ∇ ist der Levi-Civita-Zusammenhang). Ein solcher Zusammenhang heißt auch *Cliffordzusammenhang*. Eine Bündelmetrik h_E ist *kompatibel* mit der Cliffordmultiplikation, falls $h_E(\text{cl}(\theta)s_1, s_2) = -h_E(s_1, \text{cl}(\theta)s_2)$ für alle $s_i \in \Gamma(E)$ und $\theta \in \Omega^1(M)$ gilt.

Ein *Diracbündel* ist ein Cliffordmodul $E \rightarrow M$ mit Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ und metrischen Zusammenhang ∇^E , für den sowohl h^E als auch ∇^E mit der Cliffordmultiplikation kompatibel sind.

Bemerkung II.3.35. Jedes Diracbündel besitzt einen Operator vom Dirac-typ $D \in \text{Diff}^1(E)$:

$$D: \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\text{cl}} \Gamma(E).$$

In lokalen Koordinaten $x \in U$ ist $D = \text{cl}(dx^i)\nabla_{\partial_{x^i}} = g^{ij}\text{cl}(\partial_{x^j})\nabla_{\partial_{x^i}}$. Wir berechnen D^\dagger : Es reicht, das lokal zu berechnen. Wir wählen geodätische Normalkoordinaten um $x \in U$. Sei $e_i := \partial_{x^i}$. Dann ist $\nabla_{e_i} e_j|_x = 0$. Seien $s_i \in \Gamma_c(E|_U)$. Dann ist im Punkt x :

$$\begin{aligned} \langle Ds_1, s_2 \rangle &= \langle \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i}s_1, s_2 \rangle \stackrel{\text{cl und } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ kompatibel}}{=} -\langle \nabla_{e_i}s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle \\ &\stackrel{\text{metr.}}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_{e_i}(\text{cl}(e_i)s_2) \rangle \\ &\stackrel{[\nabla^E, \text{cl}(X)] = \text{cl}(\nabla X)}{=} -e_i \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle + \langle s_1, \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i}s_2 \rangle \\ &= -\text{div}V + \langle s_1, Ds_2 \rangle \end{aligned}$$

mit $V = V^i e_i$ und $V^i = \langle s_1, \text{cl}(e_i)s_2 \rangle$. Damit ist

$$\int_M \langle Ds_1, s_2 \rangle \text{dvol}_g = \int_M \langle s_1, Ds_2 \rangle \text{dvol}_g,$$

also $D = D^\dagger$. Weiterhin ist $[D, f] = \text{cl}(df)$ und damit $\sigma_1(D)(x, \xi) = \text{icl}(\xi)$. Also ist $\sigma_2(D^2)(x, \xi) = |\xi|_g^2$.

Beispiel II.3.36. (Vgl. Übungsaufgabe 49) Für den de-Rham Operator aus Beispiel II.3.32 ist die Cliffordmultiplikation mit einer 1-Form $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ durch $\text{cl}(\omega) = \omega \wedge \cdot - \iota_{\omega^\sharp}$ gegeben, vgl. auch Übungsaufgabe 41 für die Berechnung der jeweiligen Hauptsymbole. Wir haben $\text{cl} \circ \nabla = d + \delta$.

Bemerkung II.3.37. Die Cliffordmultiplikation $\text{cl}: V \rightarrow \text{End}(W)$ (also $\text{cl}(v)\text{cl}(v) = -q(v)\text{Id}$) kann auch hintereinander ausgeführt werden, d.h. Sie erweitert sich auf

$$\text{cl}: \bigotimes V = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots \rightarrow \text{End}(W)$$

und es gilt $\text{cl}(v \otimes w + w \otimes v + 2q(v, w)\text{Id}) = 0$. Damit verschwindet cl auch auf dem Ideal \mathcal{I} , welches von $v \otimes w + w \otimes v + 2q(v, w)\text{Id}$ erzeugt wird. Den Quotienten

$$C(V) := \text{Cl}(V, q) := \bigoplus_k V^{\otimes k} / \mathcal{I}$$

nennt man Cliffordalgebra (Die Algebrastruktur ist von der Tensoralgebra $\otimes V$ geerbt). Also kann die Cliffordmultiplikation auch als Abbildung $\text{cl}: C(V) \rightarrow \text{End}(W)$ betrachtet werden. Des Weiteren ist die Lieklammer auf $C(V)$ abgeschlossen: $[[a], [b]] = [a \otimes b - b \otimes a]$ für $a, b \in \bigoplus_k V^{\otimes k}$ (also $[a], [b] \in C(V)$) und man kann nachrechnen, dass die Jacobiidentität gilt. Wir schreiben für Elemente in $C(V)$ in Zukunft die \otimes nicht mehr mit. $C(V)$ besitzt einen anti-Automorphismus $a = e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto a^t = e_{i_k} \dots e_{i_1}$ für eine Orthonormalbasis von (V, q) mit $(ab)^t = b^t a^t$.

Beispiel II.3.38. Man kann zeigen, dass für $\text{Cl}(n) := \text{Cl}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ gilt: $\text{Cl}(2k) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \Sigma_{2k})$ und $\text{Cl}(2k+1) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \Sigma_{2k+1}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k} =: \hat{\Sigma}_{2k+1})$ ist. Diese Gleichheiten sind Algebrenisomorphismen - man muss allerdings dazu sagen, wie die Cliffordmultiplikation jeweils auf \mathbb{C}^{2^k} wirkt: Die Cliffordmultiplikation auf $\Sigma_1 = \mathbb{C}$ ist durch $\text{cl}(e_1)\varphi := -i\varphi$ und auf $\hat{\Sigma}_1 = \mathbb{C}$ ist durch $\hat{\text{cl}}(e_1)\varphi := i\varphi$ gegeben. Der Rest wird induktiv definiert:

(i) Sei n ungerade: Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \Sigma_n \oplus \hat{\Sigma}_n$ mit der Cliffordmultiplikation

$$\begin{aligned} \text{cl}(e_k)(\sigma_1, \sigma_2) &:= (\text{cl}(e_k)\sigma_1, \hat{\text{cl}}(e_k)\sigma_2) \quad k = 1, \dots, n \\ \text{cl}(e_{n+1})(\sigma_1, \sigma_2) &:= (-\sigma_2, \sigma_1) \end{aligned}$$

(ii) Sei n gerade: Wir setzen $\Sigma_{n+1} := \hat{\Sigma}_{n+1} := \Sigma_n$ mit der Cliffordmultiplikation $\text{cl}(e_k)$ auf Σ_{n+1} ist gleich $\text{cl}(e_k)$ (und $\hat{\text{cl}}(e_k)$ auf $\hat{\Sigma}_{n+1}$ ist gleich $-\text{cl}(e_k)$ auf Σ_n) für $k = 1, \dots, n$. $\text{cl}(e_{n+1})\sigma := i\sigma$ auf Σ_{n+1} und $\hat{\text{cl}}(e_{n+1})\sigma := -i\sigma$ auf $\hat{\Sigma}_{n+1}$.

Folgerung II.3.39. Ist e_i eine Orthonormalbasis von q , d.h. $q(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$ (q muss also nicht entartet sein, aber nicht unbedingt positiv definit). Dann ist die durch

$$c: e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^k V := \bigoplus_{\ell \geq 0} \Lambda^\ell V \mapsto \text{cl}(e_{i_1}) \dots \text{cl}(e_{i_k}) \in C(V)$$

erzeugte lineare Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Bemerkung II.3.40. c ist kein Algebrenisomorphismus, da $0 = c(0 = e_1 \wedge e_1) \neq c(e_1)c(e_1) = -1$ ist.

Lemma II.3.41. Die Abbildung $\tau: a \in \Lambda^2(V) \mapsto (v \mapsto [a, v] := c(a)\text{cl}(v) - \text{cl}(v)c(a)) \in \text{Hom}(V, C(V))$ ist ein Isomorphismus aufs Bild $\mathfrak{o}(V) \subseteq \text{Hom}(V, V) \subseteq \text{Hom}(V, C(V))$.

Beweis. Übungsaufgabe 50 □

Bemerkung II.3.42. (i) Sei $A \in \mathfrak{o}(V)$. Dann ist $c(\tau^{-1}(A)) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} q(Ae_i, e_j)\text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)$. Andererseits ist $\mathfrak{o}(V) \cong \Lambda^2 V$ mittels $A \mapsto \sum_{i < j} q(Ae_i, e_j)e_i \wedge e_j$. Nutzt man diese Identifizierung ist allerdings $c(A) = \sum_{i < j} q(Ae_i, e_j)\text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)$ - unterscheidet sich also von $\tau^{-1}(A)$ durch einen Faktor 2. Das zeigt erst einmal nur, dass die ganzen Identifikationen nicht kompatibel sind.

(ii) $C^2(V) := c(\Lambda^2 V) \subseteq C(V)$ ist unter der Lieklammer von $C(V)$ ebenfalls abgeschlossen, vgl. Übungsaufgabe 51.

(iii) Wir betrachten die Exponentialabbildung auf $C^2(V) = c(\Lambda^2 V) \subseteq C(V)$ und $\Lambda^2 V$, d.h. für $\alpha \in \Lambda^2(V)$ ist $\exp \alpha := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \wedge^k \alpha$ mit $\wedge^k \alpha = \underbrace{\alpha \wedge \dots \wedge \alpha}_{k\text{-mal}}$ (und analog \exp_V für $c(\Lambda^2 V)$ mit Cliffordmultiplikation statt \wedge , vgl. Übungsaufgabe 51). (Für alle $i > k/2$ ist das Produkt $\wedge^i \alpha$ sogar gleich Null,

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

und $\exp_\Lambda \alpha \in \Lambda V$ hat nur endlich viele Summanden.) Da \mathfrak{c} kein Algebrenisomorphismus ist, ist $\exp_C \circ \mathfrak{c} \neq \exp_\Lambda$. Z.B. gilt

$$\begin{aligned} \exp_C(e_1 \cdot e_2) &= 1 + e_1 e_2 + \frac{1}{2} \underbrace{(e_1 e_2)^2}_{=-1} - \frac{1}{3!} e_1 e_2 + \dots \\ &= \underbrace{\sum_i (-1)^i \frac{1}{(2i)!}}_{=\cos 1} + \underbrace{\sum_i (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!}}_{=\sin 1} e_1 e_2 \\ \exp_\Lambda(e_1 \wedge e_2) &= 1 + e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

(iv) Wir definieren $\text{Spin}(V) := \exp_C(C^2(V))$ - die Spingruppe von (V, q) . Ist v_i eine Orthonormalbasis von (V, q) , dann gilt auch $\text{Spin}(V) = \text{span}\{v_{i_1} \dots v_{i_{2k}} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(v) Mit $\tau(a)v = [a, v]$ kann man nachrechnen, dass

$$\underbrace{(\exp \tau(a))}_{\in SO(V)} v = (\exp_C a) v (\exp_C a)^{-1}$$

und wir haben eine Abbildung $\hat{\tau}: \text{Spin}(V) \rightarrow SO(V)$, $a \mapsto (v \mapsto av a^T)$. Für $\dim V > 1$ ist $\hat{\tau}$ eine zweifache nichttriviale Überlagerung. Damit ist $\text{Spin}(V)$ für q positiv definit kompakt und zusammenhängend (da dann $SO(V)$ kompakt und zusammenhängend ist). Für $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 3$ ist $\text{Spin}(V)$ einfach zusammenhängend und damit die universelle Überlagerung von $SO(V)$.

(vi) Die Einschränkung der Cliffordmultiplikation auf $\text{Spin}(V)$ ist eine Darstellung von $\text{Spin}(V)$. Wir brauchen im Folgenden nur noch $\rho := \text{cl}: \text{Spin}(k) := \text{Spin}(\mathbb{R}^k, g_{\text{eucl}}) \rightarrow \text{Cl}(k)$ mit der Darstellung von $\text{Cl}(k)$ wie in Beispiel II.3.38.

Beispiel II.3.43. (i) $\text{Spin}(2) \cong S^1 \cong U(1)$ mit $\hat{\tau}: S^1 \cong \text{Spin}(2) \rightarrow S^1 \cong SO(2)$, $z \mapsto z^2$

(ii) $\text{Spin}(3) \cong SU(2)$, vgl. Beispiel I.3.23.

(iii) $\text{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$

Beispiel II.3.44. (Der klassische Diracoperator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten) Sei (M^m, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $SO(M)$ das zugehörige $SO(m)$ -Hauptfaserbündel der orientierten Orthonormalbasen. Nehmen wir an M sei spin, d.h. es gibt einen Lift $\Phi: \text{Spin}(M) \rightarrow SO(M)$ von $SO(M)$ bzgl. der zweifachen Überlagerung, vgl. Abschnitt I.3.4. Nun bilden wir aus dem $\text{Spin}(m)$ -Hauptfaserbündel $\text{Spin}(M)$ und der Darstellung $\rho: \text{Spin}(m) \rightarrow \Sigma_m$ vom oben das assoziierte Vektorbündel $S := \text{Spin}(M) \times_{\rho} \Sigma_m$. Dieses wird *Spinorbündel* genannt. Der Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induziert einen Zusammenhang $T_p SO(M) = Q_p SO(M) \oplus T_p (SO(M))_{\pi(p)}$ auf $SO(M)$ wie in Abschnitt I.3.5.1 und damit mittels $Q_r \text{Spin}(M) = (d_r \Phi)^{-1} Q_{\Phi(r)} SO(M)$ einen Zusammenhang auf $\text{Spin}(M)$. Wie in Übungsaufgabe 35/Bemerkung I.3.37 erhält man dann einen induzierten Zusammenhang auf dem assoziierten Bündel - dem Spinorbündel. Rechnet man das alles in lokalen Koordinaten aus, erhält man: Sei e_i ein lokalen Orthonormalrahmen auf $U \subseteq M$ (also (e_1, \dots, e_m) ist ein lokaler Schnitt von $SO(M)$) und sei q ein lokaler Schnitt von $\text{Spin}(M)$ mit $\Phi(q) = (e_1, \dots, e_m)$. Sei $\varphi \in \Gamma(S)$. Dann gibt es eine glatte Abbildung $\sigma: U \rightarrow \Sigma_m$ mit $\varphi|_U = [q, \sigma]$. Dann gilt

$$\nabla_X^S [q, \sigma] = [q, X(\sigma) + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} g(X, e_i) \Gamma_{ij}^k \text{cl}(e_j) \text{cl}(e_k) \sigma].$$

Man kann nachrechnen, dass S mit diesem Zusammenhang der Cliffordmultiplikation, die wie eben nur auf τ wirkt, und der induzierten Bündelmetrik ein Diracbündel wie in Definition II.3.34 und damit ist $D = \text{cl}(e_i) \nabla_{e_i}^S$ ein Dirac-artiger Operator - der *klassische Diracoperator eine Riemannschen spin Mannigfaltigkeit*.

II.3.5. Bochner Theoreme

In Satz II.3.23 haben wir gesehen, dass sich jeder Laplace-artige Operator $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ als Δ^E für einen geeigneten Zusammenhang ∇^E plus einen 0. te Ordnungsoperator schreiben lässt. Im Falle des Hodge-Laplace haben wir in Beispiel II.3.24 und Übungsaufgabe 46 gesehen, dass für Einsformen Q sich aus der Riccikrümmung der Mannigfaltigkeit bestimmt.

Wir wollen im Folgenden ähnliches für Diracoperatoren eines Diracbündels finden.

Bemerkung II.3.45. Ein $K \in \Omega^2(M, \text{End}(E))$ definiert eine Abbildung $K: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ durch

$$(Ks)(p) := \sum_{i,j} \text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)K(e_i, e_j)s$$

für eine lokale Orthonormalbasis e_i von T_pM . Man überprüft, dass die Definition unabhängig vom gewählten Orthonormalbasis ist.

Lemma II.3.46. (Weitzenböck-Formel) Sei $E \rightarrow M$ ein Diracbündel mit zugehörigem Zusammenhang ∇^E . Dann gilt $D^2 = \Delta^E + R^E$ mit $R^E \in \Omega^2(M, \text{End}(E))$ die Krümmung von ∇^E .

Beweis. Seien x^i geodätische Normalkoordinaten um p und $e_i = \partial_{x^i}$. Dann ist e_i in p orthonormal und $\nabla_{e_i}e_j|_p = 0$.

Wir haben in p :

$$\begin{aligned} D^2s &= \text{cl}(e_i)\nabla_{e_i}^E(\text{cl}(e_j)\nabla_{e_j}^E s) = \text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)\nabla_{e_i}^E\nabla_{e_j}^E s \\ &= -\nabla_{e_i}^E\nabla_{e_i}^E s + \sum_{i < j} \text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)(\nabla_{e_i}^E\nabla_{e_j}^E - \nabla_{e_j}^E\nabla_{e_i}^E)s \\ &\stackrel{\text{Bsp. II.3.22}}{=} \Delta^E s + \sum_{i < j} \text{cl}(e_i)\text{cl}(e_j)R^E(e_i, e_j)s = (\Delta^E + R^E)s. \end{aligned}$$

□

Lemma II.3.47. Für den klassischen Diracoperator gilt

$$R^S(X, Y)s = -\frac{1}{4} \sum_k \text{cl}(R(X, Y)e_k)\text{cl}(e_k)s$$

für einen lokalen Orthonormalrahmen e_i und R der Krümmungstensor von (M, g) . Insbesondere ist $R^S s = \frac{1}{4} \text{scal}_g s$. Die Weitzenböckformel für den klassischen Diracoperator ist also

$$D^2 = \Delta^S + \frac{1}{4} \text{scal}_g$$

und wird Schrödinger-Lichnerowicz-Formel genannt.

Beweis. Kann man aus der lokalen Darstellung des Zusammenhangs, vgl. Beispiel II.3.44, berechnen. □

Folgerung II.3.48. Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche spin Mannigfaltigkeit mit positiver Skalar-krümmung. Dann hat der klassische Diracoperator keinen Kern.

Beweis. Sei $s \in \ker D$. Dann ist $0 = D^2s = \Delta s + \frac{1}{4} \text{scal}_g s$, also

$$0 = \int_M |\nabla s|^2 \text{dvol}_g + \int_M \frac{1}{4} \text{scal}_g |s|^2 \text{dvol}_g \geq 0$$

und es folgt $s = 0$. □

II.3.6. Etwas Funktionalkalkül

Vorl. 27 Sei $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ein elliptischer Operator der Ordnung ℓ auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit für den es eine Basis aus orthonormalen Eigenfunktionen mit endlich-dimensionalen Eigenräumen gibt (z.B. P ist streng elliptisch oder P ist der Diracoperator eines Diracbündels, vgl. Übungsaufgabe 52).

Sei $\sigma(P)$ die Menge der Eigenwerte von P . Ein $s \in L^2(E)$ hat dann eine Zerlegung $s = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} s_\lambda$ mit s_λ der Anteil von s im Eigenraum zu λ . Da die Zerlegung orthogonal ist, ist insbesondere $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} \leq \|s\|_{L^2(g)}$.

Satz II.3.49. *Ein Schnitt $s \in L^2(E)$ ist genau dann glatt, wenn $\|s_\lambda\|_{L^2(g)} = O(|\lambda|^{-k})$ für alle k gilt (Man sagt, die Zerlegung ist schnell abfallend.).*

Beweis. Sei s glatt, dann ist auch $P^r s$ glatt für alle $r \in \mathbb{N}$, also insbesondere L^2 . Aus $\|P^r s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} \lambda^r \|s_\lambda\|_{L^2}^2$ folgt direkt, dass die Zerlegung schnell abfallend ist.

Sei die Zerlegung nun schnell abfallend. Da s_λ eine Eigenfunktion von P ist, folgt mittels iterativer Anwendung der elliptischen Abschätzung: Wir haben $\|s_\lambda\|_{H^{k+\ell}} \leq C(\|P s_\lambda\|_{H^k} + \|s_\lambda\|_{L^2}) \leq C(1+|\lambda|)\|s_\lambda\|_{H^k}$. Mehrfaches Anwenden liefert $\|s_\lambda\|_{H^{k\ell}} \leq C(1+|\lambda|)^k \|s_\lambda\|_{L^2}$. Die Abfallbedingung zeigt, dass $s \in H^r$ für alle r ist. Mittels der Soboleveinbettung ist dann s glatt. \square

Sei nun f eine beschränkte Funktion auf $\sigma(P)$. Wir definieren $f(P)$ durch

$$f(P)s := \sum_{\lambda \in \sigma(P)} f(\lambda)s_\lambda,$$

wobei $s = \sum_{\lambda} s_\lambda$ die Zerlegung von s in Eigenfunktionen ist.

Satz II.3.50. *Die Abbildung $f \mapsto f(P)$ ist ein unitärer Ringhomomorphismus vom Ring der beschränkten Funktionen auf $\sigma(P)$ in die beschränkten Operatoren auf $L^2(E)$. Es gilt $\|f(P)\| := \sup_{v \in \Gamma(E), \|v\|_{L^2} = 1} \|Pv\|_{L^2} \leq \sup |f|$. Weiterhin bildet $f(P)$ glatte Schnitte von E auf glatte Schnitte ab.*

Beweis. Sei $s \in L^2(E)$, also $\|s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} \|s_\lambda\|_{L^2}^2 < \infty$. Dann ist $\|f(P)s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} |f(\lambda)|^2 \|s_\lambda\|_{L^2}^2 \leq \sup |f| \|s\|_{L^2}^2$. Damit ist $f(P)$ ein beschränkter Operator auf $L^2(E)$ mit $\|f(P)\| \leq \sup |f|$. Dass $f(P)$ glatte Schnitte auf glatte Schnitte abbildet, folgt aus Satz II.3.49 und f beschränkt. Der Rest ist klar. \square

Bemerkung II.3.51. Ist f selbst schnell abfallend, also $|f(\lambda)| \leq O(|\lambda|^{-k})$ für alle k , dann ist $f(D)(L^2(E)) \subseteq \Gamma(E)$. Insbesondere hat $f(D)$ einen glatten Kern*, d.h. es gibt ein $k \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$ mit

$$f(P)s(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy.$$

Das Integral wird immer noch mit dem Volumenelement $d\text{vol}_g$ ausgeführt, aber wir schreiben dy um zu zeigen, dass über y integriert wird und nicht x . Weiterhin ist $E \boxtimes E^* := \pi_1^* E \otimes \pi_2^* E^*$ mit $\pi_i: M \times M \rightarrow M$ die Projektion auf die i -te Komponente ein Vektorbündel über $M \times M$. Operatoren mit glattem Kern werden *Glättungsoperatoren* genannt.

* Sei $\mathcal{D}'(E)$ der Raum der Distributionen auf E , also allen linearen Funktionalen $T: \Gamma_c(E) \rightarrow \mathbb{K}$ für die für alle Kompakta $K \subseteq M$ es ein $C > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $|Ts| \leq C\|s\|_{C^k}$ gibt. Auf $\mathcal{D}'(E)$ wählen wir die schwache Topologie, d.h. $T_i \rightarrow T$, falls $T_i(s) \rightarrow T(s)$ für alle $s \in \Gamma_c(E)$ gilt.

Satz II.3.52. *Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit. Sei $A: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{D}'(E)$ ein stetiger Operator. Dann sind äquivalent:*

- (i) *A erweitert sich zu einem stetigen Operator $A: \mathcal{D}'(E) \rightarrow \Gamma(E)$.*
- (ii) *A erweitert sich zu einem stetigen Operator $A: H^s(E) \rightarrow H^t(E)$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$ (Hierbei ist $H^{-s}(E)$ für $s > 0$ dual zu $H^s(E)$.)*
- (iii) *A hat einen glatten Kern $K_A \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$.*

Der Satz gilt im Prinzip auch auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten, man muss nur auf den Support der Funktionen aufpassen.

II.4. Zur Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aussagen zur Wärmeleitungsgleichung treffen:

Im ganzen Abschnitt sei: Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und sei P ein Laplace-artiger Operator auf E mit $\sigma(P) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Satz II.4.1. Die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}s + Ps = 0$ mit Anfangswert $s(\cdot, 0) = s_0 \in \Gamma(E)$ hat eine eindeutige Lösung $s_t := s(\cdot, t)$ für alle $t \geq 0$. Weiterhin gilt $\|s_t\|_{L^2(g)} \leq \|s_0\|_{L^2(g)}$.

Beweis. Angenommen es gibt eine glatte Lösung s_t . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\|s_t\|_{L^2(g)}^2 = \int_M \left\langle \frac{\partial}{\partial t}s_t, s_t \right\rangle d\text{vol}_g + \int_M \left\langle s_t, \frac{\partial}{\partial t}s_t \right\rangle d\text{vol}_g = - \int_M \langle Ps_t, s_t \rangle d\text{vol}_g - \int_M \langle s_t, Ps_t \rangle d\text{vol}_g \stackrel{\sigma(P) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}}{\leq} 0$$

und damit $\|s_t\|_{L^2(g)} \leq \|s_0\|_{L^2(g)}$. Weiterhin ergibt sich so die Eindeutigkeit. Um die Existenz zu zeigen, setzen wir $s_t = e^{-tP}s_0$, wobei e^{-tP} mittels des Funktionalkalküls aus Abschnitt II.3.6 definiert ist. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial t}s_t = -Ps_t$. Also ist s_t eine Lösung. \square

Bemerkung II.4.2. Die letzte Aussage stimmt für alle P wie in Abschnitt II.3.6 mit $\sigma(P) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Vom Funktionalkalkül wissen wir sogar, dass e^{-tP} für alle $t > 0$ ein Glättungsoperator ist, also einen zeitabhängigen Schnitt $k_t \in \Gamma(E \otimes E^*)$ besitzt, den *Wärmeleitungskern*, so dass für alle $s \in \Gamma(E)$ und $t > 0$ gilt:

$$e^{-tP}s(x) = \int_M k_t(x, y)s(y)dy.$$

Satz II.4.3. Der Wärmeleitungskern hat die folgenden Eigenschaften:

(i)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) k_t(x, y) = 0,$$

wobei der Index x an P bedeutet, dass P auf die x -Variable, aber nicht die y -Variable wirkt. D.h für jedes y erfüllt $k_t(\cdot, y) \in \Gamma(E \otimes E_y^* \rightarrow M)$ die Wärmegleichung.

(ii) Für $s \in \Gamma(E)$ konvergiert

$$\int_M k_t(x, y)s(y)dy \rightarrow s(x)$$

für $t \rightarrow 0$ uniform in x .

Insbesondere ist der Wärmeleitungskern der eindeutige zeitabhängige Schnitt in $E \otimes E^*$, der C^2 in x und C^1 in t ist sowie die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

Beweis. Das (i) und (ii) gilt, folgt direkt aus den Eigenschaften von e^{-tP} von oben. Habe nun k_t die Eigenschaften (i) und (ii), dann betrachten wir die zugehörigen Operatoren $s_t(x) := (K_t s)(x) := \int_M k_t(x, y)s(y)dy$ für $t > 0$. Es ist $K_t : L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ ein beschränkter Operator, da k_t stetig ist. Es gilt $(\partial_t + P)s_t = 0$ für $t > 0$. Nach der Eindeutigkeit der Lösung, vgl. Satz II.4.1, muss $K_t s = e^{-(t-t_0)P}K_{t_0}s$ für alle $t > t_0 > 0$. Für $t_0 \rightarrow 0$ folgt aus (ii) $K_{t_0}s \rightarrow s$ uniform in x . Weiterhin gilt

$$\|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})s\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda} |e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}|^2 \|s_{\lambda}\|_{L^2}^2 \leq C_{t,t_0}^2 \|s\|_{L^2}^2,$$

wobei C_{t,t_0} das Maximum von $\lambda \mapsto e^{-(t-t_0)\lambda} - e^{-t\lambda}$ ist. Dieser wird bei $\lambda = -t_0^{-1} \ln(1 - t_0/t)$ angenommen und ist durch $C_{t,t_0} = (1 - t_0/t)^{t/t_0} ((1 - t_0/t)^{-1} - 1)$ gegeben und geht gegen Null für $t_0 \rightarrow 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|e^{-(t-t_0)P}K_{t_0}s - e^{-tP}s\|_{L^2} &\leq \|e^{-(t-t_0)P}K_{t_0}s - e^{-(t-t_0)P}s\|_{L^2} + \|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})s\|_{L^2} \\ &\leq \|K_{t_0}s - s\|_{L^2} + \|(e^{-(t-t_0)P} - e^{-tP})s\|_{L^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $t_0 \rightarrow 0$. Also ist $K_t s = e^{-tP}s$ für alle s . \square

Beispiel II.4.4. (Wärmeleitungskern für den Laplaceoperator auf Funktionen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n)

$$k_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}.$$

II.4.1. Asymptotik des Wärmeleitungskerns

Bedingung (ii) aus dem letzten Satz sagt, dass für t gegen Null, der Wärmeleitungskern zu einer δ -Distribution wird. Ziel dieses Abschnitts ist es eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns für $t \rightarrow 0$ zu finden. Was ist das?

Definition II.4.5. Sei $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$ eine Funktion mit Werten im Banachraum B (bei uns wird $f(t) = k_t$ und damit $B = C^r(E \boxtimes E^*)$ sein). Eine formale Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$ heißt *asymptotische Entwicklung* von f nahe $t = 0$, falls für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ es ein ℓ_n gibt, so dass für alle $\ell \geq \ell_n$

$$\|f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k(t)\|_B \leq C_{\ell,n} |t|^n$$

für geeignete Konstanten $C_{\ell,n}$ und genügend kleine t gilt.

Bemerkung II.4.6. Jede Taylorreihe ist eine asymptotische Entwicklung. Asymptotische Entwicklungen müssen also nicht konvergieren und wenn sie konvergieren, müssen sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.

Um eine Asymptotik des Wärmeleitungskerns zu erhalten, betrachtet man i.A. nicht den echten Wärmeleitungskern sondern einen *approximativen Wärmeleitungskern*:

Definition II.4.7. Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Ein *approximativer Wärmeleitungskern* der Ordnung m ist ein zeitabhängiger Schnitt $\tilde{k}_t(x, y)$ in $E \boxtimes E^*$, der C^1 in t und C^2 in x und y ist, Bedingung (ii) aus Satz II.4.3 erfüllt und für den es einen C^m -Schnitt $r_t(x, y)$ in $E \boxtimes E^*$, der

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x \right) \tilde{k}_t(x, y) = t^m r_t(x, y),$$

erfüllt und für $t \geq 0$ stetig in t ist.

Die Asymptotik von solchen approximativen Wärmeleitungskernen wird leichter zugänglich sein und wir werden sehen, dass approximative Wärmeleitungskerne in folgendem Sinne die gleiche Asymptotik wie der echte Wärmeleitungskern besitzen:

Satz II.4.8. Sei k_t der echte Wärmeleitungskern. Dann gibt es für jedes m ein $m' \geq m$, so dass für jeden approximativen Wärmeleitungskern \tilde{k}_t der Ordnung m'

$$k_t(x, y) - \tilde{k}_t(x, y) = t^m \tilde{r}_t(x, y)$$

für einen geeigneten zeitstetigen ($t \geq 0$) C^m -Schnitt \tilde{r}_t von $E \boxtimes E^*$ gilt.

Vorl. 28 Direkt von der Definition einer asymptotischen Entwicklung folgt:

Folgerung II.4.9. Eine formale Reihe $\sum_k t^k a_k$ in $C^r(E \boxtimes E^*)$, für die $\tilde{k}_t := \sum_k^{m-1} t^k a_k$ ist ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung m , dann ist $\sum_k t^k a_k$ eine asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns.

Um Satz II.4.8 zu zeigen, benötigen wir zunächst das *Duhamelsche Prinzip*:

Lemma II.4.10. Sei s_t eine in t stetige Familie von C^2 -Schnitten von E . Dann ist $\tilde{s}_t = \int_0^t e^{-(t-u)P} s_u du$ die eindeutige Familie von glatten Schnitten von E , die in t differenzierbar ist, für die $\tilde{s}_0 = 0$ gilt und die die inhomogene Wärmegleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P \right) \tilde{s}_t = s_t$$

erfüllt. Insbesondere gilt $\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t C_k \sup\{\|s_u\|_{H^{2k}} \mid 0 \leq u \leq t\}$ für alle k .

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Dass \tilde{s}_t glatt ist, folgt, da $e^{-(t-u)P}$ ein Glättungsoperator ist. Der Rest folgt mit

$$\frac{\partial \tilde{s}_t}{\partial t} = s_t + \int_0^t -P e^{-(t-u)P} s_u du = s_t - P \tilde{s}_t.$$

Für die Abschätzung der Sobolevnorm benutzt man, dass P mit e^{-tP} kommutiert und $e^{-tP}: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ beschränkt ist. Damit gilt $\|e^{-tP} s\|_{H^{2k}} \leq C(\|P^k(e^{-tP} s)\|_{L^2} + \|e^{-tP} s\|_{L^2}) \leq C(\|P^k s\|_{L^2} + \|s\|_{L^2}) \leq \|s\|_{H^{2k}}$ und e^{-tP} ist auch als Operator von $H^{2k} \rightarrow H^{2k}$ für alle k beschränkt. Wir haben also

$$\|\tilde{s}_t\|_{H^{2k}} \leq t \sup_{0 \leq u \leq t} \|e^{-(t-u)P} s\|_{H^{2k}} \leq t C_k \sup_{0 \leq u \leq t} \|s\|_{H^{2k}}.$$

□

Beweis von Satz II.4.8. Sei $m > 0$ und sei \tilde{k}_t ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung $m' > m + \dim M$. Nach Definition gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x\right) \tilde{k}_t(x, y) = t^{m'} r_t(x, y)$$

für einen $C^{m'}$ -Schnitt r_t in $E \boxtimes E^*$. Nach dem Duhamelschen Prinzip gibt es eine eindeutige Lösung $s_t(x, y)$ (y hier als Parameter behandelt) von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + P_x\right) s_t(x, y) = -t^{m'} r_t(x, y)$$

mit $s_0 = 0$ und

$$\|s_t\|_{H^{m'}} \leq C_{m'} t^{m'+1} \sup\{\|r_u\|_{m'} \mid 0 \leq u \leq t\} \leq C_{m'} t^{m'+1}.$$

Aus der Soboleveinbettung folgt, dass s_t in C^m ist. Wegen Eindeutigkeit der Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung folgt $\tilde{k}_t(x, y) + s_t(x, y) = k_t(x, y)$ und damit die Behauptung. □

Als nächstes bauen wir uns einen approximativen Wärmeleitungskern. Während der Wärmeleitungskern ein globales Objekt ist, werden lokale Daten der Mannigfaltigkeit reichen, um einen approximativen Wärmeleitungskern zu konstruieren.

Sei (M^m, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d . Wir setzen (in Anlehnung an den Wärmeleitungskern vom Laplace im Euklidischen)

$$h_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp(-d(x, y)^2/4t).$$

und betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um y mit $r^2 = g_{ij} x^i x^j$. Direktes Nachrechnen ergibt:

Lemma II.4.11. Sei $h(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp(-r^2/4t)$ mit $r = d(x, y)$. Dann gilt

$$(i) \quad \text{grad} h = -\frac{h}{2t} r \partial_r$$

$$(ii) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \Delta h = \frac{r h}{4gt} \frac{\partial g}{\partial t} \text{ wobei } g = \det g_{ij} \text{ ist.}$$

Satz II.4.12. Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Sei P ein Laplace-artiger Operator auf E und k_t der zugehörige Wärmeleitungskern.

(i) Die asymptotische Entwicklung von k_t ist von der Form

$$h_t(x, y) (\Theta_0(x, y) + t\Theta_1(x, y) + t^2\Theta_2(x, y) + \dots)$$

für glatte Schnitte Θ_j von $E \boxtimes E^*$.

(ii) Diese Entwicklung gilt im Banachraum $C^r(E \boxtimes E^*)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und kann formal differenziert werden um die asymptotische Entwicklung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen des Wärmeleitungskerns zu erhalten.

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

(iii) Für $P = \Delta^E + Q$ mit $Q = R^E$ oder $Q = 0$ sind die $\Theta_j(x, x)$ algebraische Ausdrücke in der Metrik und den Zusammenhangskoeffizienten von ∇^E und deren Ableitungen.

Beweisskizze. (i) Weiß man, dass

$$\tilde{k}_t^n(x, y) := h_t(x, y) (\Theta_t(x, y) := \Theta_0(x, y) + t\Theta_1(x, y) + t^2\Theta_2(x, y) + \dots + t^{n-1}\Theta_{n-1}(x, y))$$

ein approximativer Wärmeleitungskern der Ordnung n ist, dann folgt aus Folgerung II.4.9, dass es sich hier um eine asymptotische Entwicklung handelt. Die Frage ist also, ob man glatte Schnitte Θ_j so finden kann, dass $h_t(x, y) \sum_{j=0}^k t^j \Theta_j(x, y)$ ein solcher approximativer Wärmeleitungskern ist für alle k groß genug. Um für $t \rightarrow 0$ die Delta-Distribution zu erhalten, also Bedingung (ii) aus Satz II.4.3 zu erfüllen, reicht es wenn $\Theta_j(x, y)$ nahe der Diagonalen glatt sind und $\Theta_0(x, x) = 1$ ist.

Um approximativ die Wärmeleichung zu lösen, schauen wir uns das Problem zunächst nur in der Umgebung eines festen $y \in M$ an: $s(x) := \Theta_t(x, y)$ in geodätischen Normalkoordinaten um y und $h(x) = h_t(x, y)$ wie im letzten Lemma. Einen Schnitt in E betrachten wir als Schnitt in $E \otimes E_y^*$. Dann ist

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = h^{-1}(\partial_t h)s + \partial_t s + Ps + h^{-1}[P, h]s = h^{-1}(\partial_t h)s + \partial_t s + Ps + h^{-1}[\Delta^E, h]s.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $P = \Delta^E + Q$ und Q nullter Ordnung ist (und damit mit Multiplikation mit h kommutiert). Weiterhin ist $[\Delta^E, h]s = (\Delta h)s - 2\nabla_{\nabla h}^E s = -\frac{\partial h}{\partial t}s + \frac{rh}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{h}{t} \nabla_{r\partial_r}^E s$ und damit

$$\frac{1}{h} (\partial_t + P)(hs) = \partial_t s + Ps + \frac{r}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r} s + \frac{1}{t} \nabla_{r\partial_r}^E s. \quad (\text{II.5})$$

Wir eine asymptotische Entwicklung $s \sim u_0 + tu_1 + t^2u_2 + \dots$ an und wollen $(\partial_t + P)(hs) = 0$ (Dann wäre bei endlichem Abbruch der Entwicklung bei t^{n-1} dies eine Lösung zur Inhomogenität $\sim t^n$). Setzen wir die Entwicklung ein und vergleichen Potenzen in t , erhalten wir

$$\nabla_{r\partial_r}^E u_j + \left(j + \frac{r}{4g} \frac{\partial g}{\partial r} \right) u_j = -Pu_{j-1}.$$

Wenn man u_{j-1} kennt, ist das nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung für u_j die man auch als $\partial_{r\partial_r}(r^j g^{\frac{1}{4}} u_j) = -r^{j-1} g^{\frac{1}{4}} Pu_{j-1}$ (mit $u_{-1} = 0$) umschreiben kann. Man kann das induktiv lösen und die Lösung ist jeweils bis auf ein Vielfaches von $r^{-j} g^{-\frac{1}{4}}$ eindeutig lösbar. Da die Lösung glatt sein soll, also auch insbesondere glatt in $r = 0$, muss dieses Vielfaches für verschwinden und $u_0(r = 0) = 1$ sein. Das ergibt die Eindeutigkeit der u_j .

Sei ϵ der Injektivitätsradius von M und sei $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion mit $\psi(r \leq \epsilon/2) = 1$ und $\psi(r \geq \epsilon) = 0$. Wir definieren $\theta_j(x, y)$ als die $E \boxtimes E^*$ -wertige Funktion für alle $d(x, y) < \epsilon$, die in geodätischen Normalkoordinaten nahe y durch $u_j(x)$ gegeben ist, und setzen $\Theta_j(x, y) = \psi(d(x, y)^2) \theta_j(x, y)$. Wegen glatter Abhängigkeit der Lösungen der Differentialgleichungen an den Anfangswerten, ist $\Theta_j \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$. Dann ist $\Theta_0(y, y) = \text{Id}$ und $h_t(x, y) \sum_{j=0}^k t^j \Theta_j(x, y)$ konvergiert zu einer δ -Distribution für $t \rightarrow 0$. Für $d(x, y) > \epsilon/2$ ist $\tilde{k}_t^n(x, y)$ glatt und kann $|(\partial_t + P_x)\tilde{k}_t^n(x, y)|$ durch $\sum_i t^i C_i$ abgeschätzt werden. Damit ist $\tilde{k}_t^n(x, y)$ ein approximativer Wärmeleitungskern. \square

Beispiel II.4.13. Wir haben gesehen, dass $u_0(r = 0) = 1$. Man kann die Rekursionsformeln nutzen, um alle $\Theta_j(y, y) = u_j(r = 0)$ zu berechnen. Es wird nur aufwändiger je höher j wird. Wir berechnen hier noch $\Theta_1(y, y)$ - mit (II.5) folgt:

$$u_1(r = 0) = -(Pu_0)(0) = ((\Delta^E + Q)u_0)(0) = (\Delta^E u_0)(0) + Q1.$$

Für $P = D^2$, D der Diracoperator zu einem Diracbündel $E \rightarrow M$, ist nach der Weitzenböck-Formel, vgl. Lemma II.3.46, $Q = R^E$. Aus der Darstellung der Metrik in geodätischen Normalkoordinaten [3, Satz II.8.8] kann man $(\Delta^E u_0)(0) = (\sum_i \partial_i^2 g^{-1/4})(0)$ und damit $u_1(0) = \frac{1}{6} \text{scal} + R^E$ berechnen.

II.4.2. Spektrale Invarianten und Weylsches Gesetz

Mit Hilfe der asymptotische Expansion des Wärmeleitungskerns kann man Aussagen zum Wachstum der Eigenwerte und damit zu geometrischen Größen der unterliegenden Mannigfaltigkeit machen. Dazu brauchen wir die Spur von Operatoren:

Für eine Matrix A auf \mathbb{R}^n ist die Spur einfach $\text{Tr } A = \sum_i \langle Ae_i, e_i \rangle$ für eine Orthonormalbasis e_i . Für einen Operator $A: H \rightarrow H$ (H ein Hilbertraum - bei uns $H = L^2(E)$) wollen wir die Spur analog definieren: e_i sei eine Orthonormalbasis von H und $\text{Tr } A = \sum_i \langle Ae_i, e_i \rangle_H$. Da es sich nun um eine unendliche Summe handeln, muss diese nur für speziellere A konvergieren. Solche beschränkten Operatoren für welche Tr existiert, nennt man Spurklasseoperatoren. Wir werden hier nur zeigen, dass Glättungsoperatoren dazu gehören:

Lemma II.4.14. *Sei $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ ein beschränkter Operator mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren e_i zu Eigenwerten λ_i . A haben einen Kern k , der ein stetiger Schnitt in $E \otimes E^*$ ist - also $(As)(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy$. Dann ist $k(x, y) = \sum_j \lambda_j e_j(x) \otimes e_j(y)^*$ und $\text{Tr}A = \int_M k(x, x)dx = \sum_i \lambda_i$*

Beweis. Folgt direkt aus $(Be_k)(x) = \int_M \sum_j (e_j(x) \otimes e_j(y)^*)e_k(y)dy = \sum_j e_j(x) \int_M \langle e_j(y), e_k(y) \rangle dy = \lambda_k e_k(x)$ und der Eindeutigkeit des Kerns. \square

Für $t > 0$ ist e^{-tP} ein Glättungsoperator und passt in das letzte Lemma und wir haben

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta}) = \sum_i e^{-t\lambda_i} \sim (4\pi t)^{-m/2} (a_0 + ta_1 + \dots) \tag{II.6}$$

mit $a_j = \int_M \Theta_j(x, x)dx$. Mit Beispiel II.4.13 haben wir somit

Satz II.4.15. * *Das Spektrum des Laplaceoperators Δ auf Funktionen einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit bestimmt deren Dimensionen, Volumen und totale Skalarkrümmung $\int_M \text{scal}_g \text{dvol}_g$. In Dimension zwei bestimmt es damit außerdem die Topologie von M .*

Satz II.4.16. (Weylsches Gesetz) *Sei (M^m, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten den Laplace auf Funktionen. Sei $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq \lambda$ (mit Vielfachheiten gezählt). Dann gilt*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(4\pi)^{m/2} \Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) \lambda^{m/2}$$

für $\lambda \rightarrow \infty$.[†] (bzw. äquivalent zur obigen Aussage: Sind $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ die durchnummerierten Eigenwerte mit Vielfachheiten, dann gilt

$$\lambda_j \sim 4\pi \left(\frac{1}{\Gamma((m/2) + 1)} \text{vol}(M) j \right)^{2/m} .)$$

Beweis. Die Asymptotik (II.6) impliziert $t^a \sum_j e^{-t\lambda_j} \rightarrow A$ für $t \rightarrow 0$ mit $a = m/2$ und $A = (4\pi)^{-m/2} \text{vol}(M)$. Sei f eine stetige Funktion auf $[0, 1]$. Wir definieren $\varphi_f(t) = \sum_j f(e^{-t\lambda_j})e^{-t\lambda_j}$ und zeigen, dass $t^a \varphi_f(t) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^\infty f(e^{-r})r^{a-1}e^{-r}dr$ gilt: Wegen der Linearität in f reicht es nach Stone-Weierstrass dies für $f(x) = x^n$ zu überprüfen. Dann ist $t^a \varphi_f(t) = t^a \sum_j e^{-(n+1)t\lambda_j}$, was für $t \rightarrow 0$ gegen $A(n+1)^{-a}$ konvergiert. Das rechnet man auch für die rechte Seite nach: $\frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^\infty r^{a-1}e^{-(n+1)r}dr = \frac{A}{\Gamma(a)}(n+1)^{-a} \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt = A(n+1)^{-a}$. Für $r < 1$ sei $f_r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f|_{[0, r/e]} = 0$, $f(x \in [1/e, 1]) = 1/x$ und linear auf $[r/e, 1/e]$. Dann ist

$$\varphi_{f_r} \left(\frac{1}{r\lambda} \right) \leq \sum_{j; e^{-1/r\lambda_j/\lambda} \geq re^{-1}} 1 = \sum_{j; (1-\ln r)r\lambda \geq \lambda_j} 1 \leq N((1-\ln r)r\lambda)$$

*Can you hear the shape of a drum? https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_the_shape_of_a_drum

† Γ ist die Gammafunktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$, vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion>. Es gilt

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt = [-t^s e^{-t}]_0^\infty + s \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = s\Gamma(s).$$

II. Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

und somit

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (r\lambda)^{-a} N((1 - \ln r)r\lambda) \geq \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{a-1} e^{-t} dt \geq \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{A}{a\Gamma(a)}$$

Weiterhin ist

$$\varphi_{f_r} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \geq \sum_{j; e^{-\lambda_j/\lambda} \geq e^{-1}} 1 = \sum_{j; \lambda_j < \lambda} 1 \geq N(\lambda)$$

und somit

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-a} N(\lambda) \leq \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^\infty f_r(e^{-t}) t^{a-1} e^{-t} dt \leq \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^{1-\ln r} t^{a-1} dt = \frac{A}{a\Gamma(a)} (1 - \ln r)^a$$

Für $r \rightarrow 1$ erhalten wir $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-a} N(\lambda) = \frac{A}{a\Gamma(a)} = \frac{A}{\Gamma(a+1)}$. □

A. Liegruppen und Wirkungen

A.1. Liegruppen

Definition A.1.1. Eine Gruppe G heißt *Liegruppe*, falls G eine glatte Mannigfaltigkeit ist, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatt sind.

Beispiel A.1.2. Beispiele für Liegruppen.

- (i) $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$
- (ii) \mathbb{R}^n mit der Addition als Gruppenoperation
- (iii) $O(n)$ [3, Beispiel I.1.6.v], $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$
- (iv) Sind G und H Liegruppen, dann auch $G \times H$, wobei die Gruppenstruktur durch $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2)$ gegeben ist.
- (v) Es gibt auch Liegruppen die keine Matrixgruppen sind, z.B. die metaplektische Gruppe*. Da konkret bei uns werden nur Matrixgruppen auftreten, reicht es bei einer Liegruppe immer an eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{R})$ zu denken.

Lemma A.1.3. Sei G eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, so dass $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ glatt ist. Dann ist G eine Liegruppe.

Definition A.1.4. Ein glatte Abbildung zwischen Liegruppen, die gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist, nennen wir einen *Liegruppenhomomorphismus*. Ist ein bijektive Abbildung und sein Inverses jeweils ein Liegruppenhomomorphismus, dann nennen wir diesen *Liegruppenisomorphismus*.

Lemma A.1.5. Die Tangentialabbildung eines Liegruppenhomomorphismus hat konstanten Rang.

Beweis. Übungsaufgabe 8. □

A.1.1. Tangentialräume von Liegruppen und Liealgebren

Sei G eine Liegruppe. Für $h \in G$ sei $R_h: G \rightarrow G$, $g \mapsto gh$ bzw. $L_h: G \rightarrow G$, $g \mapsto hg$. Dann ist $d_g R_h: T_g G \rightarrow T_{gh} G$ bzw. $d_g L_h: T_g G \rightarrow T_{hg} G$ ein Vektorraumisomorphismus. Wir beschränken uns im Folgenden zumeist auf die Linkswirkungen L_h .

Lemma A.1.6. Sei $v \in T_1 G$. Dann definiert $X_v(h) = d_1 L_h(v)$ ein glattes Vektorfeld auf G .

Beweis. Übungsaufgabe 12 □

Definition A.1.7. Ein glattes Vektorfeld X auf G heißt *linksinvariant* falls $(L_h)_* X = X$, also $((L_h)_* X)(g) = (d_g L_h)(X(g)) = X(hg)$ für alle $g \in G$. Die Menge \mathfrak{g} aller linksinvarianten Vektorfelder auf G nennen wir *Lie-Algebra der Liegruppe G* .

*https://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic_group

Bemerkung A.1.8. Die linksinvarianten Vektorfelder auf G sind genau die Vektorfelder, die wie in Lemma A.1.6 entstehen, vgl. Übungsaufgabe 12.

\mathfrak{g} ist ein Vektorraum und wegen Tabelle I.2 ist \mathfrak{g} unter der Lieklammer abgeschlossen, vgl. auch Übungsaufgabe 21.ii.

Folgerung A.1.9. Die Liealgebra \mathfrak{g} einer Liegruppe G ist als Vektorraum isomorph zum Tangentialraum T_1G ans Einselement. Insbesondere gilt $\dim \mathfrak{g} = \dim T_1G = \dim G$.

Wir werden oft diesen Isomorphismus $T_1G \cong \mathfrak{g}$ implizit nutzen ohne es dazu zuschreiben.

Da $(L_h)_*[X, Y] = [(L_h)_*X, (L_h)_*Y]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, vgl. Pushforward in Tabelle I.2 und Übungsaufgabe 21, gilt, ist die Liealgebra unter der Lieklammer abgeschlossen.

Beispiel A.1.10. (i) Ist $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, dann ist $T_{\text{Id}_n}G = \text{Matr}(n, \mathbb{R}) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Für $A \in \text{Matr}(n, \mathbb{R})$ ist $X_A(h \in G) = d_{\text{Id}_n}L_h(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_h(\text{Id}_n + tA) - L_h(\text{Id}_n)}{t} = hA$ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld. Auch für alle Matrixgruppen $G \subseteq \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ ist somit das linksinvariante Vektorfeld zu $A \in T_{\text{Id}_n}G \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gleich X_A . Damit ist auch insbesondere $[X, Y] = XY - YX$ (als Matrixmultiplikation) für $X, Y \in \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$: Wie rechnen das in lokalen Koordinaten nach: Es ist $[X_A, X_B] = (X_A^i \frac{\partial X_B^j}{\partial x^i} - X_B^i \frac{\partial X_A^j}{\partial x^i}) \partial_{x^j}$. Wir wählen als Koordinaten die einzelnen Einträge h_i^j der Matrix und haben damit $X_A = h_i^k A_k^j \partial_{h_i^j}$ sowie

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= (h_i^k A_k^j \frac{\partial (h_r^s B_s^u)}{\partial h_i^j} - h_i^k B_k^j \frac{\partial (h_r^s A_s^u)}{\partial h_i^j}) \partial_{h_r^u} = (h_i^k A_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} B_s^u - h_i^k B_k^j \delta_{ri} \delta^{sj} A_s^u) \partial_{h_r^u} \\ &= h_r^k (A_k^s B_s^u - B_k^s A_s^u) \partial_{h_r^u} = h(AB - BA) = X_{AB-BA} \end{aligned}$$

Ist \mathfrak{g} abelsch, ist damit insbesondere die Lieklammer die Nullabbildung.

(ii) Man kann weiterhin nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{Sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr} A = 0\} \\ \mathfrak{o}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{O}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\} \\ \mathfrak{so}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{SO}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^T, \text{Tr} A = 0\} = T_{\text{Id}_n} \text{O}(n) = \mathfrak{o}(n) \\ \mathfrak{u}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{U}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -\bar{A}^T\} \\ \mathfrak{su}(n) &:= T_{\text{Id}_n} \text{SU}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -\bar{A}^T, \text{Tr} A = 0\} \end{aligned}$$

Definition A.1.11. Sei $X \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$

$$\dot{\gamma}_X(t) = X(\gamma_X(t)), \quad \gamma_X(0) = 1. \tag{A.1}$$

Da X einem beschränkten Vektorfeld auf G entspricht, hat diese eine eindeutige Lösung γ_X mit Definitionsbereich \mathbb{R} , vgl. Übungsaufgabe 15. Wir definieren die *Exponentialabbildung* von G als

$$\exp: \mathfrak{g} \mapsto G, \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

Bemerkung A.1.12. (i) Es gilt $\frac{d}{dt} \gamma_X(st) = s \dot{\gamma}_X(st) = sX(\gamma_X(st))$ und wegen Eindeutigkeit der Lösung damit $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$.

(ii) Ist $G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Untergruppe für ein n groß genug, dann ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Dann liest sich (A.1) für $A \in \mathfrak{g}$: $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ und damit ist $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, vgl. Übungsaufgabe 12.

Lemma A.1.13. Es gibt eine offene Umgebung U von $0 \in \mathfrak{g}$, so dass $\exp|_U$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist.

A.1.2. Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren

Definition A.1.14. Seien G und H Liegruppen und $\varphi: H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und eine Einbettung. Dann nennen wir H eine *Lie-Untergruppe* von G . Die zugehörige Liealgebra \mathfrak{h} nennen wir dann eine *Lieunteralgebra* von \mathfrak{g} .

Satz A.1.15. [1, Satz 1.2.2] Die Lieunteralgebren von \mathfrak{g} stehen in 1:1 Beziehung zu den Untervektorräumen von \mathfrak{g} , die unter der Lieklammer abgeschlossen sind.

Beweisskizze. Es ist zu zeigen, dass ein k -dimensionaler Untervektorraum $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, der unter der Lieklammer abgeschlossen ist, eine Liealgebra einer Liegruppe ist: Dazu verwendet man den Satz von Frobenius [1, Anh. A.4]. \square

Satz A.1.16. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G . Dann ist H eine Lie-Untergruppe von G mit Liealgebra $\mathfrak{h} := \{X \mid \exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$, wobei \exp die Exponentialabbildung von G ist. Insbesondere ist die Exponentialabbildung von H die Einschränkung von \exp auf \mathfrak{h} .

Folgerung A.1.17. Für eine Matrixuntergruppe ist die Exponentialabbildung \exp damit genau die von $Gl(n, \mathbb{R})$ eingeschränkt auf die Liealgebra der Untergruppe.

A.1.3. Zwei wichtige Darstellungen

Lemma A.1.18. Sei $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ ein Liegruppenhomomorphismus. Sei $\psi_*: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, $X \mapsto \psi_*X$, wobei ψ_*X das linksinvariante Vektorfeld mit $\psi_*X(1 \in G_2) = d_1\psi(X(1))$ ist - also $(\psi_*X)(g) = d_1L_g(d_1\psi(X(1)))$.*

(i) Dann ist ψ_* ein Liealgebren-Homomorphismus, d.h. es ist eine lineare Abbildung, die mit der Lieklammer kommutiert, also $\psi_*[X, Y] = [\psi_*X, \psi_*Y]$ gilt.

(ii) Dann ist

$$\psi(\exp X) = \exp \psi_*X$$

für alle $X \in \mathfrak{g}_1$.

Für den Beweis von (i) siehe Übungsaufgabe 36.

Für $a \in G$ betrachten wir

$$h_a: g \in G \mapsto h_a(g) := aga^{-1} \in G.$$

Das ist ein Liegruppenisomorphismus und es gilt $h_b \circ h_a = h_{ba}$ sowie $h_a = L_a \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} \circ L_a$. Nach letztem Lemma ist $(h_a)_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ linear und bijektiv - also $(h_a)_* \in Gl(\mathfrak{g})$. Insbesondere ist $(h_b)_* \circ (h_a)_* = (h_{ba})_*$.

Definition A.1.19.

$$\text{Ad}: a \in G \mapsto (h_a)_* \in Gl(\mathfrak{g})$$

heißt *adjungierte Darstellung* von G .

Wegen $\text{Ad}(a)\text{Ad}(b) = \text{Ad}(ab)$ ist Ad insbesondere eine Gruppendarstellung \dagger

Beispiel A.1.20. Nach Beispiel gilt $\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$ für $G \subseteq Gl(n, \mathbb{R})$.

Lemma A.1.21. Die Ableitung

$$ad := d_1 \text{Ad}: T_1G \cong \mathfrak{g} \rightarrow T_1 Gl(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

erfüllt $ad(X)(Y) = [X, Y]$ und heißt *adjungierte Darstellung der Liealgebra \mathfrak{g}* .

Beachten Sie: Da ψ i.A. kein Diffeomorphismus ist, ist ψ_ nicht gleich der Pushforward wie in Tabelle I.2 sondern stimmt a priori nur in der 1 überein.

\dagger Darstellung einer Gruppe = stetige Abbildung $\rho: G \rightarrow Gl(V)$ für einen Vektorraum V mit $\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$ für alle $a, b \in G$.

A. Liegruppen und Wirkungen

Beweisskizze. Man benutzt die geometrische Interpretation der Lieklammer, vgl. Übungsaufgabe 35. Für G ist der Fluss von $X \in \mathfrak{g}$ durch $\Phi_t(g) := \Phi(g, t) = g \exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = R_{\exp(tX)}g$ gegeben (denn es gilt $\Phi(g, 0) = g$ und $\dot{\Phi}(g, t) = d_1 L_g(X(\exp(tX))) = X(L_g \exp(tX)) = X(\Phi(g, t))$.) Also ist

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\Phi_{-t}(Y(\Phi_t(1))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)}(Y(\exp(tX))) \\ &\stackrel{\text{links.inv}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\exp(tX)} R_{\exp(-tX)} d_1 L_{\exp(tX)}(Y(1)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_1 \text{Ad}(\exp(tX))(Y) = \text{ad}(X)(Y). \end{aligned}$$

□

Da $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ auch einfach nur eine Matrixgruppe ist, ist die Lieklammer in Beispiel A.1.10 gegeben und wir haben mit der Jacobi-Identität, vgl. Tabelle I.2,

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z) &= \text{ad}(X)(\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y)(\text{ad}(X)(Z)) = \text{ad}(X)([Y, Z]) - \text{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] = [[X, Y], Z] = \text{ad}([X, Y])(Z). \end{aligned}$$

Also ist insbesondere ad eine Darstellung der Liealgebra \mathfrak{g} .*

A.1.4. Killingform

Definition A.1.22. Sei \mathfrak{g} eine Liealgebra (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Die Bilinearform

$$K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

heißt *Killingform* von \mathfrak{g} .

Satz A.1.23. (i) K ist *Ad*-invariant, d.h. $K(\text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y) = K(X, Y)$.

(ii) K ist genau dann nichtdegeneriert, wenn \mathfrak{g} halbeinfach[†]

(iii) Ist G kompakt und halbeinfach, dann ist K negativ definit.

Folgerung A.1.24. Ist G kompakt und halbeinfach, dann definiert

$$\gamma_a(X(a), Y(a)) := -K(X, Y) \text{ für } X, Y \in \mathfrak{g}$$

eine Riemannsche Metrik γ auf G . Für eine solche Metrik γ stimmt die Exponentialabbildung aus DiffGeo I mit der Exponentialabbildung für G als Liegruppe überein.

Beispiel A.1.25. (i) Ist G abelsch, ist $K = 0$.

(ii) Für $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist $K(X, Y) = 2n \text{Tr}(XY) - 2 \text{Tr}(X) \text{Tr}(Y)$.

(iii) Ist $G \subseteq \text{Gl}(n, \mathbb{K})$ einfach, dann ist $K(X, Y) = c \text{Tr}(XY)$ für geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

(iv)

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) & K(X, Y) = 2n \text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{o}(n) & K(X, Y) = (n-2) \text{Tr}(XY) \\ \mathfrak{su}(n) & K(X, Y) = 2n \text{Tr}(XY) \end{aligned}$$

*Darstellung einer Liealgebra = stetige Abbildung $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ für einen Vektorraum V mit $[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

[†] \mathfrak{g} heißt *einfach*, falls \mathfrak{g} nicht abelsch ist und außerdem \mathfrak{g} außer dem Nullraum und sich selbst keine weiteren Ideale enthält (Ideal $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g} =$ Unterliealgebra mit $[X, Y] \in \mathfrak{i}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in \mathfrak{i}$.)

\mathfrak{g} heißt *halbeinfach*, falls \mathfrak{g} direkte Summe einfacher Ideale ist. Das ist genau dann der Fall, wenn \mathfrak{g} keine nichttrivialen abelschen Ideale enthält.

G heißt (*halb*-)einfach, falls \mathfrak{g} (halb-)einfach ist. Beispiele: $\text{SU}(n)$ für $n \geq 2$, $\text{SO}(n)$ für $n \geq 2$, $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ für

A.2. Gruppenwirkungen

Definition A.2.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Eine glatte Abbildung $\Psi: G \times M \rightarrow M$ heißt *linke bzw. rechte G -Wirkung* von G auf M , falls

- (i) $\Psi(1, x) = x$ für alle $x \in M$ und
- (ii) $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(gh, x)$ für die Linkswirkung bzw. $\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(hg, x)$ für die Rechtswirkung für alle $g, h \in G, x \in M$

gilt. Das Tripel (M, G, Ψ) heißt *(linke bzw. rechte) G -Mannigfaltigkeit*. Für $g \in G$, sei $\Psi_g: M \rightarrow M, x \mapsto \Psi(g, x)$, die induzierte Abbildung auf M . Wir schreiben auch auf kurz $\Psi(g, x) = g \cdot x$ bei einer Linkswirkung und $\Psi(g, x) = x \cdot g$ bei einer Rechtswirkung.

Bemerkung A.2.2. (i) Sei $\iota: (g, x) \in G \times M \mapsto (g^{-1}, x) \in G \times M$. Ist Ψ eine Linkswirkung, dann ist $\Psi \circ \iota$ eine Rechtswirkung.

- (ii) Bei abelschen Gruppen gibt es keinen Unterschied zwischen Links- und Rechtswirkungen.
- (iii) Es ist $\Psi_g \circ \Psi_{g^{-1}} = \Psi_1 = \text{id}_M$. Damit ist Ψ_g ein Diffeomorphismus auf M . Deshalb könnten wir in Definition A.2.1 Bedingung (i) und (ii) auch durch folgende Forderung ersetzen: Die Abbildung $g \in G \mapsto \Psi_g \in \text{Diff}(M)$ ist ein Gruppenhomomorphismus für Linkswirkungen bzw. ein Gruppenantihomomorphismus für Rechtswirkungen.

Beispiel A.2.3. (i) Der Fluss $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eines beschränkten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine Wirkung von \mathbb{R} auf M - sowohl eine Links- als auch Rechtswirkung, da \mathbb{R} abelsch ist.

- (ii) Ist V ein Vektorraum und $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\Phi: (a, v) \in G \times V \mapsto \rho(a)v \in V$ eine Linkswirkung.
- (iii) $L: G \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto L_h(g) = hg$ ist eine Linkswirkung von G auf sich selbst. Analog können wir eine Rechtswirkung von G auf sich definieren. Die Konjugation $\Psi(a, g) = aga^{-1}$ ist eine Linkswirkung von G auf sich selbst ($(a, g) \mapsto a^{-1}ga$ wäre eine Rechtswirkung).

Sei G eine Liegruppe. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit eine Lieuntergruppe von G nach Satz A.1.16. Sei $G/H := \{[g] := gH \mid g \in G\}$ die Menge der linken Nebenklassen modulo H und $\pi: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ die kanonische Projektion. Die Abbildung

$$l: G \times G/H \rightarrow G/H, (g, kH) \mapsto gkH$$

definiert eine Linkswirkung von G auf G/H :

Satz A.2.4. [1, Satz 1.24] Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G . Dann trägt G/H eine eindeutig bestimmte Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass

- (i) die kanonische Projektion π und die Wirkung l glatt sind und
- (ii) für jeden Punkt $[g] \in G/H$ existiert eine Umgebung $U_{[g]} \subseteq G/H$ und eine glatte Abbildung $s: U_{[g]} \rightarrow G$ mit $\pi \circ s = \text{id}_{U_{[g]}}$

ist.

Definition A.2.5. In der obigen Situation nennen wir den Quotienten G/H , ausgestattet mit der eindeutigen Mannigfaltigkeitsstruktur von oben, *homogenen Raum*.

Vorl. 11

Folgerung A.2.6. Mit obiger Mannigfaltigkeitsstruktur wird $\pi: G \rightarrow G/H$ zu einem Faserbündel mit Fasertyp H und s ist ein lokaler Schnitt in diesem Bündel.

Beweisskizze. Aus s muss man noch eine lokale Trivialisierung konstruieren: $\varphi: \pi^{-1}(U_{[g]}) \subseteq G \rightarrow U_{[g]} \times H, \varphi(g) = (gH, (s(gH))^{-1}g)$. Da $\pi \circ s = \text{id}$ ist, gilt $s(gH) = gh$ für ein $h \in H$ und damit $(s(gH))^{-1}g = h \in H$. Es gilt $\text{pr}_1 \circ \varphi = \pi$ und φ ist ein Diffeomorphismus mit $\varphi^{-1}(gH, h) = s(gH)h$. \square

A. Liegruppen und Wirkungen

Satz A.2.7. Sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene normale Untergruppe. Dann ist G/H , versehen mit der induzierten Gruppenstruktur und mit der Mannigfaltigkeitsstruktur aus Satz A.2.4, eine Liegruppe.

Beispiel A.2.8. (i) Sei $S_d(\mathbb{K}^r)$ die Menge aller orthonormalen d -Beine in \mathbb{K}^r . Man kann $S_d(\mathbb{R}^r)$ bzw. $S_d(\mathbb{C}^r)$ mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/O_{r-d}(\mathbb{R}) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/U_{r-d}(\mathbb{R})$$

identifizieren. Damit wird auf $S_d(\mathbb{K}^r)$ mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen $S_d(\mathbb{K}^r)$ *Stiefel-Mannigfaltigkeit*. Spezialfall: $S_1(\mathbb{R}^r) = S^{r-1}$ und $S_1(\mathbb{C}^r) = S^{2r-1}$.

(ii) Sei $\text{Gr}_d(\mathbb{K}^r)$ die Menge aller d -dimensionalen Untervektorräume des \mathbb{K}^r . Man kann $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^r)$ bzw. $\text{Gr}_d(\mathbb{C}^r)$ mit dem homogenen Raum

$$O_r(\mathbb{R})/(O_d(\mathbb{R}) \times O_{r-d}(\mathbb{R})) \text{ bzw. } U_r(\mathbb{R})/(U_d(\mathbb{R}) \times U_{r-d}(\mathbb{R}))$$

identifizieren. Damit wird auf $\text{Gr}_d(\mathbb{K}^r)$ mit Hilfe des letzten Satzes eine Topologie bzw. Mannigfaltigkeitsstruktur induziert - wir nennen $\text{Gr}_d(\mathbb{K}^r)$ *Graßmann-Mannigfaltigkeit*. Spezialfall: $\text{Gr}_1(\mathbb{K}^r) = \mathbb{K}P^{r-1}$.

Beispiel A.2.9. (Induzierte Wirkungen) Sei $\Psi: G \times M \rightarrow M$ eine G -Wirkung.

- (i) Sei $H \subseteq G$ eine Lie-Untergruppe und $N \subseteq M$ eine H -invariante* Untermannigfaltigkeit. Dann ist die induzierte Abbildung $\hat{\Psi}: H \times N \rightarrow N$ eine H -Wirkung auf N . Zum Beispiel ist die S^1 -Wirkung auf S^3 aus Beispiel I.1.2.vi eine induzierte $H = G = S^1$ Wirkung auf der Untermannigfaltigkeit $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$.
- (ii) Sei H eine abgeschlossene normale Untergruppe von G . Dann ist H eine Lie-Untergruppe von G nach Satz A.1.16 und G/H eine Mannigfaltigkeit nach Satz A.2.4. Sei weiterhin $\Psi_h = \text{id}_M$ für alle $h \in H$. Dann ist die induzierte Abbildung $\hat{\Psi}: G/H \times M \rightarrow M$ wohl-definiert und eine G/H -Wirkung auf M .

Definition A.2.10. Sei $\Psi: G \times M \rightarrow M$ eine Wirkung und $p \in M$. Die Menge

$$\iota_p := \{\Psi(g, x) \mid g \in G\}$$

heißt *Orbit durch x* . Die Menge

$$G_p := \{g \in G \mid \Psi(g, p) = p\}$$

heißt *Stabilisator* oder *Isotropiegruppe* von x . Die Menge der Orbits M/G versehen mit der Quotiententopologie heißt *Orbitraum*.

Definition A.2.11. Eine G -Wirkung Ψ heißt

- (i) *effektiv*, falls $g = 1$ aus $\Psi_g = \text{id}_M$ folgt.
- (ii) *frei*, falls $G_p = \{1\}$ für alle $p \in M$.
- (iii) *transitiv*, falls $\mathcal{O}_p = M$ für ein (und damit für alle) $p \in M$ gilt.
- (iv) *eigentlich*, falls die Abbildung

$$G \times M \ni (g, m) \mapsto (m, \Psi(g, m)) \in M \times M$$

eigentlich ist, also Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Lemma A.2.12. (i) G_p abgeschlossene Untergruppe von G und damit Lieuntergruppe.

(ii) $\iota_p: G/G_p \rightarrow M$, $gG_p \mapsto \Psi(g, p)$, ist eine injektive Immersion.

(iii) Ist die G -Wirkung eigentlich, ist ι_p sogar eine Einbettung und $\mathcal{O}_p \cong G/G_p$.

*D.h. $\Psi(h, n) \in N$ für alle $h \in H$ und $n \in N$

(iv) Jede Wirkung einer kompakten Liegruppe ist eigentlich.

Satz A.2.13. [7, Thm 21.10] Sei Ψ eine freie und eigentliche freie Wirkung einer Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M , dann existiert auf dem topologischen Raum M/G eine eindeutig bestimmte glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, in der die kanonische Projektion $\pi: M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist. Für jeden Punkt $[g] \in M/G$ existiert eine Umgebung $U[g] \subseteq M/G$ und eine glatte Abbildung $s: U[g] \rightarrow M$ mit $\pi \circ s = \text{id}|_{U[g]}$.

Beispiel A.2.14. Die Hopffaserung aus Beispiel I.1.2.vi: Wir betrachten die Wirkung von $U(1) \cong S^1$ auf \mathbb{C}^2 mittels

$$(e^{i\alpha}, (z_1, z_2)) \in U(1) \times \mathbb{C}^2 \mapsto (e^{i\alpha} z_1, e^{i\alpha} z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Diese Wirkung lässt die Untermannigfaltigkeit $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ invariant. Die Projektion $S^3 \rightarrow S^3/U(1)$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp S^1 .

Beweis. Die Wirkung auf \mathbb{C}^2 ist frei, vgl. Definition A.2.1 und A.2.11. Damit haben wir auch eine freie Wirkung von $U(1)$ auf S^3 . Da $U(1)$ eine kompakte Liegruppe ist, ist die Wirkung eigentlich, s. Definition A.2.11 und Lemma A.2.12.iv. Nach Satz A.2.13 ist damit $S^3/U(1)$ wieder eine Mannigfaltigkeit und nach Satz ?? ist die Projektion $S^3 \rightarrow S^3/U(1)$ ein Faserbündel mit Fasertyp $U(1) \cong S^1$. \square

Wir wissen nun, dass der Orbitraum S^3/S^1 eine glatte Mannigfaltigkeit ist, welche? Sei $z_1 z_2 \neq 0$. Dann enthält der Orbit von (z_1, z_2) immer $(|z_1|, v) \in \mathbb{C}^2$ für ein geeignetes $v \in \{e^{i\alpha} z_2\}$. Bei festem $|z_1|$ gehört jedes dieser v 's zu einem anderen Orbit. D.h. $(S^3 \setminus \{z_1 z_2 \neq 0\})/S^1 \cong (0, 1) \times S^1$, wobei $|z_1|$ durch $(0, 1)$ parametrisiert wird. Der verbleibende Anteil $\{z_1 z_2 \neq 0\}$ besteht nur aus zwei Orbits einmal für $|z_1| = 0$ und für $|z_1| = 1$. D.h. $S^3/S^1 \cong S^2^*$

Man kann das Beispiel der Hopffaserung auch als homogenen Raum verstehen: Es ist $S^3 \cong SU(2)$, da

$$(z_1, z_2) \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Es ist nun

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \right\} \subseteq SU(2)$$

ein Untergruppe, die auch abgeschlossen und damit eine Lieuntergruppe ist. Die Projektionsabbildung in den zugehörigen homogenen Raum $S^3 \rightarrow S^3/S^1$ gibt genau die Hopffaserung von oben: Denn betrachtet man als S^1 -Wirkung auf $SU(2)$

$$e^{i\alpha} \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} a & \overline{e^{-i\alpha} b} \\ -e^{-i\alpha} b & \overline{e^{i\alpha} a} \end{pmatrix}.$$

entspricht das auf der S^3 -Seite genau unserer S^1 -Wirkung von oben. Das ist auch genau Beispiel A.2.8.

Beispiel A.2.15. Das letzte Beispiel ist ein Spezialfall von :

$$\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)) \text{ mit } U(n) \cong S(U(1) \times U(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} (\det A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in U(n) \right\} \subseteq SU(n+1)$$

$$(S^2 \cong \mathbb{C}P^2 = SU(2)/S(U(1) \times U(1)) = SU(2)/U(1)).$$

Analog gilt

$$\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/S(O(1) \times O(n)) \text{ mit } O(n) \cong S(O(1) \times O(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in O(n) \right\} \subseteq SO(n+1).$$

*Streng genommen muss man an dieser Stelle noch wissen, dass Flächen nur genau eine differenzierbare Struktur tragen können. Wer das nicht annehmen will, kann auch direkt einen Diffeomorphismus

hinschreiben.

B. Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F . Für $x \in M$ definieren wir $E_x := \pi^{-1}(x)$.

- (i) Ist E_x eine Untermannigfaltigkeit von E ?*
- (ii) Ist $T\nu E := \sqcup_{e \in E} T_e(E_{\pi(e)}) \rightarrow M, v \in T_e(E_{\pi(e)}) \mapsto \pi(e) \in M$, ein Faserbündel?

Übungsaufgabe 2. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und seien $\mu_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F / \sim \xrightarrow{\pi} M, [(x, v)] \mapsto x,$$

wobei $(x, v) \in U_\alpha \times F \sim (y, w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\alpha\beta}(x)v = w$ ist, sowie $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, [(x, v) \in U_\alpha \times F] \mapsto (x, v)$. Zeigen Sie, dass E ein Faserbündel definiert.

Übungsaufgabe 3. (i) Zeigen Sie das TS^1 das triviale Faserbündel über S^1 mit Fasertyp \mathbb{R} ist.

- (ii) Sei ϵ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus \epsilon$ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp \mathbb{R}^{n+1} ist.

(iii*) Ist TS^2 trivial?

Übungsaufgabe 4. Sei $E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F .

- (i) Seien die Einschränkungen $E|_{M \times [0, c]}$ und $E|_{M \times [c, 1]}$ triviale Faserbündel. Zeigen Sie, dass dann auch $E \rightarrow M \times [0, 1]$ ein triviales Faserbündel ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass es eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M gibt, so dass alle Einschränkungen $E|_{U_i \times [0, 1]}$ trivial sind.†
- (iii) Sei U_i wie in (ii) und φ_i eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze $\psi_i = \sum_{j \leq i} \varphi_j$. Sei $E_i := E|_{\Gamma_i}$ mit $\Gamma_i := \{(x, \psi_i(x)) \mid x \in M\}$. Die Abbildung $(x, \psi_i(x)) \in \Gamma_i \rightarrow (x, \psi_{i-1}(x)) \in \Gamma_{i-1}$ induziert eine Bündelisomorphismus $h_i: E_i \rightarrow E_{i-1}$.
- (iv) Konstruieren Sie aus obigen h_i einen Bündelisomorphismus von $E|_{M \times \{0\}}$ und $E|_{M \times \{1\}}$.

Übungsaufgabe 5. Sei $\pi: E \rightarrow S^1$ das Möbiusband und $f: z \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \rightarrow z^k \in S^1$. Zeigen Sie, dass f^*E genau dann trivial ist, wenn k gerade ist.

*Eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\kappa(U \cap N) = \mathbb{R}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^{m-n}\}$ gibt. Äquivalente Definition: Um jeden Punkt $p \in N$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ und eine glatte Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = N \cap U$ ist. (Die Äquivalenz zeigt man ganz analog zum Fall von Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum, vgl. [3, Satz I.1.4.]

†Unsere Mannigfaltigkeiten haben immer eine abzählbare Basis. Daraus folgt insbesondere, dass sie *Lindelöf-Räume* sind, d.h. dass jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

B. Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 6. Sei $S^2 = U_0 \cup U_1$ mit $U_{01} := U_1 \cap U_0$ eine Umgebung des Äquators und $U_i \cong \mathbb{R}^2$. Wir identifizieren U_i mit \mathbb{R}^2 und U_{01} mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir setzen $\mu_{01}(z) = z^k \in \text{Gl}_1(\mathbb{C}) \subseteq \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{Z}$, in Polarkoordinaten geschrieben:

$$\mu_{01}(r, \theta) = r^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}).$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ definiert das ein reelles Vektorbündel $E_k \rightarrow S^2$ vom Rang 2 (und ein komplexes vom Rang 1^*).

Zeigen Sie:[†]

- (i) $E_k \otimes_{\mathbb{C}} E_\ell \cong E_{k+\ell}$. Gilt auch $E_k \otimes_{\mathbb{R}} E_\ell \cong E_{k+\ell}$?
- (ii) Es gilt $E_k \cong E_\ell$ genau dann, wenn $k = \ell$ ist.
- (iii) Berechnen Sie $\iota^* E_k$, wobei $\iota: S^2 \rightarrow S^2$ die antipodale Abbildung ist.

Übungsaufgabe 7. (i) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Faserbündel. Zeigen Sie, dass dann π eine Submersion ist (d.h. die Tangentialabbildung ist surjektiv).

(ii) Sei $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Quotientenabbildung. Dann ist $q^* T\mathbb{R}P^n = TS^n$.

(iii) Sei $\psi: E \rightarrow E'$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen $\pi: E \rightarrow M$ und $\pi': E' \rightarrow M'$, so dass $\psi|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{f(y)}$ mit $f \circ \pi = \pi' \circ \psi$ für alle $x \in M$ den gleichen Rang hat. Dann ist $\ker \psi$ ein Untervektorbündel von E' .

Übungsaufgabe 8. (i) Wiederholen Sie die Definition [A.1.1](#) einer Liegruppe G und Beispiele dazu.

(ii) Berechnen Sie $T_{\text{Id}_n} U(n)$.[‡]

(iii) Sei $\varphi: G \rightarrow H$ ein Liegruppenhomomorphismus, d.h. ein Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen, der glatt ist. Zeigen Sie, dass die Tangentialabbildung konstanten Rang hat.

(iv) Folgern Sie aus (iii) ein Kriterium dafür, wann ein Liegruppenhomomorphismus schon ein Liegruppenisomorphismus ist.

Übungsaufgabe 9. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Wir setzen $\pi': E^* := \sqcup_{x \in M} E_x^* \rightarrow M$, $L_x \in E_x^* \mapsto x \in M$ und

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha: (\pi')^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{x \in U_\alpha} E_x^* \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{R}^r)^* \\ L_x \in E_x^* &\mapsto (\pi'(L_x) = x, (v \in \mathbb{R}^r \mapsto L_x(\varphi_\alpha^{-1}(x, v))) \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie die Übergangsfunktionen für φ'_α bzgl. der Übergangsfunktionen für φ_α und zeigen Sie, dass diese die Kozykelbedingung erfüllen.

(ii) Betrachten Sie $E = TM$ mit den lokalen Trivialisierungen, die von einem Atlas von M kommen, vgl. Skript Abb. I.1. Wie sieht ein Vektorfeld in einer lokalen Trivialisierung aus und wie berechnet sich die lokale Darstellung beim Übergang zu einer anderen lokalen Trivialisierung.

(iii) Bearbeiten Sie die analoge Aufgabe zu (ii) für das Kotangentialbündel T^*M .

*Es gibt auch den Begriff des holomorphen Bündels, dass ist ein komplexes Vektorbündel, dessen lokale Trivialisierungen biholomorphe Abbildungen sind bzw. äquivalent dazu, dessen Übergangsfunktionen holomorph sind. Die ist hier der Fall.

†Wir hatten (mittels der Clutchingfunktionen) in der Vorlesung die Bijektion $[S^1, \text{Gl}_1(\mathbb{C})] \rightarrow \text{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2)$. Die Abbildung $H: \text{Gl}_1(\mathbb{C}) \times [0, 1] \rightarrow S^1$, $a \mapsto (1 - t + t|a|^{-1})a$ gibt eine Homotopieäquivalenz von $\text{Gl}_1(\mathbb{C})$ zu $S^1 = U(1)$. Also ist auch $[S^1, S^1] \rightarrow \text{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2)$ eine Bijektion. Da S^1 zusammenhängend ist, ist $[S^1, S^1] = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und es sind genau die Vektorbündel aus der Aufgabe, da id_{S^1} der Erzeuger der $\pi_1(S^1)$ ist.

‡Es ist $U(n) := \{A \in \text{Gl}_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = \text{Id}_n\}$, wobei A^* die adjungierte Matrix zu A ist, d.h. die Konjugierte der Transponierten.

Übungsaufgabe 10. Sei M^m eine Mannigfaltigkeit. Seien $x = (x^1, \dots, x^m)$ lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$. Wir definieren $\beta^x(X_1, \dots, X_m) := \det(X_j^i)$, wobei $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ und $X_j = X_j^i \partial_{x^i}$ gilt.

- (i) Zeigen Sie, dass $\beta^x \in \Omega^m(U)$ gilt und finden Sie die lokale Darstellung von β^x in den Koordinaten $\{x^i\}$.
- (ii) Seien $y = (y^1, \dots, y^m)$ weitere lokale Koordinaten auf U . Zeigen Sie, dass

$$\beta^y = \det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \beta^x$$

gilt.

- (iii) Sei $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ mit lokalen Koordinaten x_α^i ein orientierter Atlas von M und sei ρ_α eine untergeordnete Zerlegung der Eins zu $\{U_\alpha\}$. Zeigen Sie, dass dann $\sum_\alpha \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$ eine nirgends verschwindende m -Form auf ganz M definiert.
- (iv) Sei (M, g) orientiert und die lokalen Koordinaten derart, dass ∂_{x^i} positiv orientiert ist. Zeigen Sie, dass $\gamma := \sqrt{|\det g_{ij}^x|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ für alle solchen lokalen Koordinaten das gleiche Element in $\Omega^m(U)$ definiert. Hierbei ist $g_{ij}^x(x) := g_x(\partial_{x^i}|_x, \partial_{x^j}|_x)$. Stimmt das auch noch, wenn man zusätzlich auch lokalen Koordinaten x zulässt, so dass ∂_{y^i} negativ orientiert ist?

Übungsaufgabe 11. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Der Pullback einer Differentialform $\gamma \in \Omega^k(N)$ ist definiert durch

$$(F^*\gamma)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) = \gamma_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p)))$$

für alle $p \in M$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$. Es ist also insbesondere $F^*\gamma \in \Omega^k(M)$.

Seien x^i lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$ und y^i lokale Koordinaten auf $U' \subseteq F(U) \subseteq N$. Sei $F(x = (x^1, \dots, x^m)) = (y^1 = F^1(x), \dots, y^n = F^n(x))$.

Rechnen Sie nach:

$$F^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = (f_{i_1 \dots i_k} \circ F) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

Übungsaufgabe 12. Sei G eine Liegruppe, $v \in T_1 G$ und $L_h: G \rightarrow G, g \mapsto hg$.

- (i) Zeigen Sie, dass $X_v(h \in G) := d_1 L_h(v)$ ein glattes Vektorfeld auf G definiert.*
- (ii) Zeigen Sie, dass für ein Vektorfeld X auf G die Beziehung $d_g L_h(X(g)) = X(hg)$ für alle $g, h \in G$ genau dann gilt, wenn es ein Vektorfeld wie in (i) ist. Solche Vektorfelder nennen wir *linksinvariant* und die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder auf G bezeichnen wir mit \mathfrak{g} und nennen wir *Lie-Algebra der Liegruppe G* . Damit haben wir einen Vektorraumisomorphismus $T_1 G \cong \mathfrak{g}$
- (iii) Sei $G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$. Dann ist $T_{\text{Id}_n} G = \text{Matr}(n, \mathbb{R}) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für $A \in \text{Matr}(n, \mathbb{R})$ gilt: $X_A(h \in G) = hA$.
- (iv) Betrachten Sie die Exponentialabbildung[†] $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{R}), A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ und setze $\gamma(t) := \exp(tA)$ für $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\dot{\gamma}(t) = X_A(\gamma(t))$ und $\gamma(0) = \text{Id}_n$ gilt.

Übungsaufgabe 13. (i) Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Geradenbündel (=Vektorbündel vom Rang 1). Zeigen Sie, dass $\text{End}(E)$ ein triviales Bündel ist.

- (ii) Es gilt $\text{Hom}(E, E' \oplus E'') \cong \text{Hom}(E, E') \oplus \text{Hom}(E, E'')$ für Vektorbündel E, E', E'' über M .
- (iii) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon \cong \underbrace{\tau \oplus \dots \oplus \tau}_{(n+1)\text{-mal}}$ gilt, wobei ϵ das triviale Bündel und τ das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{R}P^n$ ist.

*Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann glatt, wenn $X(f) \in C^\infty(M)$ für alle $f \in C^\infty(M)$ ist. Warum ist das so?

†Was hat das mit der Exponentialabbildung aus Diffgeo I zu tun? $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ besitzt eine spezielle Riemannsche Metrik (biinvariante Metrik). Die Exponentialabbildung zu dieser Metrik ist gleich der hier gegebenen.

B. Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 14. (i) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und x^i lokale Koordinaten auf $U \subseteq M$. Betrachten Sie $\flat: X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^\flat := g(X, \cdot) \in \Omega^1(M)$ und die Umkehrabbildung \sharp . Bestimmen Sie die lokalen Darstellungen von X^\flat und α^\sharp bzgl. der lokalen Darstellung von $X \in \mathfrak{X}(M)$ bzw. $\alpha \in \Omega^1(M)$ in den Koordinaten x^i .

(ii) Auf \mathbb{R}^3 mit euklidischer Metrik haben wir zeitabhängige Vektorfelder $E(x, t)$ und $B(x, t)$ sowie zeitabhängige Skalare $\rho(x, t)$ und $j(x, t)$ (Die Zeitabhängigkeiten sind wie alles andere auch glatt.) Rechnen Sie nach, dass die Gleichungen auf der linken Seite äquivalent zu denen auf der rechten Seite sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & *dE^\flat &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B^\flat \\ \operatorname{div} B &= 0 & d(*B^\flat) &= 0 \\ \operatorname{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j & *dB^\flat &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^\flat + \frac{4\pi}{c} j^\flat \\ \operatorname{div} E &= 4\pi \rho & d(*E^\flat) &= 4\pi \rho \operatorname{dvol}_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 15. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$.

(i) Zeigen Sie: Für jedes Intervall (a, b) um $0 \in \mathbb{R}$ mit $|b - a|$ klein genug, hat

$$\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)), \quad \gamma_x(0) = x$$

eine Lösung. Ist das Intervall maximal, so ist die Lösung eindeutig – das maximale Intervall, nennen wir (a_x, b_x) .

Der *Fluss des Vektorfeldes* X ist definiert durch

$$\Phi: \Sigma_X = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid a_x < t < b_x\} \rightarrow M, \quad \Phi_t(x) := \Phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

Ist $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$, nennen wir das Vektorfeld X *vollständig*.

(ii) Ist X vollständig, dann ist $\Phi_t: M \rightarrow M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

(iii) Ist $x^2 \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ vollständig?

(iv) Jedes beschränkte Vektorfeld auf einer vollständigen Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Übungsaufgabe 16. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang r mit M kompakt.

(i) Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $g: E \rightarrow \mathbb{K}^m$ für ein $r \leq m < \infty$, so dass es für alle $x \in M$ die Einschränkung $g|_{E_x}$ injektiv und linear ist.

Sei $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m) = \{r\text{-dimensionale Untervektorräume von } \mathbb{K}^m\}$ die Grassmannmannigfaltigkeit.* Dann ist $\operatorname{Gr}_1(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}P^{m-1}$, für welches wir in Beispiel 1.2(iii) das kanonische/tautologische Geradenbündel τ kennengelernt haben. Analog kann man das tautologische Bündel über $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ definieren:

$$\gamma_r^m := \{(\ell, v) \in \operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \mid v \in \ell\} \rightarrow \operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m).$$

Das ist ein Vektorbündel vom Rang r – insbesondere ein Unterbündel von trivialen Faserbündel $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \rightarrow \operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$. Weiterhin ist $q: (\ell, v) \in \gamma_r^m \mapsto v \in \mathbb{K}^m$ ein g wie aus (i).

(ii) Zeigen Sie: Gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u: E \rightarrow \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist, dann ist qu ein g wie aus (i). Ist andersherum $g: E \rightarrow \mathbb{K}^m$ wie in (i) gegeben, dann gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u: E \rightarrow \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist und für den $g = qu$ gilt.

*Man kann $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ auch als Teilmenge von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ verstehen, nämlich $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m) = \{P \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \mid P^2 = P, P^T = P, \operatorname{Spur}(P) = k\} (= \{P \text{ ist Orthogonalprojektion auf einen } k \text{ dimensionalen Untervektorraum}\})$. Dann ist $\operatorname{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ der Dimension $r(m - r)$.

- (iii) Folgern Sie, dass für jedes \mathbb{K} -Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ vom Rang r eine Abbildung $f: M \rightarrow \text{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ gibt, so dass $f^*\gamma_r^m \cong E$ gilt.*

Übungsaufgabe 17. Die *Torsion* eines Zusammenhangs ∇ auf TM ist definiert durch $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Zeigen Sie, dass

- (i) T ein $(1, 2)$ schiefsymmetrischer Tensor ist, also $T \in \mathfrak{T}_1^2(M)$ mit $T(X, Y) = -T(Y, X)$ gilt. Was ist die lokale Darstellung von T ?
- (ii) für zwei Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 mit der gleichen Torsion $\omega(X)(Y) = \omega(Y)(X)$ ist.
- (iii) für ein $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, welches symmetrisch in den ersten zwei Komponenten ist, und ∇ ein Zusammenhang auf TM auch $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X, Y)$ einen Zusammenhang auf TM mit der gleichen Torsion, wie ∇ definiert.

Übungsaufgabe 18. Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel über M mit metrischem Zusammenhang ∇^E (bzgl. einer Bündelmetrik h^E). Auf E^* erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*} \omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*), s \in \Gamma(E)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass ∇^{E^*} bzgl. der Bündelmetrik h^{E^*} aus Lemma I.2.28 metrisch ist.

Übungsaufgabe 19. Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel über M mit affinem Zusammenhang ∇^E . Auf $\Lambda^k E^*$ erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*} \omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \quad \text{und} \\ \nabla_X^{\Lambda^{k+\ell} E^*} (\alpha \wedge \beta) = \left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha \right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*} \beta \right)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*), s \in \Gamma(E), \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*), \beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*} \alpha \right) (s_1, \dots, s_k) = X(\alpha(s_1, \dots, s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1, \dots, s_{j-1}, \nabla_X^E s_j, s_{j+1}, \dots, s_k)$$

für alle $s_i \in \Gamma(E), \alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

Übungsaufgabe 20. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Sei $\omega = (\omega_k^i) \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ die Zusammenhangsform von ∇ bzgl. eines Rahmen s_i auf U und $\Omega = (\Omega_k^i) \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}))$ die zugehörige Krümmungsform von F auf U bzgl. dieses Rahmen s_i . Zeigen Sie, dass

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i$$

gilt.

Übungsaufgabe 21. Sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(N)$. Der Pushforward $\varphi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ ist definiert durch $(\varphi_* X)(p) := d_{\varphi^{-1}(p)} \varphi(X(\varphi^{-1}(p)))$. Zeigen Sie:

- (i) $(\varphi_* X)(f) = X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$
- (ii) $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]^\dagger$
- (iii) $\varphi_*(fX) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi_* X)$

*Warum ist das toll? Das ist ein wichtiges Resultat in der Differentialtopologie - für die Klassifikation von Vektorbündeln. Es sagt, dass jedes Vektorbündel als Pullback von diesen tautologischen Vektorbündeln mit geeignetem m aufgefasst werden kann. Man kann sich überlegen, dass man Einbettungen $\text{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \hookrightarrow \text{Gr}_r(\mathbb{K}^{m+1}) \hookrightarrow \text{Gr}_r(\mathbb{K}^{m+2}) \hookrightarrow \dots$ hat und $\gamma_r^{m-1}|_{\text{Gr}_r(\mathbb{K}^m)} \cong \gamma_r^m$ gilt. Damit kann man den direkten Limes der Grassmannschen $\text{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ und der Bündel γ_r^m für $m \rightarrow \infty$ bilden und erhält ein *universelles Bündel* $\gamma_r^\infty \rightarrow \text{Gr}_r(\mathbb{K}^\infty)$. Das ist nicht mehr ein Vektorbündel in unserem Sinne, da die Räume keine Mannigfaltigkeiten mehr sind, aber ansonsten verhält es sich ähnlich. Es heißt universell, weil nun (durch 'Weglassen' der Dimensionseinschränkung) jedes Vektorbündel als Pullback dieses universellen Bündels dargestellt werden kann.

†Für den Spezialfall $\varphi = L_h: G \rightarrow G$ für eine Liegruppe G folgt daraus insbesondere, dass die Lieklammer linksinvarianter Vektorfelder wieder linksinvariant ist - also \mathfrak{g} unter der Lieklammer abgeschlossen ist.

B. Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 22. Sei $f: N \rightarrow M$ glatt, $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E . Sei $s \in \Gamma_f(E)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

- (i) Berechnen Sie die lokale Darstellung der Zusammenhangs- und Krümmungsformen von ∇^{f^*E} in Abhängigkeit derer von ∇^E .
- (ii) Zeigen Sie, dass dann $R^{f^*E}(X, Y)s = R^E(f_*X, f_*Y)s$ gilt.

Übungsaufgabe 23. (Krümmung mittels Paralleltransport) Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E .

- (i) Sei $c: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ stückweise glatt* und $c_s(t) := c(s, t)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 22.ii, dass für $\varphi \in \Gamma_c(E)$ mit $\nabla_{\partial_s}^{c_s^*E} \varphi(\cdot, 0) = 0$ und $\nabla_{\partial_t}^{c_s^*E} \varphi(\cdot, \cdot) = 0$ gilt:

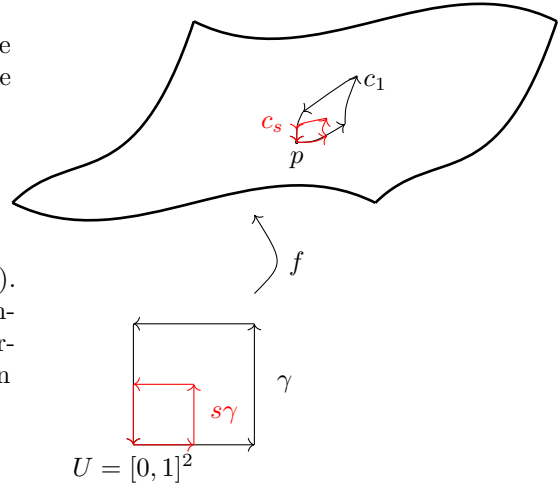
$$\nabla_{\partial_s}^{c_s^*E} \varphi(s, 1) = \int_0^1 R_{s,t} \varphi(s, 1) dt =: \left(\int_0^1 R_{s,t} dt \right) \varphi(s, 1),$$

wobei $R_{s,t} := \|\cdot\|_{t,1}^{c_s} \circ R^E(\partial_t c, \partial_s c) \circ \|\cdot\|_{1,t}^{c_s}$ ist. (Hinweis: Beginnen Sie mit der Berechnung von $R^E(\partial_t c, \partial_s c)$.)

Sei $p \in M$ und $f: U = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine glatte Abbildung mit $f(0) = p$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Kurve mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (4t, 0) & t \leq 1/4 \\ (1, 4t - 1) & 1/4 < t \leq 1/2 \\ (3 - 4t, 1) & 1/2 < t \leq 3/4 \\ (0, 3 - 4t) & 3/4 < t \end{cases}$$

Wir setzen $c: [0, 1]^2 \rightarrow M$, $c_s(t) = c(s, t) = f(s\gamma(t))$. Sei $\varphi_0 \in E_p$. Für alle $s \in [0, 1]$ sei $\varphi(s, \cdot)$ der horizontale Lift von φ_0 entlang c_s . Wegen der Differenzierbarkeit der Lösungen in Abhängigkeit der Anfangsdaten ist φ auch in s glatt.



Zeigen Sie,

- (ii) $\nabla_{\partial_s}^{c_s^*E} \varphi(s, 1) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, 1)$ und damit $\frac{\partial}{\partial s} \|\cdot\|_{1,u}^{c_s} = \left(\int_0^1 R_{s,t} dt \right) \|\cdot\|_{1,u}^{c_s}$ für alle $u \in [0, 1]$.
- (iii) $\frac{1}{4s} R_{s,t} \rightarrow R(\partial_x f, \partial_y f)$ für $s \rightarrow 0$ und uniform in t konvergiert.
- (iv) $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \|\cdot\|_{1,0}^{c_s} \varphi_0 = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \|\cdot\|_{1,0}^{c_s} \varphi_0 = 2R(u, v)\varphi_0$ mit $u = \partial_x f(0 \in \mathbb{R}^2)$, $v = \partial_y f(0)$.

Übungsaufgabe 24. (i) Zeigen Sie, dass für eine Liegruppe, das Tangentialbündel immer trivial ist. Folgern Sie daraus, dass S^2 keine Gruppenstruktur trägt, die es zu einer Liegruppe macht.

- (ii) Sei $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ ein Liegruppenhomomorphismus. Sei $\psi_*: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, $X \mapsto \psi_*X$, wobei $(\psi_*X)(g) := d_1 L_g(d_1 \psi(X(1)))$ ist. Zeigen Sie, dass $\psi(\exp X) = \exp \psi_*X$ für alle $X \in \mathfrak{g}_1$. (Hinweis: Setzen Sie $\gamma(t) := \psi(\exp(tX))$. Dann reicht es $\dot{\gamma}(t) = \psi_*X(\gamma(t))$ nachzurechnen.)

Übungsaufgabe 25. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der Torus. Wir betrachten die folgenden Wirkungen: Für $\delta \in \mathbb{R}$ sei

$$\Phi^\alpha: \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1, (n, e^{i\delta}) \mapsto e^{i(\delta + \alpha n)}.$$

Für $\gamma \in \mathbb{R}$ sei

$$\Psi^\gamma: \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2, (t, (e^{i\alpha}, e^{i\beta})) \mapsto (e^{i(\alpha+t)}, e^{i(\beta+t\gamma)}).$$

*c ist zwar nur stückweise glatt, aber Paralleltransport funktioniert noch genau so - man löst die Differentialgleichung auf den glatten Stück und klebt die dann einfach zusammen.

Untersuchen Sie diese Wirkungen auf die Eigenschaften: frei, eigentlich, transitiv. Gibt es eine Untergruppe von \mathbb{Z} bzw. \mathbb{R} deren induzierte Wirkung zum gleichen Orbitraum führt. Beschreiben Sie den Orbitraum möglichst genau (Hausdorffsch, Mannigfaltigkeit, ...?).

Übungsaufgabe 26. Sei $p: N \rightarrow M$ ein Faserbündel mit diskreter Faser (= Überlagerung). Wann ist p ein Hauptfaserbündel? Finden Sie Kriterien (hinreichend und/oder notwendig?) in Termen der Fundamentalgruppen der involvierten Mannigfaltigkeiten.

Übungsaufgabe 27. (i) Sei $(e^{i\alpha}, (z_1, z_2)) \in S^1 \times S^3 \mapsto (e^{-i\alpha}z_1, e^{-i\alpha}z_2) \in S^3$. Dann ist $S^3 \rightarrow S^3/S^1 \cong S^2$ ein S^1 -Hauptfaserbündel. Zeigen Sie, dass dieses Bündel zum Hopfbündel als Faserbündel isomorph ist, aber nicht als Hauptfaserbündel.

(ii) Manchmal findet man auch folgende Definition für Isomorphie von Hauptfaserbündeln:
Seien G_i -Hauptfaserbündel $\pi_i: E_i \rightarrow M_i, i = 1, 2$ gegeben mit G_i -Wirkungen Ψ_i . Diese sind isomorph falls es Diffeomorphismen $f: E_1 \rightarrow E_2, \tilde{f}: M_1 \rightarrow M_2$ und einen Liegruppenisomorphismus $\lambda: G_1 \rightarrow G_2$ mit $\pi_2 \circ f = \tilde{f} \circ \pi_1$ und $f(\Psi_1(g, e)) = \Psi_2(\lambda(g), \tilde{f}(e))$ für alle $g \in G_1$ und $e \in E_1$. Stimmt diese Definition für den Fall $G_1 = G_2$ und $\tilde{f} = \text{id}_M$ mit unserer Definition I.3.6 überein?

Übungsaufgabe 28. Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe, die auf M wirkt (o.B.d.A. eine Linkswirkung). Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

- (i) Die Wirkung ist eigentlich.
- (ii) Ist (p_i) eine Folge in M und (g_i) eine in G , so dass sowohl p_i als auch $g_i \cdot p_i$ in M konvergieren, dann konvergiert auch eine Teilfolge der g_i in G .
- (iii) Für jedes Kompaktum $K \subseteq M$ ist die Menge $G_K := \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\} \subseteq G$ kompakt.

Übungsaufgabe 29. Sei H eine Lieuntergruppe der Liegruppe G . Sei $\Psi: G \times G/H \rightarrow G/H, (g', gH) \mapsto \Psi_{g'}(gH) := g'gH$. Sei $\rho: H \rightarrow \text{Gl}(T_H(G/H))$ die Isotropiedarstellung von H ist, d.h. $\rho(h) := d_H\Psi_h$.

- (i) Sei Ψ eine effektive Wirkung. Zeigen Sie, dass dann das Tangentialbündel $T(G/H) \rightarrow G/H$ isomorph zum assoziierten Faserbündel $G \times_{\rho} T_H(G/H) \rightarrow G/H$ ist.
- (ii) Sei $\bar{H} := \{g \in G \mid \Psi_g = \text{id}_M\}$. Dann ist \bar{H} der größte Normalteiler von G , der in H enthalten ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass die induzierte Wirkung von $\hat{G} = G/\bar{H}$ auf $M = G/H$ effektiv ist und dass $M = \hat{G}/\hat{H}$ für $\hat{H} = H/\bar{H}$ gilt.

Übungsaufgabe 30. Wir identifizieren die Standardsphäre S^3 mit der Gruppe der Quaternionen \mathbb{H} vom Betrag 1 und $SO(3)$ sei die spezielle orthogonale Gruppe die auf $\text{span}\{i, j, k\} \cong \mathbb{R}^3$ wirkt. Sei $\lambda: S^3 \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}), \lambda(p)q := pqp^{-1}$ (Multiplikation als Quaternionen).

- (i) Zeigen Sie, dass ρ die Zerlegung $\text{span}\{1\} \oplus \text{span}\{i, j, k\}$ respektiert, dann $\lambda(p)$ ein Element in $SO(3)$ definiert und damit $\lambda: S^3 \rightarrow SO(3)$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm 1\}$ ist. Folgern Sie damit, dass $SO(3)$ diffeomorph zu $\mathbb{R}P^3$ ist und λ die zugehörige zweifache Überlagerung ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $SO(3)/SO(2) \rightarrow S^2, [g] \mapsto ge_1$, ein Diffeomorphismus ist, wobei $A \in SO(2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in SO(3)$, also $e_1 \in \mathbb{R}^3$, der erste Koordinatenvektor, ein Fixpunkt von $A \in SO(2)$.
- (iii) Sei $\pi: SO(3) \rightarrow S^2$ das zu (ii) gehörige $SO(2)$ -Hauptfaserbündel. Ist $\pi \circ \lambda: S^3 \rightarrow S^2$ äquivalent zur Hopffaserung?

Übungsaufgabe 31. Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\rho: G \times F \rightarrow F$ eine Linkswirkung. Sei $\text{Hom}^G(P, F)$ die Menge der glatten Abbildungen $u: P \rightarrow F$ mit $u(p \cdot g) = \rho(g^{-1}, u(p))$ für alle $p \in P$ und $g \in G$.

*Daraus folgt dann auch direkt, dass Wirkungen kompakter Gruppen immer eigentlich sind.

B. Übungsaufgaben

- (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem $u \in \text{Hom}^G(P, F)$ einen Schnitt $\varphi_u \in \Gamma(P \times_\rho F)$ mit $\varphi_u \circ \pi = \hat{\pi} \circ (\text{id}_P, u): P \mapsto P \times_\rho F$ definiert. Hierbei ist $\hat{\pi}: P \times F \rightarrow P \times_\rho F$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Zuordnung $u \mapsto \varphi_u$ eine Bijektion von $\text{Hom}^G(P, F)$ mit $\Gamma(P \times_\rho F)$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass ein G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ genau dann auf die Lieuntergruppe $H \subseteq G$ reduzierbar ist, wenn das assoziierte Faserbündel $P \times_\ell G/H$ (wobei $\ell: G \times G/H, (g, kH) \mapsto gkH$) einen globalen glatten Schnitt besitzt.

Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Atlas $\kappa_\alpha: U_\alpha \subseteq M \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir definieren einen Čech-Kozykel mit Werten in \mathbb{Z}_2 : Für $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ sei $\mu_{\alpha\beta}(x) := \text{sign det } D(\kappa_\beta^{-1} \circ \kappa_\alpha) \in \mathbb{Z}_2$. (Man überprüft direkt die Kozykelbedingung.) Nach Satz I.3.10 definiert $\mu_{\alpha\beta}$ damit ein \mathbb{Z}_2 -Hauptfaserbündel - das *Orientierungsbündel* über M .

Übungsaufgabe 32. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\pi: E \rightarrow M$ das Orientierungsbündel über M . Zeigen Sie, dass E genau dann zusammenhängend ist, wenn M nicht orientierbar ist. Folgern Sie daraus, dass eine einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit (also $\pi_1(M) = 0$) orientierbar ist.

Übungsaufgabe 33. (i) Haben wir einen Zusammenhang Q auf einem G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ gegeben, definieren wir $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_pP$. Das definiert ein $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und sieht, dass $R_g^*\omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ für alle $g \in G$, d.h. $\omega_{p \cdot g}(d_p R_g(Z)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$ für alle $p \in P$ und $Z \in T_pP$, denn:

warum?

Ein $Z \in T_pP$ hat immer die Form $\tilde{X}(p) + Y$ mit $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_pP$. Damit ist

warum?

$$\begin{aligned} (R_g^*\omega)_p(Z = \tilde{X}(p) + Y) &= \omega_{p \cdot g}(d_p R_g(\tilde{X}(p) + Y)) \\ &= \omega_{p \cdot g}(\widetilde{\text{Ad}(g^{-1})X(p) + d_p R_g(Y)}) \quad \text{da } \widetilde{d_p R_g(\tilde{X}(p))} = \widetilde{\text{Ad}(g^{-1})X(p)} \text{ und } d_p R_g \text{ } \\ &= \text{Ad}(g^{-1})X \quad \text{da } \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \text{Ad}(g^{-1})\omega_p(Z). \end{aligned}$$

Ein Element $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, für welches $\omega(\tilde{X}) = X$, wobei \tilde{X} das fundamentale Vektorfeld zu $X \in \mathfrak{g}$ ist, und $R_g^*\omega = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ gilt, nennt man *Zusammenhangsform* dem G -Hauptfaserbündel $\pi: P \rightarrow M$. Wir haben also oben aus einem Zusammenhang eine Zusammenhangseinsform konstruiert. Andersherum gehört zu einer Zusammenhangseinsform auch wieder einen Zusammenhang:

$$u \in P \mapsto Q_uP := \ker \omega_u$$

Wir wollen zeigen, dass diese Zuordnung wirklich einen Zusammenhang definiert:

$T_pP = Q_pP \oplus T_pP_{\pi(p)}$: Sei $Y \in Q_pP \cap T_pP_{\pi(p)}$. Dann ist Y der Wert eines fundamentalen Vektorfeldes, also $Y = \tilde{X}(p)$ für ein $X \in \mathfrak{g}$. Wegen $\omega(\tilde{X}) = X$ folgt damit $X = 0$ und damit auch $Y = 0$. Da ω_p nach Definition surjektiv ist, folgt aus _____

Rechtsinvarianz: Ist $Y \in Q_pP$, dann ist $d_p R_g(Y) \in \underline{\hspace{2cm}}$, denn:

$$\omega_{p \cdot g}(d_p R_g(Y)) = (R_g^*\omega)(Y) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega(Y)) = 0.$$

Glattheit: Sei $p \in P$, x^1, \dots, x^n Koordinaten auf U um p und a_1, \dots, a_k eine Basis von \mathfrak{g} . Dann hat $Y \in T_pP$ die Form $Y = Y^i \partial_{x^i}|_p$ für $Y^i \in \underline{\hspace{2cm}}$. Da ω glatt ist, gibt es $\omega_i^j \in C^\infty(\underline{\hspace{2cm}})$ mit $\omega(\partial_{x^i}) = \omega_i^j a_j$. Damit ist $Y \in \ker \omega$ genau dann, wenn _____ = 0 für alle $j = 1, \dots, k$. Die Lösungen Y^i hängen glatt von p ab, weswegen $\ker \omega$ durch glatte Vektorfelder aufgespannt wird.

Damit folgt, dass obige Zuordnung wirklich ein Zusammenhang ist. Weiterhin sind beide Zuordnungen $Q \mapsto \omega$ und $\omega \mapsto Q = \ker \omega$ invers zueinander, da _____

(ii) Sei $\Phi: G \times M \rightarrow M$ eine Rechtswirkung auf M , $x(t)$ eine Kurve in M mit $x(0) = x$ und $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = g$. Sei $z(t) = \Psi(g(t), x(t)) = x(t) \cdot g(t)$. Wir rechnen nach, dass

$$\dot{z}(0) = d_x R_g(\dot{x}(0)) + \overbrace{d_g L_{g^{-1}}(\dot{g}(0))}^{\text{}}(x \cdot g)$$

gilt: Es ist $T_{(g,x)}(G \times M) \cong T_x M$ _____ und wir haben

$$\begin{aligned} \dot{z}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(g(t), x(t)) = d_{(g,x)} \Psi(\dot{g}(0), \dot{x}(0)) \\ &= d_{(g,x)} \Psi(\dot{g}(0), 0) + d_{(g,x)} \Psi(0, \dot{x}(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(\underline{\hspace{2cm}}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(\underline{\hspace{2cm}}) \\ &= d_g \Psi_x(\dot{g}(0)) + \underline{\hspace{2cm}}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\tilde{X}(x \cdot g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\underline{\hspace{2cm}}) = d_g \Psi_x \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \cdot \exp(tX)) \right) = d_g \Psi_x(\underline{\hspace{2cm}}).$$

Zusammen mit $X = \underline{\hspace{2cm}} \in T_1 G \cong \mathfrak{g}$ folgt $X(g) = \dot{g}(0)$ und damit zusammen mit (B.1) die Behauptung.

Übungsaufgabe 34. Sei $E \rightarrow M$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang r mit Zusammenhang ∇^E und Krümmung F . Sei D wie in Definition I.2.44. Zeigen Sie, dass die erste Bianchi-Identität $DF = 0$ gilt. Was hat das bzw. hat das was mit der Bianchi-Identität für Krümmungen auf Hauptfaserbündeln und dem D dort, vgl. Seite 47, zu tun?

Übungsaufgabe 35. Sei $E := P \times_{\rho} V$ ein zu G -Hauptfaserbündel P und zu $\rho: G \rightarrow \text{Gl}(V)$ assoziiertes Vektorbündel. Sei ω eine Zusammenhangseinsform auf P . Finden Sie eine Zuordnung 'Zusammenhang auf P ' \mapsto 'Zusammenhang auf E ', die im Falle von $P = \text{GL}(E)$ invers zu unserer Konstruktion von Abschnitt I.3.5.1 ist. Ist die Zuordnung immer bijektiv?

Übungsaufgabe 36. (i) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und φ_t der Fluss von X , d.h. $X(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t(x))$. Wir zeigen, dass

$$[X, Y](x \in M) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\varphi_t(x)} \varphi_{-t}(Y(\varphi_t(x))).$$

Beweis. Taylorentwicklung ergibt $f \circ \varphi_t(x) = f(x) + th_t(x)$ mit $h_0(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ und damit

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\underline{\hspace{2cm}}} (f \circ \varphi_{-t})(Y(\varphi_t(x))) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\underline{\hspace{2cm}}} (f \circ \varphi_{-t})(Y(\varphi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d_{\underline{\hspace{2cm}}} f(Y(\varphi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} - d_{\underline{\hspace{2cm}}} (Y(\varphi_t(x))) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{Y(f) \circ \varphi_t - Y(f)}{t} - Y(\underline{\hspace{2cm}}) \circ \underline{\hspace{2cm}} \right) (x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(f) \circ \varphi_t(x) - Y(h_0(x)) = \left(\underline{X(Y(f))} - \underline{\hspace{2cm}} \right) (x) \quad \text{warum?} \\ &= [X, Y](f)(x). \end{aligned}$$

□

(ii) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und φ_t der Fluss von X . Sei $\psi: M \rightarrow N$. Dann ist $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ der Fluss von $\psi_* X$

B. Übungsaufgaben

warum?

und wir haben mit Übungsaufgabe 21.i

$$\begin{aligned}
 [\psi_*X, \psi_*Y](f) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\psi^{-1}(x)} (f \circ \psi \circ \varphi_{-t} \circ \psi^{-1})(\varphi_t(\psi^{-1}(x))) \\
 &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\psi^{-1}(x)} (f \circ \psi \circ \varphi_{-t} \circ \psi^{-1}) \right) (\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(x)) \\
 &= (Y(f \circ \psi \circ \varphi_{-t}))(\varphi_t(\psi^{-1}(x))) \\
 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\psi^{-1}(x)} (f \circ \psi \circ \varphi_{-t})(Y(\varphi_t(\psi^{-1}(x)))) \\
 &= (\psi_*[X, Y])(f).
 \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für einen Liealgebrenhomomorphismus $\lambda: G \rightarrow H$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ zeigt: $[\lambda_*X, \lambda_*Y] = \lambda_*[X, Y]$ mit λ_* wie in Lemma A.1.18.

- (iii) Sei $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit gegebenem Zusammenhang. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $Y = \text{hor}(Y) \in \mathfrak{X}(P)$. Dann ist $[\tilde{X}, Y]$ auch ein horizontales Vektorfeld.

warum?

Beweis. Der Fluss von \tilde{X} ist durch $\varphi_t(p) = p \cdot \exp(tX)$ gegeben. Nach (i) ist dann

$$\begin{aligned}
 [\tilde{X}, Y](p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\varphi_t(p)} \varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p))) \\
 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{d_{p \cdot \exp(tX)} R_{\exp}^{-1}}_{=: \gamma(t)} (Y(p \cdot \exp(tX)))
 \end{aligned}$$

Da Y horizontal ist und für den Zusammenhang $d_p R_g(Q_p P) = \text{hor}(Y)$ gilt, ist $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(t) \in \text{hor}(Y)$ und damit $[\tilde{X}, Y]$ selbst horizontal. \square

Übungsaufgabe 37. (i) Sei $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ gebildet aus dem E - und B -Feld $\vec{E}, \vec{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, wie in Abschnitt I.4.1. Sei $A = (\varphi, \vec{A})^b \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ mit $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\vec{A} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass lokal genau dann $F = dA$ ist, wenn $\vec{E} = -\text{grad}_{\vec{x}}\varphi + \partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ist.

- (ii) (Elektrischer Monopol) Auf $\mathbb{R} \times \{V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachten wir $\vec{E}(t, \vec{x}) := \frac{q}{r^3} \vec{x}$, wobei $r = |\vec{x}|$ ist, und $\vec{B}(t, \vec{x}) = 0$. Rechnen Sie nach, dass $\vec{E} = -\text{grad}_{\vec{x}}\varphi$ für ein globales $\varphi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ ist und dass \vec{E} und \vec{B} die homogenen Maxwellgleichungen auf U erfüllt.

- (iii) (Magnetischer Monopol) Auf $U := \mathbb{R} \times \{V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachten wir $\vec{B}(t, \vec{x}) := \frac{q}{r^3} \vec{x}$, wobei $r = |\vec{x}|$ ist, und $\vec{E}(t, \vec{x}) = 0$. Wieder sind die Maxwellgleichungen auf U erfüllt. Sei $U_\pm := \mathbb{R} \times \{V_\pm = \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm z \geq 0\}\}$. Finden Sie \vec{A}_\pm mit $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_\pm$ auf U_\pm . Zeigen Sie, dass sich $\vec{A}_+ - \vec{A}_- = \text{grad}_{\vec{x}}\chi$ für ein $\chi: V_+ \cap V_- \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Wann gibt es dann ein S^1 -Hauptfaserbündel über U mit glatter Übergangsfunktion $\mu_{+-}(t, \vec{x}) = e^{i\chi(\vec{x})}$ zusammen mit einem Zusammenhang ω , der lokal gleich iA_\pm ist? Schränken Sie die zugehörige lokale Krümmungsform Ω auf die S^2 ein und integrieren diese über S^2 . *

Übungsaufgabe 38. Wir betrachten das Hopfbündel $S^3 \rightarrow S^2$. Das ist ein $S^1 = U(1)$ -Hauptfaserbündel und damit $\mathfrak{g} \cong i\mathbb{R}$. Sei $p \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und $X = i \in \mathfrak{g}$. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das reelle Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Wir setzen $\omega_p(Y \in T_p S^3 \subseteq \mathbb{R}^4) := i\langle Y, ip \rangle$. Rechnen Sie nach, dass

- (i) $\tilde{X}(p) = ip$ und
 (ii) $\omega \in \Omega^1(S^3, i\mathbb{R})$ ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel ist.

*Dieses Integral ist bis auf eine universelle Konstante die erste Chernzahl des entsprechenden $U(1)$ -Hauptfaserbündel über S^2 . Diese Zahl ist eine topologische Invariante des Bündels und hängt nicht vom gewählten Zusammenhang ab.

Übungsaufgabe 39. Wir identifizieren $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ – den Quaternionen und $SU(2)$ mit der symplektischen Gruppe $Sp(1) := \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ durch

$$\iota: x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in Sp(1) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \\ x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Wir kürzen ab: $dx = dx^1 + idx^2 + jdx^3 + kdx^4$ und $d\bar{x} = dx^1 - idx^2 - jdx^3 - kdx^4$. Sei $P = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$ das triviale $SU(2)$ -Hauptfaserbündel über $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Wir betrachten lokale Zusammenhangsformen A (und Krümmungsformen F) im folgenden immer bzgl. der kanonischen Trivialisierung von P – also ist $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2))$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Liealgebra von $Sp(1)$ gleich $\mathfrak{sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} q = 0\}$ ist.
- (ii) Wir setzen

$$A_{x \in \mathbb{H}} := \operatorname{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} \right).$$

Warum definiert A einen Zusammenhang auf P ? Rechnen Sie nach, dass $*F = F$ für die zugehörige Krümmungsform gilt.

- (iii) Für $\mu \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{H}$, setzen wir $\Phi_{\mu,b}(y \in \mathbb{H}) = \mu(y - b)$ und $A_{\mu,b} = \Phi_{\mu,b}^* A$. Berechnen Sie die zugehörige Krümmungsform und folgern Sie, dass auch $A_{\mu,b}$ einen selbstdualen Zusammenhang definiert.
- (iv) Zeigen Sie, dass für verschiedene (μ, b) die lokalen Zusammenhangsformen $A_{\mu,b}$ nicht zu eichäquivalenten Zusammenhängen auf P gehören. (Hinweis: Benutzen Sie die Ad-Invarianz der Killingform auf $SU(2)$ und die Transformationsformel für (lokale) Krümmungsformen bei Wechsel der lokalen Trivialisierung bzw. Eichtransformationen.)

Übungsaufgabe 40. Sei (M, g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\tilde{g} = f^2 g$ mit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine zu g konforme Metrik. Sei $*_g$ bzw. $*_{\tilde{g}}$ der zu g bzw. \tilde{g} gehörige Hodge-Stern-Operator. Rechnen Sie die Wirkung von \tilde{g} in die von g um. Folgern Sie damit, dass eine Lösung der Yang-Mills-Gleichung eines Hauptfaserbündels P über (M, g) auch eine Lösung auf P über (M, \tilde{g}) ist.

Übungsaufgabe 41. (i) Zeigen Sie, dass

$$\sigma_\ell(P)(x, \xi)z = \frac{i^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ sowie $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist und berechnen Sie das Hauptsymbol der äußeren Ableitung $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

- (ii) Rechnen Sie folgende Formeln für den formalen adjungierten Operator $\delta := d^\dagger$ bzgl. einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) nach.
 - $\delta = (-1)^{km-1} * d*$ (Benutzen Sie, dass $\int_M d\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Omega_c^{m+1}(M) := \Gamma_c(\Lambda^{m+1} M)$ gilt (Satz von Stokes)).
 - In geodätischen Normalkoordinaten x^i um p gilt im Punkt p die Formel $\delta\alpha = -\iota_{e_j} \nabla_{e_j} \alpha$, wobei $e_i = \partial_{x^i}|_p$ und ∇ der vom Levi-Civita Zusammenhang induzierte Zusammenhang ist. (Hierbei ist ι das innere Produkt, welches durch $(\iota_X \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1})$ für alle $X, X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$ definiert ist, vgl. Tabelle I.2).

Übungsaufgabe 42. Sei T^2 der zweidimensionale Torus, aufgefasst als $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ mit identifizierten Seiten und ausgestattet mit flacher Metrik $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$.

- (i) Benutzen Sie Fourierreihen um zu sehen, für welche $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Laplacegleichung $\Delta u = f$ eine Lösung besitzt.
- (ii) Probieren Sie den gleichen Ansatz für $(-\partial_{x^1}^2 + \partial_{x^2}^2)u = f$ aus.
- (iii) Was sind die Eigenwerte λ und zugehörigen Eigenfunktionen u_λ von Δ auf T^2 , d.h. für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es ein $u_\lambda \in C^\infty(T^2)$ mit $\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda$?

B. Übungsaufgaben

- (iv) Lösen Sie die Wärmeleichung unter Nutzung des Ansatzes $u(x, t) = \sum a_j(t)u_j(x)$ (für u_j Eigenfunktionen von ∇) und schreiben Sie diese als $u(x, t) = \int_{T^2} H(x, y, t)f(y)dy$ für geeignetes H . Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

Übungsaufgabe 43. (i) Der Laplaceoperator Δ einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) sei der Operator Δ dessen Wert Δu für $u \in C^\infty(M)$ durch

$$\int_M g(du, d\varphi) d\text{vol}_g = - \int_M \varphi \Delta u d\text{vol}_g$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$ definiert ist. Berechnen Sie den Laplaceoperator in lokalen Koordinaten.

- (ii) Überprüfen Sie, dass der Zusammenhang $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ eines Vektorbündels $E \rightarrow M$ ein Differentialoperator erster Ordnung ist und bestimmen Sie auch hier das Hauptsymbol. Sei $E \rightarrow M$ über (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Zusammenhang $\nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$. Berechnen Sie die lokale Darstellung von $(\nabla^E)^\dagger: \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(E)$ und $(\nabla^E)^\dagger \nabla^E$.

Übungsaufgabe 44. Zeigen Sie, dass es für jeden skalare Differentialoperator $P: C^\infty(M, \mathbb{R})$ erster Ordnung ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gibt, so dass $Pu = X(u) + fu$ für alle $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt.

Übungsaufgabe 45. Wir betrachten $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Metrik. Für eine Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ setzen wir $\hat{f}(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\Delta_{S^n} f = (\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f})|_{S^n}$ und $(\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f})(x) = |x|^{-2}(\Delta_{S^n} f)\left(\frac{x}{|x|}\right)$ gilt.
- (ii) Berechnen Sie $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n}$ (Hier ist $r = |x|$).
- (iii) Sei $g \in C^\infty(S^n)$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}(r^\nu g) = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ genau dann gilt, wenn g eine Eigenfunktion von Δ_{S^n} zum Eigenwert $\lambda = \nu(\nu + n - 1)$ ist.
- (iv) Folgern Sie, dass falls g eine Eigenfunktion zu λ von Δ_{S^n} ist, dass Sie $\nu \geq 0$ wählen können und Sie $r^\nu g$ damit zu einer stetigen Funktion auf \mathbb{R}^{n+1} fortsetzen können.
- (v) Folgern Sie, dass in der Situation von (iv) $r^\nu g$ sogar glatt auf \mathbb{R}^{n+1} ist und zeigen Sie (z.B. durch Einschränken auf eine Ursprungsgerade), dass dann $\nu \in \mathbb{N}$ sein muss.

Also muss ein Eigenwert von Δ_{S^n} , die Form $\lambda = k(k + n - 1)$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ haben. *

Übungsaufgabe 46. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Krümmungstensor R .

- (i) Wir betrachten geodätische Normalkoordinaten x^i um p . Sei $e_i = \partial_{x^i}|_p$. Berechnen Sie mit Hilfe von Übungsaufgabe 41.ii, dass

$$\Delta = -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - (e_i)^\flat \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j)$$

für den Hodge-Laplace auf k -Formen gilt.

- (ii) Folgern Sie, dass für einen beliebigen Orthonormalrahmen e_i um p

$$\Delta = -\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} - (e_i)^\flat \wedge \iota(e_j) R(e_i, e_j)$$

gilt.

- (iii) Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ harmonisch, also $\Delta \alpha = 0$. Sei $|\alpha|_g^2 := g(\alpha, \alpha)$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta |\alpha|_g^2 = 2|\nabla \alpha|^2 + 2\text{Ric}(\alpha^\flat, \alpha^\flat)$$

gilt.

- (iv) Folgern Sie, dass auf jeder geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung, jede harmonische 1-Form α parallel ist (d.h. $\nabla \alpha \equiv 0$). Ist weiterhin die Ricci-Krümmung sogar positiv, gibt es gar keine harmonischen 1-Formen. (Hinweis: Nutzen Sie, dass nach dem Satz von Gauß $\int_M \Delta f \, d\text{vol}_g = 0$ ist.)

Übungsaufgabe 47. Sei (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die Gleichung $\Delta u = h e^u$ mit $h \in C^\infty(M)$, $h \not\equiv 0$. Zeigen Sie:

- (i) Damit die obige Gleichung für u eine Lösung hat, muss h das Vorzeichen wechseln und $\int_M h \, d\text{vol}_g < 0$ sein.
- (ii) Ist u eine Lösung, dann gilt $\int_M h e^u \, d\text{vol}_g = 0$.
- (iii) Aus $\Delta v = 0$ folgt $v = \text{const}$. Deshalb gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $v \in H^1$ mit $\int_M v \, d\text{vol}_g = 0$ die Poincaré Ungleichung $\|v\|_{L^2} \leq c \|\nabla v\|_{L^2}$ gilt.
- (iv) Der Raum $F = \{v \in H^1 \mid \int_M h e^v \, d\text{vol}_g = 0, \int_M v \, d\text{vol}_g = 0\}$ ist nichtleer.
- (v) Betrachten Sie $J: F \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \int_M |\nabla v|^2 \, d\text{vol}_g$. Wir setzen $a := \inf_{v \in F} J(v)$. Sei $v_i \in F$ eine Folge mit $J(v_i) \rightarrow a$. Zeigen Sie, dass v_i in H^1 beschränkt ist und damit in L^4 gegen ein v konvergiert. Folgern Sie, dass e^{v_i} in L^2 gegen e^v konvergiert und damit $v \in F$ liegt. Zeigen Sie weiterhin, dass der Limes v erfüllt $J(v) = a$.

*Das sind auch wirklich alle Eigenwerte, vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics.

B. Übungsaufgaben

- (vi) Nutzen Sie Lagrange-Multiplikation*, um zu zeigen, dass v eine schwache Lösung von $2\Delta u = f := -\lambda h e^v - \mu$ ist. D.h. betrachten Sie $\tilde{F}(v + \epsilon\varphi) := \int_M (|\nabla(v + \epsilon\varphi)|^2 + \lambda h e^{v+\epsilon\varphi} + \mu(v + \epsilon\varphi)) \, \text{dvol}_g$ für $\varphi \in H^1$ und berechnen Sie $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \tilde{F}(v + \epsilon\varphi)$.
- (vii) Benutzen Sie, L^p und Schauder-Abschätzungen induktiv, um zu zeigen, dass $v \in C^\infty(M)$ ist.
- (viii) Zeigen Sie, dass $\mu = 0$ und $\lambda < 0$ sein muss.

Setzen Sie alles obige zusammen, um zu folgern, dass $\Delta u = h e^u$ für $h \in C^\infty(M)$, $h \neq 0$ und h erfülle die Bedingungen aus (i) eine glatte Lösung $u \in C^\infty(M)$ besitzt.

Übungsaufgabe 48. Sei (M, g) eine zweidimensionalen orientierte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Gaußkrümmung K_g von (M, g) ist gleich der Hälfte der Skalarkrümmung. Sei $\chi(M)$ die Eulercharakteristik.† Man kann nachrechnen, dass

$$K_{\tilde{g}} = e^{-2u}(K_g - \Delta_g u)$$

für $\tilde{g} = e^{2u}g$ gilt. Ab jetzt sei $\chi(M) = 0$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung einer Metrik g auf M entweder konstant Null sein muss oder das Vorzeichen wechseln muss.
- (ii) Zeigen Sie, dass $\Delta_g v = K_g$ eine glatte Lösung besitzt und es damit eine zu g konforme Metrik mit $K_{\tilde{g}} \equiv 0$ gibt.
- (iii) Sei von nun an $K \in C^\infty(M)$, wobei K das Vorzeichen wechselt. Zeigen Sie, dass für alle Riemannschen Metriken h auf M und alle Funktionen $a \in C^\infty(M)$ es einen Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ gibt, so dass $\int_M e^a(K \circ \varphi) \, \text{dvol}_h < 0$ gilt.
- (iv) Wir wollen nun untersuchen, ob es auch eine Metrik \tilde{g} auf M mit $K_{\tilde{g}} \equiv K$ gibt. Unser Ansatz ist $\tilde{g} = e^{2u}\varphi^*g$ für geeignetes u und einen geeigneten Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$. Wir setzen dazu $\tilde{g} = \varphi^*g$ und $w := 2(u - v)$ mit $\Delta_{\tilde{g}}v = K_g \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass, falls u die Gleichung (??) für φ^*g statt g ist, dann w eine Lösung von $\Delta_{\tilde{g}}w = h e^w$ für geeignetes $h \in C^\infty(M)$ ist. Benutzen Sie Übungsaufgabe 47 um zu folgern, dass ein solche Lösung w und damit ein glattes u existiert, so dass $K_{\tilde{g}} \equiv K$ gilt.

Übungsaufgabe 49. Sei (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass durch $\text{cl}(\omega) = \omega \wedge \cdot - \iota_{\omega^\#}$. für $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ eine Cliffordmultiplikation gegeben ist und diese $\Lambda^*M := \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k M$ mit der induzierten Bündelmetrik und dem induzierten Zusammenhang zu einem Cliffordbündel macht für welches der de-Rham Operator aus Beispiel II.3.32 der zugehörige Diracoperator ist.

Übungsaufgabe 50. Zeigen Sie, dass $\tau: a \in \Lambda^2(V) \mapsto (v \mapsto [a, v] := \mathbf{c}(a)\text{cl}(v) - \text{cl}(v)\mathbf{c}(a)) \in \text{Hom}(V, \text{Cl}(V))$ ein Isomorphismus aufs Bild $\mathfrak{o}(V) \subseteq \text{Hom}(V, V) \subseteq \text{Hom}(V, \text{Cl}(V))$ ist.

Übungsaufgabe 51. (i) Zeigen Sie, dass $C^2(V) := \mathbf{c}(\Lambda^2 V) \subseteq C(V)$ ist unter der Lieklammer von $C(V)$ abgeschlossen ist.

- (ii) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei $A \in \Lambda^2 \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis e_i von V gibt, so dass $A = \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_j e_{2j-1} \wedge e_{2j}$ ist. Berechnen Sie $\exp_C \mathbf{c}(A)$.

Übungsaufgabe 52. Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow M$ ein Diracbündel. Sei D der zugehörige Diracoperator. Dann hat nach Satz II.3.26 D^2 eine Basis aus orthonormalen Eigenfunktionen φ_j zu Eigenwerten λ_j . Wir setzen $\psi_j := D\varphi_j$. Zeigen Sie, dass dann

- (i) $\ker D = \ker D^2$ gilt.
- (ii) $D(v_j^\pm := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j \pm \varphi_j) = \pm \sqrt{\lambda_j} v_j^\pm$ für $\lambda_j \neq 0$ gilt.
- (iii) Es gilt $D^2 \psi_j = \lambda_j \psi_j$.
- (iv) Finden Sie mittels (i)-(iii) eine Basis von $L^2(E)$ aus orthonormalen Eigenfunktionen von D .

*=Methode um kritische Punkte unter Nebenbedingungen zu finden

† $\chi(M) = 2 - 2 \cdot \text{Anzahl der Löcher}$. Es gilt der Satz von Gauß-Bonnet: $\int_M K_g \, \text{dvol}_g = 2\pi\chi(M)$.

Literaturverzeichnis

- [1] BAUM, H. *Eichfeldtheorie, Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] DUMITRESCU, F. Another look at connections. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 127 (2012), 99–105.
- [3] GROSSE, N. Differentialgeometrie I. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/DiffGeo_WS1617_Skript.pdf.
- [4] HIRZEBRUCH, F. *Topological methods in algebraic geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.
- [5] JÄNICH, K. *Topologie*, third ed. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [6] KAROUBI, M. *K-theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. An introduction, Reprint of the 1978 edition, With a new postface by the author and a list of errata.
- [7] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [8] MEINRENKEN, E. *Clifford algebras and Lie theory*, vol. 58 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [9] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980. Functional analysis.
- [10] WALSCHAP, G. *Metric structures in differential geometry*, vol. 224 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2004.