

# Differentialgeometrie I

Universität Freiburg, WS 2016/17  
Nadine Große

Skript - Version vom 14. November 2017

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
I.1. Untermannigfaltigkeiten	1
I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum	7
I.2.1. Abbildung mit Werten in $M$	7
I.2.2. Tangentialvektoren und Tangentialraum	8
I.2.3. Abbildungen von $M$ aus	10
I.2.4. Orientierbarkeit von Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$	12
I.2.5. Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten und Tangentialabbildung	12
I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten	13
I.3.1. Tangentialraum und Tangentialabbildung	16
I.3.2. Ist der Begriff der Mannigfaltigkeit wirklich allgemeiner?	21
I.3.3. Konstruktion von Mannigfaltigkeiten - Produkte und Quotienten	22
<b>II. (Semi-)Riemannsche Geometrie</b>	<b>25</b>
II.1. Semi-Riemannsche Metriken	25
II.2. Ableitung von Vektorfeldern - Levi-Civita-Zusammenhang	30
II.3. Bewegungsgleichungen	35
II.4. Geodätische	37
II.5. Parallelverschiebung	40
II.6. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen	42
II.7. Krümmung	46
II.8. Die Exponentialabbildung	49
II.9. Jacobifelder	51
II.10. Mehr zur Riemannschen Geometrie	55
II.10.1. Injektivitätsradius	55
II.10.2. Vollständigkeit	57
II.10.3. Zweite Variation des Energiefunktionals	59
II.10.4. Satz von Bonnet-Myers	60
II.10.5. Weitere Beispiele für Sätze der Vergleichsgeometrie	61
II.11. Einsteingleichungen	62
II.11.1. (r,s)-Tensoren	62
II.11.2. Allgemeine Relativitätstheorie	67
<b>A. Wdh: Lineare Abbildungen und Bilinearformen</b>	<b>75</b>
<b>B. Lichtablenkung</b>	<b>77</b>
<b>C. Ableitung der Schwarzschildlösung mittels des Computeralgebrasystems Maxima</b>	<b>79</b>
<b>D. Übungsaufgaben</b>	<b>83</b>
<b>Literatur</b>	<b>95</b>



# I. Mannigfaltigkeiten

## I.1. Untermannigfaltigkeiten

Vorl. 1

**Definition I.1.1.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $m \leq n$ . Dann heißt  $M$  *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$ , falls es für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und eine glatte\* Abbildung  $F: U \rightarrow V$  gibt, so dass gilt:

i)  $F(U) = M \cap V$  und  $F: U \rightarrow M \cap V$  ist ein Homöomorphismus†.

ii) Die Jacobimatrix

$$D_u F = \left( \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u^1}(u) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u^m}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u^1}(u) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u^m}(u) \end{pmatrix} \quad (n \times m - \text{Matrix})$$

hat für alle  $u = (u^1, \dots, u^m)^T \in U$  maximalen Rang, also Rang  $m$  (wobei  $F(u) = (F_1(u), \dots, F_n(u))^T$ ).

Die Abbildung  $F$  heißt *lokale Parametrisierung* von  $M$ . Die Umkehrabbildung  $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$  nennt man *Karte* von  $M$ . Man nennt  $n - m$  die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit und  $u = (u^1, \dots, u^m)^T$  *lokale Koordinaten* von  $M$ .

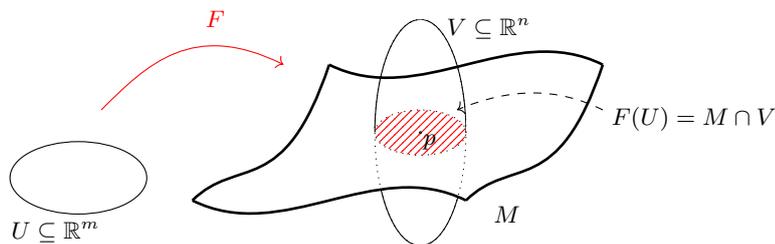


Abb. I.1.: lokale Parametrisierung

### Beispiel I.1.2.

1. Ebene  $H$  im  $\mathbb{R}^3$ :

Die Ebene  $H$  gehe durch den Punkt  $p \in \mathbb{R}^3$  und werde durch die linear unabhängigen Vektoren  $X_1, X_2$  aufgespannt:

$$H = \{p + u^1 X_1 + u^2 X_2 \mid u^i \in \mathbb{R}\}.$$

Hier reicht eine Parametrisierung

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto p + \sum_i u^i X_i.$$

Dabei ist  $F$  offensichtlich glatt und ein Homöomorphismus aufs Bild  $F(\mathbb{R}^2) = H$  und

$$D_u F = (X_1, X_2)$$

hat Rang 2, da die Vektoren linear unabhängig sind.

\*glatt = unendlich oft differenzierbar

†Homöomorphismus = stetige Abbildung, die eine stetige Umkehrabbildung besitzt

I. Mannigfaltigkeiten

2.  $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ : Beispiele für verschiedene lokale Parametrisierung um  $(0, 1)^T$ :

a) (Mittels Winkeln)

$$F: (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)^T\}), \quad \alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

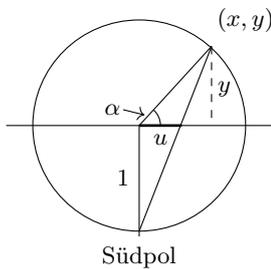
( $D_\alpha F = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$  hat Rang 1) Hier ist  $F$  sogar für alle  $p \in S^1 \setminus \{(0, -1)^T\}$  eine lokale Parametrisierung. Um  $\{(0, -1)^T\}$  kann man ganz analog eine Parametrisierung bauen. Also ist  $S^1$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

b) (Mittels Auflösung)

$$F: (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \{(x, y) \mid y > 0\}, \quad x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})^T$$

( $D_x F = (1, \partial_x \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^T$  hat Rang 1) Analog erhält man mittels  $F: (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \{(x, y)^T \mid y < 0\}, \quad x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2})^T$ . Damit hat man schon um alle Punkte in  $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T, (1, 0)^T\}$  eine lokale Parametrisierung (vgl. Präsenzübungsblatt). Auflösen nach  $y$  (statt  $x$  wie bisher) liefert dann ganz analog lokale Parametrisierungen für die verbleibenden Punkte.

c) (Mittels stereographischer Projektion)



$$F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto (x = \sin \alpha, y = \cos \alpha)^T$$

Mittels ähnlicher Dreiecke erhalten wir  $\frac{y}{1} = \frac{x-u}{u}$ . Zusammen mit  $x^2 + y^2 = 1$  ergibt sich  $F(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^T$ . Nachrechnen von  $D_u F$  zeigt, dass  $F$  eine lokale Parametrisierung ist.

3. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und sei  $f: u = (u^1, \dots, u^m) \in U \rightarrow f(u) = (f^1, \dots, f^m) \in \mathbb{R}^k$  glatt. Dann ist der Funktionsgraph  $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$  eine Untermannigfaltigkeit, vgl. ÜA 1.(iii).

**Bemerkung I.1.3.**

ElemDiffgeo

(a) Def. einer regulären Fläche  $M =$  Existenz einer lokalen Parametrisierung  $F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $M = F(U)$ .

(b) Wir werden oft die Kurzschreibweise  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  verwenden. Das bedeutet, dass  $M$   $m$ -dimensional ist und nicht  $\underbrace{M \times \dots \times M}_{m\text{-mal}}$  – im Gegensatz zu  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$ .

In der Übung

(c) (LinAlg-Wdh) Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Jacobimatrix  $D_u f$  eine  $m \times n$ -Matrix, bzw. eine lineare Abbildung  $D_u f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ist  $D_u f$  injektiv (bzw. surjektiv), dann ist der Rang von  $D_u f$  gleich  $n$  (bzw.  $m$ ).

Im Falle von Definition I.1.1 ist  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $m \leq n$ . Damit bedeutet:  $D_u F$  habe maximalen Rang, dass  $D_u F$  injektiv sein muss. Man sagt, dazu dass  $F$  eine Immersion ist.

**Satz I.1.4.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent

a) (' $M$  ist lokal eine Immersion')  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

b) (' $M$  ist lokal ein Funktionsgraph') Für jedes  $p \in M$  existiert (ggf. nach Vertauschen der Koordinatenreihenfolge) eine offene Umgebung  $U \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$  von  $p$  und eine glatte Abbildung  $g: U \rightarrow W$  so dass

$$\forall (u, w) \in U \times W: (u, w) \in M \iff g(u) = w,$$

anders formuliert

$$M \cap (U \times W) = \text{Graph}(g).*$$

\*Vgl. 2.b) in Bsp. I.1.2

- c) ('M ist lokal eine Nullstellenmenge') Für jeden Punkt  $p \in M^m$  gibt es eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^{n=m+k}$  und eine glatte Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , so dass  $0 \in \mathbb{R}^k$  regulärer Wert ist und  $f^{-1}(0) = V \cap M$ .
- d) ('M ist lokal euklidisch') Zu jedem  $p \in M$  gibt es eine offene Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$  und einen Diffeomorphismus\*

$$\begin{aligned}
 h: V &\rightarrow W \\
 h(M \cap V) &= W \cap (\mathbb{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\}) \\
 &= \{h(p) \mid p \in M \cap V\}
 \end{aligned}$$

d.h. für  $p \in M \cap V$  gilt

$$h(p) = (h_1(p), \dots, h_m(p), 0, \dots, 0).$$

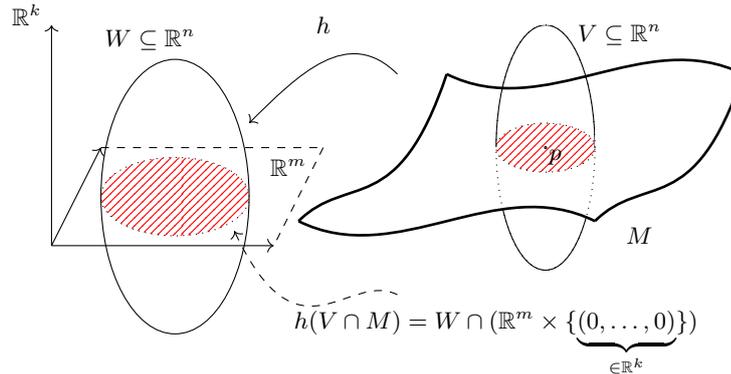


Abb. I.2.: 'M' ist lokal euklidisch

**Bemerkung I.1.5.** a) 0 ist regulärer Wert einer glatten Funktion  $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $k \leq n \stackrel{\text{def}}{<}$  für jeden Punkt  $x = (x^1, \dots, x^n) \in V$  mit  $f(x) = 0$  ist die Ableitung  $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$  (eine  $k \times n$ -Matrix) hat maximalen Rang.

Damit ist  $f$  eine *Submersion*, d.h.  $f$  ist glatt und  $D_x f$  ist surjektiv.

In der Übung

- b) Das Kriterium vom regulären Wert (Satz I.1.4.c) liefert schnell viele Beispiele für Untermannigfaltigkeiten, vgl. ÜA 1 und 2.

Bevor wir dann Satz I.1.4 vollständig beweisen, schauen wir uns einige Beispiele für die Verwendung von c) an.

**Beispiel I.1.6.** (Beispiele für die Anwendung von Satz I.1.4.c)

- i) Die  $m$ -dimensionale Sphäre  $S^m = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{j=1}^{m+1} (x^j)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  ist das Urbild  $S^m = f^{-1}(0)$  der Funktion  $f: \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x^1, \dots, x^{m+1}) = \sum_{j=1}^{m+1} (x^j)^2 - 1$ . Wegen

$$D_x f = \text{grad} f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}}(x) \right) = 2(x^1, \dots, x^{m+1}) = 2x^T$$

hat  $D_x f$  genau dann maximalen Rang, wenn  $x \neq 0$  ist. Da jedoch  $0 \notin f^{-1}(0)$  ist, ist 0 regulärer Wert von  $f$  und damit  $S^m = f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

- ii) Das Lorentz-Produkt auf  $\mathbb{R}^{n=m+1}$  ist ein indefinites Produkt definiert durch

**Vorl. 2**

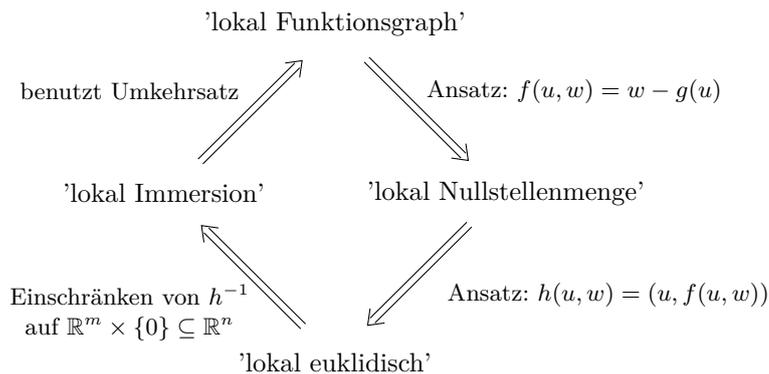
$$\langle x, y \rangle_L = -x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^{m+1} y^{m+1} \quad (\langle x, x \rangle_L = -(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{m+1})^2).$$

Der *Lichtkegel* ist definiert als  $C := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x \rangle_L = 0\}$ . Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \langle x, x \rangle_L$$

\*Diffeomorphismus = glatte Abbildung, die eine glatte Umkehrabbildung besitzt.

**Beweisschema zu Satz I.1.4.**



(wobei  $(u, w) \in U \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ ).

Abb. I.3.

und für  $c \in \mathbb{R}$  setzen wir  $M_c = f^{-1}(c)$ .

$$D_x f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}}(x) \right) = 2(-x^1, x^2, \dots, x^{m+1})$$

$D_x f$  hat maximalen Rang für alle  $c \neq 0$ , d.h. jeder Wert  $c \neq 0$  ist regulär.

Es folgt, dass

$$M_c = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \mid f(x) = c\}$$

eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{m+1}$  ist. Es bleibt die Frage für  $c = 0$ : Nur, weil  $D_x f$  hier

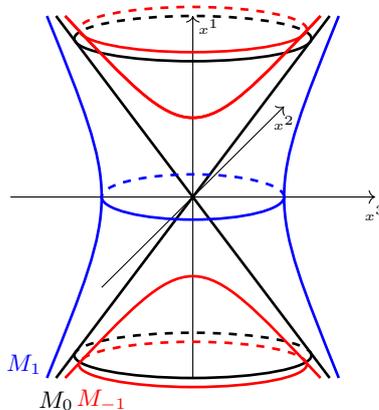


Abb. I.4.:  $M_0$  - Lichtkegel,  $M_1$  - einschaliges Hyperboloid,  $M_{-1}$  - zweischaliges Hyperboloid

nicht maximalen Rang hat, heißt das nicht, dass  $f^{-1}(0)$  nicht doch eine Untermannigfaltigkeit sein könnte, s. nächstes Beispiel.

**Satz I.1.7.**  $M_0 = f^{-1}(0)$  ist keine Untermannigfaltigkeit.

*Beweis.* Annahme:  $M_0$  ist eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes  $p \in M_0$  einen Homöomorphismus  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M_0 \cap V$  mit  $p \in V \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ . Wähle  $p = 0$  (denn dort ging das reguläre-Wert-Argument von oben schief). Sei  $u = F^{-1}(0)$ . Durch Verkleinerung von  $V$  und Translation von  $U$  können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $u = 0$  und  $U = B_\epsilon(0)$  für ein  $\epsilon > 0$  ist. Dann ist

$$F|_{U \setminus \{u\}}: U \setminus \{u\} = B_\epsilon(0) \setminus \{0\} \rightarrow (M_0 \setminus \{0\}) \cap V$$

noch immer ein Homöomorphismus. Wähle einen Punkt  $p_+ \in (M_0 \setminus \{0\}) \cap V \cap \{x^{m+1} > 0\}$  und analog einen Punkt  $p_- \in (M_0 \setminus \{0\}) \cap V \cap \{x^{m+1} < 0\}$ . Seien  $u_{\pm} := F^{-1}(p_{\pm})$ . Wir wählen eine Kurve  $c$  in  $U \setminus \{u\} = B_{\varepsilon}(0) \setminus \{0\}$  von  $u_+$  nach  $u_-$ . Dann muss wegen Stetigkeit auch  $F \circ c$  eine Kurve in  $(M_0 \setminus \{0\}) \cap V$  von  $p_+$  nach  $p_-$  sein. Eine solche Kurve gibt es nicht in  $M_0 \setminus \{0\}$ .\*  $\square$

iii)  $S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  Wir wissen schon, dass  $S^1$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Wählt man aber

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2,$$

dann ist zwar  $f^{-1}(0) = S^1$ , aber

$$D_{(x,y)^T} f = (2x(x^2 + y^2 - 1), 2y(x^2 + y^2 - 1))$$

ist die Nullmatrix für  $(x, y)^T \in S^1$ .

iv) Bis jetzt haben wir nur Beispiele von *Hyperflächen* (= Kodimension 1 Untermannigfaltigkeiten) betrachtet. Als nächstes kommt ein Beispiel mit höherer Kodimension:

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1)^T$$

Denn  $f$  ist glatt, Homöomorphismus auf Bild und

$$D_{(x,y,z)^T} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$ , also insbesondere für alle  $(x, y, z)^T \in M$ .

v) Die orthogonale Gruppe  $\mathbb{O}(n)$  enthält alle längenerhaltenden linearen Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{O}(n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear, } \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

also alle Drehungen um den Ursprung, alle Spiegelungen an Hyperebenen<sup>†</sup> durch den Ursprung und Hintereinanderausführungen davon. Sei  $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  die Menge der reellen  $n \times n$ -Matrizen und  $\text{Id}_n$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix. Falls  $A$  eine Matrixdarstellung von  $f$  ist, ist

$$\begin{aligned} \mathbb{O}(n) &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid AA^T = \text{Id}_n\}, \quad A = (a_{ij})_{i,j} \quad A^T = (a_{ji})_{i,j} \\ A \in \mathbb{O}(n) &\Rightarrow \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

**Satz I.1.8.** Die Gruppe  $\mathbb{O}(n)$  ist eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n^2}$  der Dimension  $\frac{n}{2}(n-1)$ .

*Beweis.* Wir betrachten

$$f: M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n), \quad A \mapsto f(A) = AA^T - \text{Id},$$

wobei  $\text{Sym}(n) = \{A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid A = A^T\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  die symmetrische Matrizen sind. Dann ist  $\mathbb{O}(n) = f^{-1}(0)$ . Wir müssen zeigen, dass  $0 \in \text{Sym}(n)$  ein regulärer Wert ist.

$$\begin{aligned} D_A f(H) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A + sH) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A + sH)(A + sH)^T - AA^T}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (AA^T + s(HA^T + AH^T) + s^2 HH^T - AA^T) \\ &= HA^T + AH^T. \end{aligned}$$

\*Man sagt  $M_0$  hat zwei Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponente = maximal zusammenhängende Teilmenge (wobei eine Teilmenge (weg-)zusammenhängend heißt, falls je zwei Punkte der Teilmenge durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können.) [Im Allgemeinen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend zwar verschiedene Begriffe. In unserer Situation fallen diese aber zusammen und es spielt nur wegzusammenhängend eine Rolle, vgl. [https://en.wikipedia.org/wiki/Connected\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space)]

<sup>†</sup>Eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^n$  ist ein Untervektorraum der Dimension  $n-1$ , z.B. Ursprungsgeraden im  $\mathbb{R}^2$ , Ursprungsebenen im  $\mathbb{R}^3$ , ...

## I. Mannigfaltigkeiten

Wir zeigen, dass  $D_A f: M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n)$  surjektiv ist, d.h. maximalen Rang hat. Sei  $A \in \mathbb{O}(n)$ ,  $S \in \text{Sym}(n)$ . Wir wählen  $H = \frac{1}{2}S(A^{-1})^T$ . Dann ist

$$\begin{aligned} D_A f(H) &= \frac{1}{2} D_A f \left( S(A^{-1})^T \right) = \frac{1}{2} \left( S(A^{-1})^T A^T + A \left( S(A^{-1})^T \right)^T \right) && \left( (AB)^T = B^T A^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( S \underbrace{(AA^{-1})^T}_{\text{Id}_n} + \underbrace{AA^{-1}}_{\text{Id}_n} \cdot S^T \right) = S. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathbb{O}(n)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  mit

$$\dim \mathbb{O}(n) = \dim M_{\mathbb{R}}(n, n) - \dim \text{Sym}(n) = n^2 - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n-1).$$

□

*Beweis von Satz I.1.4.* Sei  $\text{pr}_m$  (bzw.  $\text{pr}^m$ ):  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Projektion auf die ersten (bzw. letzten)  $m$  Koordinaten ( $n \geq m$ ).

'a)  $\implies$  b)' Sei  $p \in M$  beliebig und  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^{n=m+k}$  eine lokale Parametrisierung. O.B.d.A. habe  $V$  die Form  $V_1 \times V_2$  mit  $V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ . (Das kann durch Verkleinern von  $U$  immer erreicht werden.) Setze  $u := F^{-1}(p)$ . Da der Rang von  $D_u F$  gleich  $m$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$\det D_u(\text{pr}_m \circ F) = \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial u^j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Wir definieren  $\hat{F}: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  durch  $\hat{F} := \text{pr}_m \circ F = (F_1, \dots, F_m)$ . Wenden wir nun den Umkehrsatz auf  $\hat{F}$  an. Dann existiert eine offene Umgebung  $U' \subseteq U$  von  $u$  und  $V'_1 \subseteq V_1$  von  $\text{pr}_m(p) \in V_1$ , so dass die Einschränkung  $\hat{F}: U' \rightarrow V'_1$  ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen das Inverse mit  $\varphi: V'_1 \rightarrow U'$ . Wir definieren  $G := F \circ \varphi: V'_1 \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow F(U') \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} G(v) &= (F \circ \varphi)(v) = (\text{pr}_m(F(\varphi(v))), \text{pr}^k(F(\varphi(v)))) \\ &= (\hat{F}(\varphi(v)), \text{pr}^k(G(v))) = (v, \underbrace{(\text{pr}^k \circ G)(v)}_{=: g}). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $g: V'_1 \rightarrow \text{pr}^k(F(U')) := V'_2 \subseteq \mathbb{R}^k$  hat alle gewünschten Eigenschaften: Sei  $(v, w) \in V'_1 \times V'_2$  mit  $g(v) = w$ . Dann gilt

$$(v, w) = (v, g(v)) = G(v) = F(\varphi(v)) \in F(U') \subseteq F(U) = M \cap V \subseteq M.$$

Sei andererseits  $(v, w) \in M \cap (V'_1 \times V'_2)$ . Da  $F: U' \rightarrow V'_1 \times V'_2$  ein Homöomorphismus ist, existiert genau ein  $u \in U'$  mit  $(v, w) = F(u)$ . Also ist  $v = \hat{F}(u)$  und  $\varphi(v) = u$ . Damit gilt

$$(v, w) = F(u) = F(\varphi(v)) = G(v) = (v, g(v)),$$

also  $g(v) = w$ .

'b)  $\implies$  c)': Sei  $g: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $p \in U \times W$  wie in b). Wir definieren  $f: V := U \times W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  durch

$$f(u, w) := w - g(u).$$

Dann ist  $f^{-1}(0) = \text{Graph}(g) = M \cap (U \times W)$ . Außerdem ist

$$\underbrace{D_{(u,w)} f}_{k \times n\text{-Matrix}} = \left( - \underbrace{D_u g}_{k \times m}, \underbrace{\text{Id}_k}_{k \times k} \right),$$

also  $\text{Rang}(D_{(u,w)} F) = k$ .

'c)  $\implies$  d)': Sei  $f: V \subseteq \mathbb{R}^{n=m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  wie in c). Sei  $U \times W \subseteq V$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^k$  offen. Sei  $p = (u_0, w_0) \in U \times W$ . Nach Umbenennung der Koordinaten (falls nötig) können wir annehmen, dass

$$\det \underbrace{\left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p = (u_0, w_0)) \right)_{1 \leq i \leq k, n-k+1 \leq j \leq n}}_{=: D_{w_0} f(p)} \neq 0.$$

Wir definieren

$$h: U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n, (u, w) \mapsto (u, f(u, w)).$$

Dann haben wir

$$\det D_p(h) = \det \begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0_{m \times k} \\ D_{u_0} f(p) & D_{w_0} f(p) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit liefert eine offene Umgebung  $V' \subseteq U \times W$  von  $p = (u_0, w_0)$ , eine offene Umgebung  $C'$  von  $q := h(p)$ , so dass die Einschränkung  $h: V' \rightarrow C'$  glatt ist. Die Abbildung  $h$  erfüllt dann:

$$(u, w) \in M \cap V' \iff f(u, w) = 0 \iff h(u, w) = (u, f(u, w)) = (u, 0) \in C'.$$

'd)  $\implies$  a)': Sei  $h: V \rightarrow W$  wie in d) gegeben. Dann ist  $h$  und damit auch  $h^{-1}$  insbesondere auch ein Homöomorphismus und damit ist auch

$$F := h|_{U_F := V \cap (\mathbb{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\})}: U_F \rightarrow V$$

ein Homöomorphismus aufs Bild. Da  $h$  Diffeomorphismus ist, ist  $F$  noch immer glatt und eine Immersion.  $\square$

## I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum

Eine grundlegende Idee der Analysis ist es, sofern möglich, Abbildungen durch lineare Abbildungen zu approximieren, um analytische Probleme auf linear-algebraische zurückzuführen. Die lineare Approximation einer Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  bei  $x$  ist das Differential  $D_x f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , definiert durch  $f(x+v) = f(x) + D_x f(v) + o(v)$  mit  $\lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{o(v)}{|v|} = 0$ . Zur Hauptaufgabe dieses Abschnittes gehört die Frage, wie man das auf Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern kann.

Vorl. 3

### I.2.1. Abbildung mit Werten in $M$

**Lemma I.2.1.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung von  $M$ . Sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung mit  $\varphi(W) \subseteq M \cap V$ . Dann ist  $\varphi$  als Abbildung von  $W$  nach  $\mathbb{R}^n$  genau dann glatt, wenn  $F^{-1} \circ \varphi: W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  glatt ist.

Das letzte Lemma sagt uns, dass bei der Frage der Differenzierbarkeit einer Abbildung mit Werten in  $M$  egal ist, ob wir diese Abbildung als eine nach  $\mathbb{R}^n$  oder mittels Koordinaten als eine Abbildung mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  auffassen.

insbesondere muss man das wirklich zeigen, weil wir im Moment noch nicht wissen, ob  $F^{-1}$  glatt ist, bzw. was das für  $F^{-1}: V \cap M \rightarrow U$  überhaupt heißen soll.

*Beweis.* Ist  $F^{-1} \circ \varphi$  glatt, dann ist  $\varphi = F \circ (F^{-1} \circ \varphi)$  als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt. Sei nun  $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt. Idee: Glatte Erweiterung von  $F$  zu einer Funktion  $G$  von  $U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $G^{-1}$  dann im Analysissinne glatt ist.

Sei  $p \in W$ . Dann ist  $q := \varphi(p) \in M \cap V$  und  $u_0 := F^{-1}(q) \in U$ . Sei  $F = (F_1, \dots, F_n)^T$ . Das Differential  $D_{u_0} F$  hat maximalen Rang. O.B.d.A. habe  $(D_{u_0}(F_1, \dots, F_m))$  maximalen Rang. Wir definieren

$$G: U \times \mathbb{R}^{k:=n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G_j(u^1, \dots, u^m, t^{m+1}, \dots, t^n) = \begin{cases} F_j(u^1, \dots, u^m) & j \leq m \\ F_j(u^1, \dots, u^m) + t^j & j > m \end{cases}$$

und berechnen

$$D_{(u_0^1, \dots, u_0^m, 0, \dots, 0)} G = \left( D_{(u_0^1, \dots, u_0^m)} F \mid \begin{matrix} 0 \\ \text{Id}_k \end{matrix} \right)$$

## I. Mannigfaltigkeiten

Dann ist

$$\det D_{(u_0,0)=(u_0^1,\dots,u_0^m,0,\dots,0)}G = \det D_{u_0=(u_0^1,\dots,u_0^m)}(F_1,\dots,F_m) \neq 0$$

und damit gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung  $U_1 \subseteq U \times \mathbb{R}^k$  von  $(u_0^1, \dots, u_0^m, 0, \dots, 0)$  und eine offene Umgebung  $V_1 \subseteq V$  von  $q$ , so dass

$$G|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$$

ein Diffeomorphismus ist. Sei  $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$ . Dann ist  $W_1$  eine offene Umgebung von  $p$ . Für  $p' \in W_1$  gilt

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0, \dots, 0).$$

Da  $G^{-1} \circ \varphi$  glatt ist, gilt das auch für  $F^{-1} \circ \varphi$ . □

**Folgerung I.2.2.** Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit zwei lokalen Parametrisierungen  $F_1: U_1 \rightarrow V_1$  und  $F_2: U_2 \rightarrow V_2$ . Sei  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Dann ist

$$F_2^{-1} \circ F_1: F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

*Beweis.* Wir verwenden Lemma I.2.1 auf  $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ,  $\varphi = F_1$  und  $F = F_2$  an. □

### I.2.2. Tangentialvektoren und Tangentialraum

Sei  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $p = F(u_0)$ . Die Bedingung, dass  $D_{u_0}F = \left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0)\right)$  Rang  $m$  hat, bedeutet, dass die Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0) \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig sind.

**Anschaung von  $\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ .** Es ist  $\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) = D_{u_0}F(e_i)$ , wobei  $e_i$  den Einheitsvektor im Punkt  $u_0$  zur Koordinate  $u^i$  darstellt. Dann ist

$$e_i := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \dots, u_0^m)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) = D_{u_0}F(e_i) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(u_0 + te_i).$$

Hierbei ist  $\gamma(t) := u_0 + te_i$  eine Kurve (sogar eine Gerade) in  $\mathbb{R}^m$  und  $c(t) := F \circ \gamma(t) = F(u_0 + te_i)$  eine Kurve in  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , also insbesondere eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$ . Also ist  $c'(0) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$  der Tangentialvektor an  $c$  in  $p = c(0) = F(u_0)$ .

Da für  $t$  klein genug  $\text{Spur}(c) \subseteq M$  ist, nennt man  $c'(0) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$  auch *tangential* an  $M$  in  $p = c(0)$ .

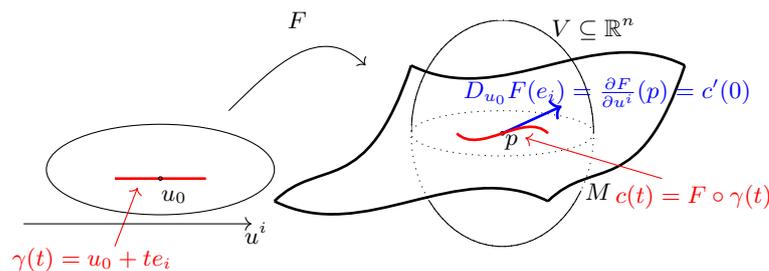


Abb. I.5.: Tangentialvektor

**Lemma und Definition I.2.3.** Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Sei  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $p = F(u_0)$ , so ist der durch

$$T_pM := D_{u_0}F(\mathbb{R}^m)$$

definierte Untervektorraum unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung und heißt Tangentialraum von  $M$  an  $p$ .

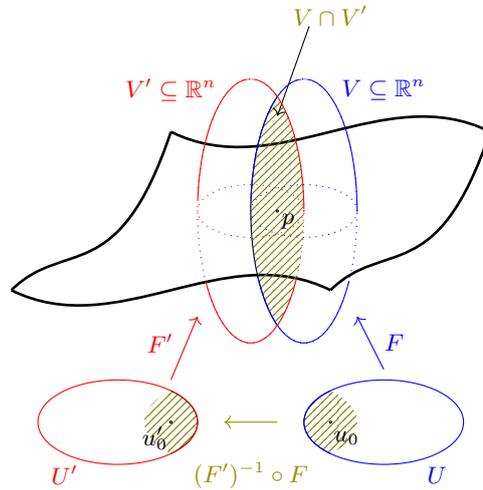


Abb. I.6.: Wechsel der lokalen Parametrisierung

*Beweis.* Sei  $F': U' \rightarrow V'$  eine weitere lokale Parametrisierung um  $p = F'(u'_0)$ . Nach Folgerung I.2.2 ist  $w := (F')^{-1} \circ F: F^{-1}(V \cap V') \rightarrow (F')^{-1}(V \cap V')$  ein Diffeomorphismus. Damit ist  $F = F' \circ w: F^{-1}(V \cap V') \rightarrow V \cap V'$  und nach Kettenregel

$$D_{u_0}F = D_{w(u_0)=F^{-1}(p)=u'_0}F' \circ D_{u_0}w.$$

Also ist

$$D_{u_0}F(\mathbb{R}^m) = D_{u'_0}F'(D_{u_0}w(\mathbb{R}^m)) = D_{u'_0}F'(\mathbb{R}^m),$$

wobei die zweite Gleichheit folgt, da  $w$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Bemerkung I.2.4.**

- (i)  $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0)$  ist eine Basis von  $T_pM$  (wobei  $F(u_0) = p$ ).
- (ii) Sei  $v \in T_pM$ . Dann gibt es eine glatte Kurve  $c: I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = v$ : Sei  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung um  $p = F(u_0)$  und sei  $v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ . Wähle für  $c = F \circ \gamma$  mit  $\gamma(t) = u_0 + t \sum_{i=1}^m a^i e_i$ . Wegen Linearität der Ableitung gilt

$$c'(0) = D_{u_0}F(\gamma'(0)) = \sum_{i=1}^m a^i D_{u_0}F(e_i) = v.$$

**Definition I.2.5** (Tangentialbündel, Normalenraum, Normalenbündel). Wir nennen die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit das *Tangentialbündel*\*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM := \{(p, v) \mid v \in T_pM, p \in M\}$$

von  $M$ . Der *Normalenraum* von  $M$  an  $p$  ist definiert als

$$N_pM := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in T_pM \subseteq \mathbb{R}^n: \langle w, v \rangle = 0\}$$

und das *Normalenbündel* von  $M$  also

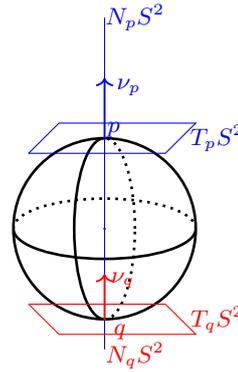
$$NM := \bigsqcup_{p \in M} N_pM.$$

**Bemerkung I.2.6.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit. Dann gilt für alle  $p \in M: T_pM \oplus N_pM = \mathbb{R}^n$ .

\*Streng genommen ist das der Totalraum des Tangentialbündels. Aber hier benutzen wir das erst einmal nur als Name und führen hier erst einmal nicht den Begriff eines Bündels ein.

**Beispiel I.2.7.** 1.  $S^2$ :

Als Untervektorraum vom  $\mathbb{R}^3$  sind  $T_p S^2$  und  $T_q S^2$  gleich, als Teilmenge von  $T S^2$  jedoch verschieden. In  $T S^2$  merken wir uns für jeden Tangentialvektor noch seinen Fußpunkt auf  $S^2$ . Analoges gilt für  $N_p S^2$  und  $N_q S^2$ .



$$2. \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3: T\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^2} \{p\} \times T_p \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^2} \{p\} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

**Berechnung von  $T_p M$  für implizit gegebene Untermannigfaltigkeiten** Sei  $M = f^{-1}(0)$  für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  glatt und der Rang von  $D_p f$  sei maximal für alle  $p \in M$ . Dann ist also nach Satz I.1.4 (Kriterium vom regulären Wert)  $M$  eine  $(m:=n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung von  $M$ , sei  $u \in U$ . Dann ist

$$f \circ F = 0, \text{ also } 0 = D_u(f \circ F) = D_{F(u)} f \circ D_u F.$$

Damit ist  $\text{Bild}(D_u F) \subseteq \ker(D_{F(u)} f)$ . Da  $\text{Rang}(D_{F(u)} f) = k$  ist, ist  $\dim \ker(D_{F(u)} f) = n - k = m$ . Wegen  $\dim D_u F(\mathbb{R}^m) = m$ , folgt

$$T_{F(u)} M = D_u F(\mathbb{R}^m) = \ker(D_{F(u)} f) \tag{I.1}$$

und damit  $N_{F(u)}(M) = (\ker(D_{F(u)} f))^\perp$ .

**Beispiel I.2.8.**  $M = S^2$ ,  $f = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1$ ,  $D_x f = 2(x^1, x^2, x^3)$ , also ist nach (I.1)  $T_x S^2 = \ker D_x f = \ker 2(x^1, x^2, x^3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v \rangle = 0\} = (\mathbb{R} \cdot x)^\perp$ .

**I.2.3. Abbildungen von  $M$  aus**

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ . Wir wollen einen Begriff von Glattheit für  $f$  einführen.

**Definition I.2.9.** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion  $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  heißt glatt, falls es zu jedem  $p \in S$  eine Umgebung  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$  und eine glatte Funktion  $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  gibt, so dass

$$f|_{S \cap W} = \bar{f}|_{S \cap W}.$$

Vorl. 4

**Lemma I.2.10.** Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  glatt und  $F: U \rightarrow V$  lokale Parametrisierung von  $M$ . Dann ist  $f \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  glatt.

*Beweis.* Sei  $u_0 \in U$  beliebig und  $p := f(u_0)$ . Da  $f$  glatt ist, gibt es eine offene Umgebung  $W$  von  $p$  und eine glatte Funktion  $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  mit  $f|_{M \cap W} = \bar{f}|_{M \cap W}$ . Dann gilt für all  $u \in F^{-1}(V)$ :

$$f \circ F(u) = \bar{f} \circ F(u).$$

Nun ist  $\bar{f} \circ F$  als Verkettung zweier glatter (im ursprünglichen Analysissinne) Funktionen wieder glatt\*, und damit ist auch  $f \circ F$  glatt auf  $F^{-1}(V)$ , also insbesondere in  $u_0$ .  $\square$

**Lemma I.2.11.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit und  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung. Dann ist  $F^{-1}: V \cap M \rightarrow U$  glatt.

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem Beweis von Lemma I.2.1. Die dort konstruierte Funktion  $G^{-1}$  ist eine glatte Fortsetzung von  $F^{-1}$  in einer Umgebung von  $p$ .  $\square$

\*gilt aber auch für Glattheitsbegriff aus Definition I.2.9, vgl. ÜA 5

**Folgerung I.2.12.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ . Sei  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $p$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. ('Lokale Existenz einer glatten Fortsetzung') Es gibt eine offene Umgebung  $W$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  und eine Fortsetzung  $\bar{f}$  von  $f|_{M \cap W}$  auf  $W$ , die glatt ist.
2. ('glatt in lokaler Parametrisierung') Die Abbildung  $f \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  ist glatt.

*Beweis.* '1  $\implies$  2': siehe Lemma I.2.10

'2  $\implies$  1': Sei  $p \in M$ . Nach Lemma I.2.11 ist  $F^{-1}$  glatt, d.h. es gibt eine offene Umgebung  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $p$  und eine glatte Funktion  $G: W \rightarrow U$  mit  $G|_{M \cap W} = F^{-1}|_{M \cap W}$ . Setze

$$\bar{f} = f \circ F \circ G: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell.$$

Dann ist  $\bar{f}$  als Hintereinanderausführung von glatten Abbildungen (hier wieder glatt im Sinne der Analysis) und  $\bar{f}|_{W \cap M} = f \circ F \circ G|_{W \cap M} = f \circ F \circ F^{-1}|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$ .  $\square$

**Bemerkung I.2.13.** Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten  $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $N^n \subseteq \mathbb{R}^\ell$ . Sei  $p \in M$ . Sei  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $p$  und sei  $F': U' \rightarrow V'$  eine lokale Parametrisierung von  $N$  um  $f(p)$ . Dann ist nach Lemma I.2.1 und Folgerung I.2.12  $f$  um  $p$  genau dann glatt, wenn  $(F')^{-1} \circ f \circ F: f^{-1}(U') \cap U \rightarrow V'$  glatt um  $u := F^{-1}(p)$  ist.

**Beispiel I.2.14.**

- (i)  $\text{id}: M \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist glatt.
- (ii) Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein (glattes) Vektorfeld ist eine (glatte) Abbildung  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Gilt zusätzlich  $X(p) \in T_p M$  (bzw.  $X(p) \in N_p M$ ) für alle  $p \in M$ , so ist  $X$  ein (glattes) tangentes Vektorfeld oder Tangentialfeld (bzw. normales Vektorfeld oder Normalenfeld) auf  $M$ . Falls  $\|X(p)\| = 1$  für alle  $p \in M$  ist, heißt  $X$  Einheitsvektorfeld.
- (iii) Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^{n=m+1}$  eine Hyperfläche.
  - a)  $m = 2$ : Sei  $F: U \rightarrow V$  eine lokale Parametrisierung von  $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  um  $p = F(u)$ . Dann ist

$$\nu(p) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \perp T_p M$$

ein Normalvektor in  $p$  und  $\nu: V \cap M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Normalenfeld von  $V \cap M$ . (Man sieht sofort, dass  $\nu \circ F$  glatt ist. Dann folgt Glattheit von  $\nu$  mittels Folgerung I.2.12.)

- b)  $m$  beliebig und  $F$  lokale Parametrisierung wie oben. Dann ist

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u^i}(u) \right)_i$$

eine Basis von  $T_{p=F(u)} M$ . Sei  $\nu(p) \in N_p M$  ein Vektor derart, dass  $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u), \nu(p = F(u))$  positiv orientiert sind. Dann ist  $\nu: M \cap V \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  ein glattes Normalfeld von  $V \cap M$ : Sei  $p_0 = F(u_0)$ . Dann ist  $\nu(F(u_0)) \perp \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$  für alle  $i$ . Da  $F$  glatt ist, gibt es eine Umgebung von  $u_0$ , so dass  $\nu(F(u_0))$  noch immer zur Basis  $\frac{\partial F}{\partial u}(u)$  linear unabhängig ist. Damit gilt auf dieser Umgebung

$$\nu(F(u)) = \nu(F(u_0)) - \sum_i \frac{\langle \nu(F(u_0)), \frac{\partial F}{\partial u^i}(u) \rangle}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u^i}(u) \right\|^2} \frac{\partial F}{\partial u^i}(u)$$

und es folgt, dass  $\nu \circ F$  glatt in  $u_0$  ist und damit  $\nu$  glatt in  $p_0$  ist. Durch Normierung

$$\tilde{\nu}(p) := \frac{\nu(p)}{\|\nu(p)\|}$$

erhalten wir ein glattes Einheitsnormalenfeld in einer Umgebung von  $p_0$ . Da  $N_p M$  eindimensional ist, ist  $\nu(p)$  bis auf skalare Multiplikation eindeutig bestimmt. Damit gibt es zwei glatte Einheitsnormalenfelder von  $V \cap M$ , nämlich  $\tilde{\nu}$  und  $-\tilde{\nu}$ . Lokal hat also eine Hyperfläche immer zwei glatte Einheitsnormalenfelder.

### I.2.4. Orientierbarkeit von Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$

Wir schieben an dieser Stelle ein erstes Beispiel für eine globale Eigenschaft ein - die Orientierbarkeit von Hyperflächen.

**Lemma und Definition I.2.15.** Eine Hyperfläche  $M^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  heißt orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenfeld  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  gibt.

Orientierbar zu sein ist äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen:

- i) Es gibt ein glattes Einheitsnormalenfeld  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ .
- ii) Es gibt ein stetiges nirgends verschwindendes Normalenfeld  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ .
- iii) Es gibt ein glattes nirgends verschwindendes Normalenfeld  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ .

Die Wahl eines Einheitsnormalenfeld nennt man Orientierung von  $M$ .

*Beweis.* Die meisten Äquivalenzen sind offensichtlich, außer: Habe  $M$  ein stetiges Einheitsnormalenfeld, dann ist das schon glatt. Doch das folgt direkt aus Beispiel I.2.14.iii.b.  $\square$

**Beispiel I.2.16.** 1.  $S^m$  ist orientierbar, denn  $\nu: S^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \mapsto x$  ist ein nirgends verschwindendes glattes Normalenfeld auf  $S^m$ .

2. Das Möbiusband

$$M = \{F(s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (-1, 1), s \in \mathbb{R}\}$$

mit

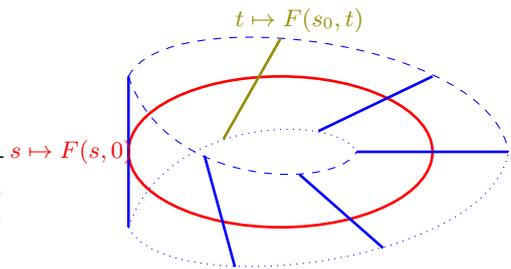
$$F(s, t) = \left( \cos(s) \left( 2 + t \cos \frac{s}{2} \right), \sin(s) \left( 2 + t \cos \frac{s}{2} \right), t \sin \frac{s}{2} \right)^T$$

ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit:  $F_1 := F|_{(-1,1) \times (0,2\pi)}$  und  $F_2 := F|_{(-1,1) \times (0,2\pi)}$  sind zwei lokale Parametrisierungen.

Wir wählen ein Normalenfeld auf  $\text{Bild}(F_1)$ :

$$\nu(F_1(s, t)) = \frac{\partial F}{\partial s}(F(s, t)) \times \frac{\partial F}{\partial t}(F(s, t))$$

Die Frage ist nun, ob sich  $\nu$  zu einem nicht verschwindenden stetigen Normalenfeld auf ganz  $M$  fortsetzen kann. Da  $M \setminus \text{Bild}(F_1) = F((-1, 1) \times \{0\})$  ist, müsste (im Falle einer positiven Antwort)  $\lim_{s \rightarrow 0} \nu(F_1(s, t)) = \lim_{s \rightarrow 2\pi} \nu(F_1(s, t))$  gelten. Berechnung von  $\nu$  widerlegt das.



### I.2.5. Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten und Tangentialabbildung

Seien  $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $N^n \subseteq \mathbb{R}^\ell$  Untermannigfaltigkeiten. Sei  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung, sei  $p \in M$ . Nach Definition gibt es eine Umgebung  $W \subseteq \mathbb{R}^k$  von  $p$  und eine glatte Abbildung  $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ , so dass  $f|_{W \cap M} = \bar{f}|_{W \cap M}$ .

**Lemma I.2.17.**  $D_p \bar{f}(T_p M) \subseteq T_{f(p)} N$

*Beweis.* Sei  $v \in T_p M$  gegeben. Wir wählen eine Kurve  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = v$ . Dann gilt

$$D_p \bar{f}(v) = D_{c(0)} \bar{f}(c'(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\bar{f} \circ c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\underbrace{f \circ c(t)}_{\text{Kurve in } N}) \in T_{f(p)} N. \quad (\text{I.2})$$

$\square$

**Definition I.2.18.** Das Differential von  $f$  an der Stelle  $p$  sei

$$d_p f := D_p \bar{f}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N.$$

Diese Abbildung wird *Tangentialabbildung* genannt. Wegen (I.2) hängt diese Definition nicht von der Wahl von  $\bar{f}$  ab.

**Bemerkung I.2.19.** a)  $d_p f$  ist linear

b) Für eine Folge glatter Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten  $M^m \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{g} P^p$  gilt die Kettenregel

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_p f).$$

c) In lokalen Koordinaten (vgl. Abb. I.7): Es sei  $F(u_0) = p$ ,  $f(p) = \tilde{p}$ ,  $\tilde{F}(\tilde{u}_0) = \tilde{p}$ . Es gibt  $a_i^j \in \mathbb{R}$  mit

$$d_p f \left( \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) \right) = \sum_j a_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0) \in T_{\tilde{p}=f(p)}N.$$

Dann gilt

$$D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j,$$

wobei  $(e_i)_i$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  (hier einmal im Punkt  $u_0$  als Basis von  $T_{u_0}\mathbb{R}^n$  und einmal im Punkt  $\tilde{u}_0$  als Basis von  $T_{\tilde{u}_0}\mathbb{R}^m$ ) bezeichnet, ÜA 9.

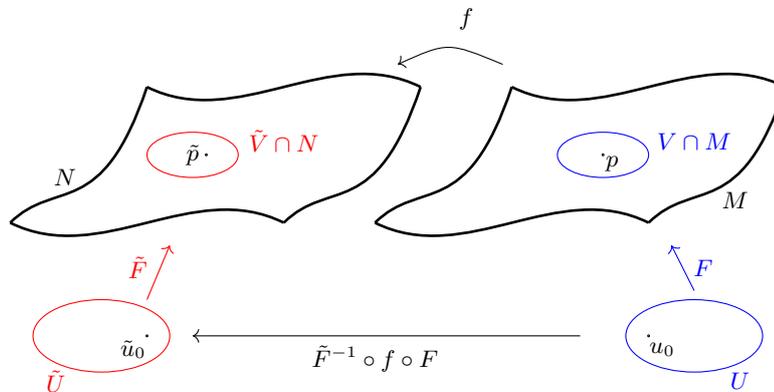


Abb. I.7.:  $f: M \rightarrow N$  in lokalen Parametrisierungen. O.B.d.A. sei  $f(V \cap M) = \tilde{V} \cap N$

**Notation I.2.20.** Abkürzend verwendet man auch häufig:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p := \frac{\partial F}{\partial u^i}(F^{-1}(p))$$

### I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

**Ziel:** Verallgemeinerung des Untermannigfaltigkeitsbegriffs für eine Menge ohne umliegenden Raum  $\mathbb{R}^n$ .

**Vorl. 5**

**Was soll der Begriff können:**

1. Die Menge  $M$  sollte erst einmal mindestens eine Topologie, siehe ÜA 4 mit Definition, tragen, damit wir über Begriffe wie Stetigkeit\* reden können.
2. Es sollte lokale Koordinaten geben. ('verallgemeinert lokale Parametrisierung')
3. Da es erst einmal keinen Glattheitsbegriff für Abbildungen von  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  in eine Menge mit beliebiger Topologie gibt, müssen Glattheitsforderungen in den Wechsel von Koordinaten gesteckt werden, vgl. Bemerkung I.2.13.

\*Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt *stetig*, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind (also  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$  für alle  $U \in \mathcal{T}_Y$  gilt). Dieser Stetigkeitsbegriff verallgemeinert den für Abbildungen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aus Analysis, denn im euklidischen Raum mit der Standardtopologie (also der Standardanalysisdefinition von offenen Mengen) ist diese Definition äquivalent zur Stetigkeitsdefinition mittels Grenzwerten (Analysis 2).

## I. Mannigfaltigkeiten

**Definition I.3.1.** Sei  $(M, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Wir nennen  $M$  eine *topologische  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) ('Punkte kann man trennen')  $M$  ist *hausdorffsch*, d.h. für je zwei Punkte  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$  existieren offene Mengen  $U, V \subseteq M$  mit  $p \in U, q \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .
- (ii) Die Topologie von  $M$  besitzt eine *abzählbare Basis*, d.h. es gibt eine abzählbare Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ , so dass für alle  $U \in \mathcal{T}$  es Mengen  $B_i \in \mathcal{B}$  mit  $U = \cup_i B_i$  gibt.
- (iii)  $M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$ , d.h. für jeden Punkt  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  um  $p$  und eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ , so dass  $\kappa: U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus (bzgl. der durch  $\mathcal{T}$  auf  $U$  induzierten Topologie\*) ist. Die Abbildung  $\kappa$  heißt *Karte* von  $M$  um  $p$ .

Sind die Kartenwechsel zusätzlich glatt, d.h. für zwei Karten  $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$ , mit  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , ist

$$\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}: \kappa_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \kappa_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^m$$

glatt, so nennen wir die Menge  $\mathcal{A}$  aller dieser Karten einen *glatten Atlas* von  $M$ .

Auf der Menge der Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit führen wir eine Äquivalenzrelation ein: Seien  $\mathcal{A}_i$  glatte Atlanten für  $(M, \mathcal{T})$ . Dann ist  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$  gdw.  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  ein glatter Atlas für  $(M, \mathcal{T})$  ist.

Eine *glatte Mannigfaltigkeit*  $(M, \mathcal{T}, [\mathcal{A}])$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{T})$  zusammen mit einer Äquivalenzklasse von glatten Atlanten  $[\mathcal{A}]$ . Wir nennen  $[\mathcal{A}]$  dann eine *differenzierbare Struktur* auf  $M$ .

**Notation I.3.2.** Da wir oft mit einem konkreten Atlas arbeiten, schreiben wir kurz:  $(M, \mathcal{A})$  oder direkt  $M$ , wenn es keinen Zweifel an der differenzierbaren Struktur gibt, statt  $(M, \mathcal{T}, [\mathcal{A}])$ .

### Beispiel I.3.3.

a) Jede Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist mit dem durch die Karten  $\kappa := F^{-1}$  gebildeten Atlas eine glatte Mannigfaltigkeit, siehe ÜA 12.

b) Der reell projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{R}P^n := \{L \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\}.$$

Sei  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, p \in S^n \rightarrow L_p \in \mathbb{R}P^n$  die Projektion, wobei  $L_p$  die Ursprungsgerade in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $p$  ist. Es gilt  $\pi^{-1}(L_p) = \{\pm p\}$ . Wir verwenden auf  $\mathbb{R}P^n$  die Quotiententopologie<sup>†</sup> bzgl.  $\pi$ . Man überprüft leicht, dass  $\mathbb{R}P^n$  Hausdorff ist. Sei  $\mathcal{A} = \{\kappa: U \rightarrow V\}$  ein glatter Atlas von  $S^n$ . O.B.d.A. können wir durch Verkleinern der Menge  $U$  annehmen, dass  $\pi: U \rightarrow \pi(U)$  ein Homöomorphismus sei. Dann ist  $\mathcal{A}' = \{\kappa: (\pi|_U)^{-1}: \pi(U) \rightarrow V\}$  auch ein Atlas von  $\mathbb{R}P^n$  und sogar glatt, da  $(\kappa_1: (\pi|_{U_1})^{-1}) \circ (\kappa_2: (\pi|_{U_2})^{-1})^{-1} = \kappa_1 \circ (\pi|_{U_1} \circ (\pi|_{U_2})^{-1}) \circ \kappa_2^{-1} = \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$  glatt ist.

c) Wir betrachten zwei glatte Atlanten für  $\mathbb{R}$  (mit Standardtopologie):  $\mathcal{A}_1 := \{\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x\}$  und  $\mathcal{A}_2 := \{\kappa_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3\}$ . Diese beiden Atlanten sind nicht äquivalent, da  $\kappa_1^{-1} \circ \kappa_2 = \kappa_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kein Diffeomorphismus (Umkehrabbildung ist in 0 nicht differenzierbar). Also sind  $[\mathcal{A}_1]$  und  $[\mathcal{A}_2]$  zwei verschiedene differenzierbare Strukturen. Fortsetzung in Beispiel I.3.7.

\*Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine beliebige Teilmenge. Dann ist  $\mathcal{T}' := \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$  eine Topologie auf  $Y$  - die von  $(X, \mathcal{T})$  induzierte Topologie (auch *Teilraumtopologie* genannt), vgl. ÜA 4

†Quotiententopologie: Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, sei  $Y$  eine Menge und  $q: X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann ist  $\mathcal{T}' = \{\emptyset \mid q^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}\}$  eine Topologie auf  $Y$  - die sogenannte *Quotiententopologie*.

**Bemerkung I.3.4.** a) Spezialfall: Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\text{pr}: X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion. Dann betrachtet man auf  $X/\sim$  meist ohne weiteren Kommentar die Quotiententopologie.

b) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf  $X'$ , so dass  $q$  bzgl. dieser Topologien stetig ist ('feinste' = jede andere Topologie mit dieser Eigenschaft (=  $q$  ist stetig) ist in dieser Topologie enthalten).

c) Der Name kommt von folgender Eigenschaft:  $q$  von oben ist eine *Quotientenabbildung*, d.h. für jeden weiteren topologischen Raum  $(Z, \mathcal{T}'')$  und jede Abbildung  $f: Y \rightarrow Z$  gilt:  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f \circ q$  stetig ist.

d) Besitzt  $(X, \mathcal{T})$  eine abzählbare Basis, so auch der Quotientenraum  $(Y, \mathcal{T}')$ : Sei  $\mathcal{B}$  abzählbare Basis von  $\mathcal{T}$ , dann ist  $q(\mathcal{B}) := \{q(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$  abzählbare Basis von  $\mathcal{T}'$ . Denn sei  $U \in \mathcal{T}'$ , dann ist  $q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  mit  $q^{-1}(U) = \cup_i B_i, B_i \in \mathcal{B}$ , also  $U = q(\cup_i B_i) = \cup_i q(B_i)$ .

e) Die Hausdorff-Eigenschaft vererbt sich im Allgemeinen nicht, z.B.  $X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$ . Sei  $(x, y) \sim (x', y')$  gdw beide gleich sind oder  $x = x' > 0$  ist. Dann ist  $Y = X/\sim$  nicht hausdorffsch. Denn man kann die Punkt  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$  nicht trennen: Jede Umgebung von  $(0, 1) \in Y$  bzw.  $(0, -1) \in Y$  enthält  $\text{pr}((-\epsilon, 0) \times \{1\})$  für ein  $\epsilon > 0$ .

**Definition I.3.5.** Seien  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten, sei  $p \in M$ . Eine stetige Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt  $k$ -mal stetig differenzierbar (oder  $C^k$ ) in  $p$ , falls für eine Karte  $(\kappa: U \rightarrow V)$  um  $p$  im Atlas von  $M$  und für eine Karte  $(\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V})$  um  $f(p)$  im Atlas von  $N$  gilt:

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: \kappa(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U) \rightarrow \tilde{V}$$

ist in  $\kappa(p)$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Ist  $f: M \rightarrow N$  ein Homöomorphismus und ist  $f$  und  $f^{-1}$  glatt, dann nennen wir  $f$  einen *Diffeomorphismus*.

**Bemerkung I.3.6.** Gilt Definition I.3.5 für ein Paar solcher Karten um  $p$  bzw.  $f(p)$ , so gilt es für alle solche Karten, da

$$\tilde{\kappa}' \circ f \circ (\kappa')^{-1} = \underbrace{(\tilde{\kappa}' \circ \tilde{\kappa}^{-1})}_{\text{Diffeo}} \circ (\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ \underbrace{(\kappa \circ (\kappa')^{-1})}_{\text{Diffeo}}.$$

**Beispiel I.3.7.** Wir betrachten weiterhin die beiden Atlanten auf  $\mathbb{R}$  aus Beispiel I.3.3.c), also die beiden Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ . Dann ist  $f = \text{id}: M = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow N = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$  kein Diffeomorphismus, da  $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  keiner ist, aber  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), f(t) = t^{1/3}$ , ist ein Diffeomorphismus, denn

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \kappa_1 \downarrow & & \downarrow \kappa_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \end{array}$$

D.h. obwohl die beiden Atlanten auf  $\mathbb{R}$  verschiedene differenzierbare Strukturen definieren, sind die glatten Mannigfaltigkeiten diffeomorph.

**Bemerkung I.3.8.** Für  $n \neq 4$  ist jede differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{R}^n$  diffeomorph zur Standard-Struktur, die durch  $\mathcal{A} = \{\kappa = \text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  definiert ist. Für  $n = 4$  gibt es allerdings überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}^4$ , die paarweise nicht diffeomorph sind – so genannte exotische Strukturen\*. Weiterhin hat Milnor 1956 bewiesen, dass es für  $n \geq 7$  exotische  $n$ -dimensionale Sphären gibt (d.h. sie sind homöomorph zu  $S^n$  aber nicht diffeomorph). Von diesen exotischen Sphären† gibt es in jeder Dimension aber nur endlich viele. In Dimension 7 gibt es z.B. 28 verschiedene. Diese können alle als Untermannigfaltigkeit vom  $\mathbb{R}^{10}$  dargestellt werden – die Brieskorn-Sphären (1966): Für  $k \in \mathbb{N}$

$$S_k^7 := \{(z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{C}^5 \cong \mathbb{R}^{10} \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^{6k-1} = 0, |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1\}.$$

Vorl. 6

**Satz I.3.9.** Seien  $M$  und  $A$  Mengen. Seien  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m, U_\alpha \subseteq M$  Teilmengen und  $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  bijektive Abbildungen für  $\alpha \in A$ , so dass gilt

- (i) ( $\{U_\alpha\}$  ist eine Überdeckung von  $M$ )  $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ ,
- (ii)  $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist offen in  $\mathbb{R}^m$  für alle  $\alpha, \beta \in A$ .
- (iii)  $\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}: \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist für alle  $\alpha, \beta \in A$  stetig.

Dann trägt  $M$  genau eine Topologie bzgl. derer alle  $U_\alpha$  offene Mengen und alle  $\kappa_\alpha$  Homöomorphismen (bzgl. der auf  $U_\alpha$  durch  $\mathcal{T}$  induzierten Topologie) sind. Gibt es eine abzählbare Teilmenge  $A_1 \subseteq A$  mit  $\cup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M$ , so besitzt diese Topologie auf  $M$  eine abzählbare Basis. Gibt es zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  ein  $\alpha \in A$ , so dass  $p, q \in U_\alpha$  ist, dann ist diese Topologie Hausdorffsch.

Der obige Satz erleichtert uns die Arbeit, wenn wir überprüfen wollen, ob eine Menge eine topologische (glatte) Mannigfaltigkeit ist. Es reicht einen geeigneten (im Sinne des letzten Satzes) Atlas anzugeben. Dann wird damit auf  $M$  eine Topologie induziert, die ggf. sogar Hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis besitzt.

\*<https://mathoverflow.net/questions/24970/exotic-differentiable-structures-on-r4>  
 †[https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_sphere](https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere)

*Beweis.* Eindeutigkeit Sei  $\mathcal{T}$  eine solche Topologie auf  $M$ . Dann ist  $U_\alpha \in \mathcal{T}$ . Wir zeigen, dass

$$\mathcal{T} = \{W \subseteq M \mid \kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen f\u00fcr alle } \alpha \in A\}$$

gelten muss: Sei  $U \in \mathcal{T}$ . Dann ist auch  $U_\alpha \cap U \in \mathcal{T}$  und damit auch  $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U)$  offen f\u00fcr alle  $\alpha \in A$ .

Sei nun  $W \subseteq M$  eine Teilmenge, f\u00fcr die  $\kappa_\alpha(W \cap U_\alpha)$  in  $\mathbb{R}^m$  f\u00fcr alle  $\alpha \in A$  offen ist. Dann ist  $W \cap U_\alpha$  in  $U_\alpha$  offen und somit auch offen in  $M$ . Wegen (i) ist dann auch  $W = \cup_{\alpha \in A} (W \cap U_\alpha)$  offen in  $M$ .

Existenz Sei  $\mathcal{T} = \{W \subseteq M \mid \kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen f\u00fcr alle } \alpha \in A\}$  wie oben. Es reicht zu zeigen, dass  $\mathcal{T}$  eine Topologie ist und die geforderten Eigenschaften hat, also  $U_\alpha \in \mathcal{T}$  ist und die  $\kappa_\alpha$  Hom\u00f6omorphismen sind:

- Topologie: Es ist  $\emptyset, M \in \mathcal{T}$ . Seien  $W_i \in \mathcal{T}$  f\u00fcr  $i \in I$ . Dann ist  $\kappa_\alpha((\cup_i W_i) \cap U_\alpha) = \kappa_\alpha(\cup_i (W_i \cap U_\alpha)) = \cup_i \kappa_\alpha(W_i \cap U_\alpha)$  als Vereinigung der offenen Mengen  $\kappa_\alpha(W_i \cap U_\alpha)$  wieder offen in  $\mathbb{R}^m$ . Analog rechnet man die Bedingung an endliche Schnitte nach und erh\u00e4lt, dass  $\mathcal{T}$  eine Topologie ist.
- $U_\alpha \in \mathcal{T}$  folgt direkt aus der Definition von  $\mathcal{T}$  und (ii).
- $\kappa_\alpha$  Hom\u00f6o: Sei nun  $W \in U_\alpha$  offen. Dann ist  $W$  auch in  $M$  offen, also nach Definition von  $\mathcal{T}$  ist  $\kappa_\beta(W \cap U_\beta)$  f\u00fcr alle  $\beta$  in  $\mathbb{R}^m$  offen. Mit (iii) ist dann auch  $(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})^{-1}(\kappa_\beta(W \cap U_\beta)) = \kappa_\alpha(W \cap U_\beta)$  offen in  $V_\alpha$  und damit  $\cup_\beta \kappa_\alpha(W \cap U_\beta) = \kappa_\alpha(W)$  offen ist. Also ist  $\kappa_\alpha^{-1}$  stetig.

Sei nun  $Z \in V_\alpha$  offen. Wegen (iii) ist  $(\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1})^{-1}(Z \cap \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) = \kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(Z) \cap U_\alpha \cap U_\beta) = \kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(Z) \cap U_\beta)$  offen f\u00fcr alle  $\beta$ . Nach Definition von  $\mathcal{T}$  ist dann  $\kappa_\alpha^{-1}(Z) \subseteq U_\alpha$  offen in  $M$  und damit in  $U_\alpha$ . Also ist  $\kappa_\alpha$  stetig.

Abz\u00e4hlbare Basis Wegen Eindeutigkeit liefern  $A$  und  $A_1$  dieselbe Topologie auf  $M$ . D.h. wir k\u00f6nnen o.B.d.A. annehmen, dass  $A$  schon abz\u00e4hlbar sei. Dann hat  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$  eine abz\u00e4hlbare Basis  $\mathcal{B}_\alpha$  f\u00fcr alle  $\alpha \in A$ . Damit ist  $\kappa_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$  eine abz\u00e4hlbare Basis von  $U_\alpha$  und  $\cup_{\alpha \in A} \kappa_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$  eine abz\u00e4hlbare Basis von  $M$ .

Hausdorffsch Seien  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$ . Sei  $p, q \in U_\alpha$  f\u00fcr ein  $\alpha \in A$ . Dann ist  $\kappa_\alpha(p) \neq \kappa_\alpha(q)$ . Da  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$  hausdorffsch ist, gibt es  $V_1, V_2 \subseteq V_\alpha$  mit  $\kappa_\alpha(p) \in V_1, \kappa_\alpha(q) \in V_2$  und  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Damit trennen  $\kappa_\alpha^{-1}(V_1)$  und  $\kappa_\alpha^{-1}(V_2)$  die Punkte  $p$  und  $q$ .  $\square$

### 1.3.1. Tangentialraum und Tangentialabbildung

F\u00fcr Untermannigfaltigkeiten sind Tangentialvektoren Vektoren im umliegenden Raum  $\mathbb{R}^n$ . Bei abstrakten Mannigfaltigkeiten haben wir keinen umliegenden Raum mehr. Wollen wir das Konzept der Tangentialvektoren jedoch verallgemeinern (und das wollen wir, um sp\u00e4ter auch Tangentialabbildungen zu verallgemeinern) brauchen wir eine andere Definition. In Bemerkung 1.2.4 haben wir gesehen, dass jeder Tangentialvektor einer Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  als Geschwindigkeitsvektor einer Kurve in  $M$  realisiert wird. Allerdings m\u00fcssen wir beachten, dass verschiedene Kurven durch  $p$  in  $p$  den gleichen Geschwindigkeitsvektor haben k\u00f6nnen.

Dies ist unser Ansatzpunkt f\u00fcr die Definition von Tangentialvektoren an Mannigfaltigkeiten. Kurven repr\u00e4sentieren Tangentialvektoren. Um eine \u00c4quivalenzrelation f\u00fcr 'gleiche Geschwindigkeitsvektoren' einzuf\u00fchren, nutzen wir wieder die Karten, denn in  $\mathbb{R}^m$  k\u00f6nnen wir ableiten:

**Definition 1.3.10.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Ein *Tangentialvektor* an  $M$  im Punkt  $p$  ist eine \u00c4quivalenzklasse von glatten Kurven  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\epsilon > 0$  und  $c(0) = p$ , wobei zwei solcher Kurven  $c_1$  und  $c_2$  \u00e4quivalent hei\u00dfen, falls f\u00fcr eine Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  mit  $p \in U$  gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_2).$$

F\u00fcr die \u00c4quivalenzklasse von  $c$  schreiben wir  $[c]_p$ . Die Menge

$$T_p M := \{[c]_p \mid c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

heißt *Tangentialraum* von  $M$  im Punkt  $p$ .

**Bemerkung 1.3.11.** (i) Die Definition des Tangentialvektors h\u00e4ngt nicht von der gew\u00e4hlten Karte ab: Sei  $\kappa': U' \rightarrow V', p \in U'$  eine zweite Karte. Dann ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ c)) = D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ \left( \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c) \right).$$

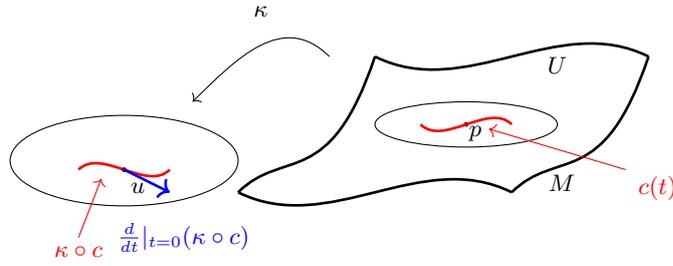


Abb. I.8.: Tangentialvektor

- (ii) Für Untermannigfaltigkeiten hatten wir neben dem Tangentialvektoren auch noch Normalenvektoren definiert. Dazu braucht man aber einen umliegenden Raum – das ist also kein Begriff für abstrakte Mannigfaltigkeiten.
- (iii) Bis jetzt ist  $T_p M$  nur eine Menge. Wir wollen aber, wie es auch bei Untermannigfaltigkeiten gilt,  $T_p M$  mit einer geeigneten Vektorraumstruktur versehen:

**Lemma I.3.12.** Sei  $M^m$  glatte Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\kappa: U \rightarrow V$  Karte von  $M$  mit  $p \in U$ . Dann ist die Abbildung

$$d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, [c]_p \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa \circ c)$$

wohldefiniert und bijektiv.

*Beweis.* Wohldefiniertheit und Injektivität folgt aus der Definition der Äquivalenzklassen  $[c]_p$ . Es bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei  $v \in \mathbb{R}^m$ . Setze  $c: t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv) \in M$ , wobei wir  $\epsilon > 0$  so klein wählen, dass  $\kappa(p) + tv \in V$  liegt. Dann gilt

$$d_p \kappa([c]_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa \circ \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa(p) + tv) = v.$$

□

**Definition I.3.13.** Sei  $[c_i]_p \in T_p M$ ,  $i = 1, 2$ , sei  $\kappa$  eine Karte um  $p$ . Für  $a, b \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$a[c_1]_p + b[c_2]_p := (d_p \kappa)^{-1} (a d_p \kappa([c_1]_p) + b d_p \kappa([c_2]_p)).$$

und versehen  $T_p M$  mit dieser Vektorraumstruktur.

**Bemerkung I.3.14.** (i) Obige Definition ist die eindeutige Vektorraumstruktur für die  $d_p \kappa$  ein Vektorraumisomorphismus ist.

- (ii) Die Vektorraumstruktur hängt nicht von der Wahl der Karte ab: Sei  $\kappa'$  eine weitere Karte um  $p$ . Wir müssen zeigen, dass auch  $d_p \kappa': T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus ist. Das folgt aus

$$d_p \kappa' = d_p (\kappa' \circ \kappa^{-1} \circ \kappa) = D_{\kappa(p)} (\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ d_p \kappa,$$

da  $\kappa' \circ \kappa^{-1}$  ein Diffeomorphismus und damit  $D_{\kappa(p)} (\kappa' \circ \kappa^{-1})$  ein Vektorraumisomorphismus ist.

- (iii) Für Untermannigfaltigkeiten: Für eine lokale Parametrisierung  $F: U \rightarrow V$  um  $p$  ist  $\kappa := F^{-1}|_{V \cap M}$  eine Karte um  $p = F(u)$  und damit

$$\begin{aligned} T_p M^{\text{def. für Untermannigfaltigkeiten}} &= d_u F(\mathbb{R}^m) = d_u \kappa^{-1}(\mathbb{R}^m) \\ &= (d_p \kappa)^{-1}(\mathbb{R}^m) = T_p M^{\text{def. für abstrakte Mannigfaltigkeiten}}. \end{aligned}$$

**Satz I.3.15.** Sei  $M^m$  eine Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{A} = \{\kappa: U^\kappa \rightarrow V^\kappa\}$  ein glatter Atlas\* von  $M$ . Die Menge  $TM$  trägt eine Topologie, so dass  $\mathcal{A}' = \{d\kappa \mid \kappa \text{ Karte von } M\}$  einen glatten Atlas auf  $TM$  definiert, wobei

$$d\kappa: U^{d\kappa} = \bigsqcup_{p \in U^\kappa} T_p M \rightarrow V^{d\kappa} := V^\kappa \times \mathbb{R}^m, (p, v) \mapsto (\kappa(p), d_p \kappa(v))$$

ist. Damit ist  $TM$  eine  $2m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

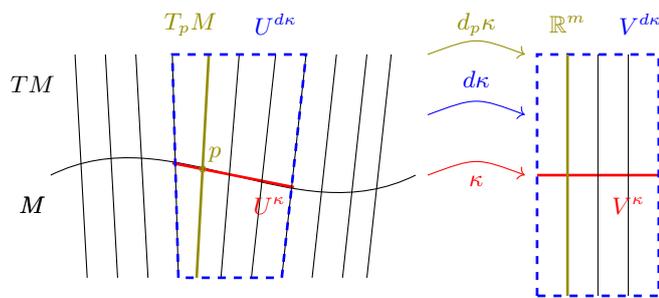


Abb. I.9.: Karte von  $TM$  (Während die rechte Menge ein wirkliches Produkt  $V^\kappa \times \mathbb{R}^m$  ist, ist das linke Bild eher als schematisches Bild von  $TM$  zu verstehen, da  $T_p M$  ein abstrakter Raum von Äquivalenzklassen ist und  $p$  zwar erst einmal nicht in  $T_p M$  liegt, aber die Äquivalenzklasse  $[t \mapsto p]_p \in T_p M$  der konstanten Kurve in  $p$  mit dem Punkt  $p \in M$  identifiziert werden kann.)

*Beweis.* Wir wollen Satz I.3.9 anwenden und überprüfen dazu erst einmal die Voraussetzungen: (i) gilt, da  $TM = \cup_{\kappa \in \mathcal{A}} U^{d\kappa}$ . (ii) folgt, da

$$d\kappa_\alpha(U^{d\kappa_\alpha} \cap U^{d\kappa_\beta}) = \kappa_\alpha(U^{\kappa_\alpha} \cap U^{\kappa_\beta}) \times \mathbb{R}^m$$

offen in  $\mathbb{R}^{2m}$  ist. Der Kartenwechsel

$$\begin{aligned} d\kappa_\beta \circ (d\kappa_\alpha)^{-1}(u, w) &= d\kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(u), d_u \kappa_\alpha^{-1}(w)) \\ &= (\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}(u), d_{\kappa_\alpha^{-1}(u)} \kappa_\beta d_u \kappa_\alpha^{-1}(w)) \\ &= ((\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})(u), d_u(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})(w)) \end{aligned}$$

ist glatt und damit insbesondere stetig. Damit trägt  $TM$  genau eine Topologie, für die die  $d\kappa$  Homöomorphismen und wegen obiger Glattheit sogar Diffeomorphismen sind. Abzählbare Basis folgt aus abzählbarem Atlas. Hausdorff überprüft man leicht. □

**Bemerkung I.3.16.** Ist  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit, dann ist auch  $TM \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  Untermannigfaltigkeit: Idee: Aus einer lokalen Parametrisierung  $F: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $M$ , erhalten wir mittels  $\tilde{F}: U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ,  $(u, v) \mapsto (F(u), D_u F(v))$  eine lokale Parametrisierung von  $TM$ .

**Beispiel I.3.17.**  $TS^1$  ist diffeomorph zu  $S^1 \times \mathbb{R}$ , aber  $TS^2$  ist nicht mal homöomorph zu  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  (Folgt aus differentialtopologischen Argumenten, vgl. auch mit dem Satz vom Igel.)

**Bemerkung I.3.18.** Die Fußpunktabbildung

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p$$

ist glatt, da

$$\kappa \circ \pi \circ (d\kappa)^{-1}: V^{d\kappa} = V^\kappa \times \mathbb{R}^m \rightarrow V^\kappa, \quad (u, X) \xrightarrow{(d\kappa)^{-1}} (\kappa^{-1}(u), d_u \kappa^{-1}(X)) \xrightarrow{\pi} \kappa^{-1}(u) \xrightarrow{\kappa} u$$

glatt ist.

**Vorl. 7**

**Beispiel I.3.19.** Ein glattes Vektorfeld ist eine glatte Abbildung

$$X: M \rightarrow TM \quad \text{mit } X(p) \in T_p M \quad (\text{anders gesagt: } \pi(X(p)) = p).$$

Sei  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$ . Dann wird ein Vektorfeld  $X$  auf  $U$  durch Funktionen  $X^1, \dots, X^m: V \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben:

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p.$$

---

\*Bei uns sind alle Atlanten glatt, so dass wir das in Zukunft nicht mehr dazu sagen.

Hier ist  $\frac{\partial}{\partial u^i}|_p$  analog zum Fall der Untermannigfaltigkeiten die Kurzschreibweise für  $d_{\kappa(p)}\kappa^{-1}(e_i) = [\kappa^{-1}(\kappa(p) + te_i)]_p$ , diese bilden eine Basis von  $T_pM$ .

Was bedeutet hier Glattheit? Ist  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte um  $M$ , dann betrachten wir  $d\kappa: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$  als Karte um  $X(p)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM \\
 \cup & & \cup \\
 p = \kappa^{-1}(v) \in U & \xrightarrow{X|_U} & TU \\
 \kappa \downarrow & & d\kappa \downarrow \\
 v \in V & \xrightarrow{d\kappa \circ X|_{U \circ \kappa^{-1}}} & V \times \mathbb{R}^m \ni (v, X^1(v), \dots, X^n(v)) \\
 \cap & & \cap \\
 \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Also ist  $X$  in  $p$  genau dann glatt, wenn die  $X^i$  in  $v = \kappa(p)$  glatt sind.

Bei Kartenwechsel? Seien  $\kappa: U \rightarrow V$  und  $\bar{\kappa}: U' \rightarrow V'$  zwei Karten von  $M$  mit  $p \in U \cap U'$ . Seien  $(x^1, \dots, x^m)$  bzw.  $(y^1, \dots, y^m)$  Koordinaten auf  $V$  bzw.  $V'$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^i}|_p &= d_{\bar{\kappa}(p)}\bar{\kappa}^{-1}(e_i) = d_{\bar{\kappa}(p)}(\kappa^{-1} \circ \kappa \circ \bar{\kappa}^{-1})(e_i) = d_{\kappa(p)}\kappa^{-1} \circ d_{\kappa(p)}(\kappa \circ \bar{\kappa}^{-1})(e_i) \\
 &= d_{\kappa(p)}\kappa^{-1} \left( \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} e_j \right) = \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} d_{\kappa(p)}\kappa^{-1}(e_j) \\
 &= \sum_j \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

wobei  $d_{\kappa(p)}(\kappa \circ \bar{\kappa}^{-1}) = \left( \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \right)_i^j = t_i^j$  die Transformationsmatrix ist.

Kurzschreibweise:  $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$  (Insbesondere werden dabei die Karten direkt mit  $x$  und  $y$ , also wie die Koordinaten bezeichnet. Außerdem wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. über wiederkehrende Indizes (einer oben - einer unten) wird summiert – hier:  $\sum_j$ ).

**Satz und Definition I.3.20.** Die *Tangentialabbildung*

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad [c]_p \mapsto [f \circ c]_{f(p)}$$

ist wohldefiniert und linear.

$d_p f$  heißt das *Differential* oder die *Tangentialabbildung* von  $f$  im Punkt  $p$  und  $\partial_{[c]_p} f := d_p f([c]_p)$  die *Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $c'(0) := [c]_p$  im Punkt  $p$ .

*Beweis.* Wohldefiniertheit und Linearität rechnet man mit Hilfe der Definition von  $[c]_p$  und Definition I.3.13 direkt nach.  $\square$

**Lemma I.3.21.** (Vgl. ÜA 18) Die Abbildung  $df: TM \rightarrow TN$ ,  $(p, v) \mapsto (f(p), d_p f(v))$  ist glatt.

**Folgerung I.3.22.** Sei  $f: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus zweier glatter Mannigfaltigkeiten. Sei  $X: M \rightarrow TM$  ein glattes Vektorfeld.

Dann ist  $df(X): N \rightarrow TN$ ,  $q \mapsto d_{f^{-1}(q)}(X(f^{-1}(q)))$  wieder ein glattes Vektorfeld.

*Beweis.* Da  $df$  und  $X$  glatte Abbildungen sind, ist auch  $df(X)$  glatt und nach Definition ist  $df(X)(q) \in T_q N$ .  $\square$

**Lemma I.3.23.** Ist  $f: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus glatter Mannigfaltigkeiten, so ist

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere ist  $\dim T_p M = \dim T_{f(p)} N$  und  $\dim M = \dim N$ .

## I. Mannigfaltigkeiten

*Beweis.* Linearität ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Umkehrabbildung gibt: Für eine Kurve  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  gilt

$$d_p \text{id}_M([c]_p) = [\text{id}_M \circ c]_p = [c]_p.$$

Also ist  $d_p \text{id}_M = \text{id}_{T_p M}$ . Dann folgt mit der Kettenregel:

$$\text{id}_{T_p M} = d_p \text{id}_M = d_p(f^{-1} \circ f) = d_{f(p)} f^{-1} \circ d_p f.$$

Analog erhält man  $d_p f \circ d_{f(p)} f^{-1} = \text{id}_{T_{f^{-1}(p)} M}$ . Damit gilt  $d_{f(p)} f^{-1} = (d_p f)^{-1}$   $\square$

Es gilt lokal auch die Umkehrung:

**Satz I.3.24 (Umkehrsatz).** *Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei  $p \in M$ . Sei  $f: M \rightarrow N$  glatt. Falls  $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  ein Vektorraumisomorphismus ist, so existieren eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und eine offene Umgebung  $U'$  von  $f(p)$  in  $N$ , so dass  $f|_U: U \rightarrow U'$  ein Diffeomorphismus ist.*

**Beweisidee.** Man benutzt Karten und den Umkehrsatz im  $\mathbb{R}^m$ .

Damit der Umkehrsatz auf eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  anwendbar ist, ist  $\dim M = \dim N$  notwendig. Wir stellen uns jetzt der Frage, was das 'beste' lokale Verhalten, falls  $\dim M < \dim N$  ist. Die Ableitung  $d_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  kann zwar kein Isomorphismus mehr sein, aber zumindest injektiv. Falls dem so ist, nennt man  $f$  eine *Immersion in  $x$* . Ist  $f$  eine Immersion in allen  $x \in M$ , so nennt man  $f$  eine *Immersion*.

**Beispiel I.3.25.** Die *kanonische Immersion* von  $\mathbb{R}^k$  in  $\mathbb{R}^l$  mit  $l \geq k$  ist die Standardinklusionsabbildung  $(x^1, \dots, x^k) \mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ .

**Satz I.3.26 (Satz über lokale Immersionen).** *Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Immersion in  $x \in M$  und sei  $y = f(x)$ . Dann gibt es lokale Koordinaten um  $x$  und  $y$ , so dass  $f(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ .\* (Kurz gesagt:  $f$  ist lokal äquivalent zur kanonischen Immersion in  $x$ .)*

*Beweis.* Wir wählen lokale Koordinaten um  $x \in M$  und  $y = f(x) \in N$ :  $\kappa: U \rightarrow V$  mit  $\kappa(x) = 0$  und  $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  mit  $\tilde{\kappa}(y) = 0$ . Wir setzen  $g := \tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Da  $d_x f$  und damit  $d_0 g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist, können wir durch einen Basiswechsel in  $\mathbb{R}^n$  immer erreichen, dass  $d_0 g$  die Form der  $n \times m$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}$$

hat. Wir definieren  $G: V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $G(x, z) = g(x) + (0, z)$ . Dann bildet  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  ab und  $d_0 G = \text{Id}_n$ . Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist damit  $G$  ein lokaler Diffeomorphismus in  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Nach Definition von  $G$  gilt  $g = G \circ (\text{kanonische Immersion})$ . Da  $\tilde{\kappa}^{-1} \circ G$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, ergibt er durch Einschränken von Definitionsbereich und Wertebereich eine neue Karte um  $y$  bzgl. derer dann  $f$  die kanonische Immersion ist.  $\square$

**Folgerung I.3.27.** *Ist  $f$  eine Immersion in  $x$ , dann ist  $f$  auch eine Immersion in einer Umgebung von  $x$ .<sup>†</sup>*

**Bemerkung I.3.28.** Haben  $M$  und  $N$  die gleiche Dimension, dann ist  $f: M \rightarrow N$  genau dann eine Immersion, wenn  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Daran sieht man, dass Immersion zu sein eine strikt lokale Eigenschaft ist. Im Gegensatz dazu ist Diffeomorphismus zu sein, etwas Globales.  $f$  ist genau dann Diffeomorphismus, wenn  $f$  lokaler Diffeomorphismus ist und bijektiv ist. Das heißt auch: Will man, dass die Immersion schöne globale Eigenschaften hat, braucht man zusätzlich topologische Bedingungen. Wir haben das schon am Beispiel der Untermannigfaltigkeiten gesehen, vgl. Definition I.1.1 und Übungsaufgabe 1 gesehen.

**Definition I.3.29.** Eine Immersion  $f: M \rightarrow N$ , die  $M$  homöomorph auf ihr Bild abbildet, heißt *Einbettung*.

**Folgerung I.3.30.** *Sei  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Einbettung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann ist  $f(M)$  eine zu  $M$  diffeomorphe Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .<sup>‡</sup>*

\*Das ist hier die Kurzschreibweise für  $\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ , wobei  $\kappa$  bzw.  $\tilde{\kappa}$  die zu den Koordinaten  $x^i$  bzw.  $y^j$  gehörige Karte ist.

<sup>†</sup>Immersion-Sein ist also eine *offene* Eigenschaft, d.h. gilt es in einem Punkt, dann auch in einer Umgebung dieses Punktes.

<sup>‡</sup>Die Aussage gilt ganz analog mit einer Mannigfaltigkeit  $N$  statt  $\mathbb{R}^n$  - aber wir haben bis jetzt noch nicht definiert, was eine Untermannigfaltigkeit einer beliebigen Mannigfaltigkeit ist. Die Definition ist aber ganz analog zu Definition I.1.1 oder den alternativen Definitionen in Satz I.1.4.

### I.3.2. Ist der Begriff der Mannigfaltigkeit wirklich allgemeiner?

Nein, denn:

**Satz I.3.31** (Whitneyscher Einbettungssatz). *Jede  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$  ist kann in den  $\mathbb{R}^{2m}$  eingebettet werden.*

Wir werden hier nur eine leichtere Version beweisen (allgemeiner Beweis in [6, Kapitel IV.A]):

**Satz I.3.32.** *Jede  $m$ -dimensionale kompakte\* glatte Mannigfaltigkeit  $M$  kann in einen  $\mathbb{R}^n$  eingebettet werden.*

Dafür brauchen wir noch ein wichtiges technisches Hilfsmittel:

**Definition I.3.33** (Partition der Eins). Sei  $M^m$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $(U_i)_{i \in I}$  eine beliebige (nicht notwendigerweise abzählbare) Überdeckung von  $M$ . Eine der Überdeckung untergeordnete glatte Zerlegung der Eins ist eine Familie  $(\rho_i: M \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$  von glatten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Zu jedem  $i \in I$  ist  $\text{supp}(\rho_i) \subseteq U_i$ .
- (ii) Jeder Punkt in  $M$  besitzt eine Umgebung, auf der fast alle  $\rho_i$  verschwinden.
- (iii) Es gilt  $\rho_i \geq 0$  für alle  $i \in I$  und

$$\sum_i \rho_i = 1.$$

Vorl. 8

**Satz I.3.34.** *Zu jeder offenen Überdeckung von  $M$  gibt es eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins.*

*Beweis.* siehe [1, XI Satz 1.20] □

*Beweis von Satz I.3.32.* Sei  $\mathcal{A} = \{\kappa_i: U_i \rightarrow V_i\}$  ein Atlas von  $M$ . Da  $M$  kompakt ist, können wir den Atlas endlich wählen. Sei  $\rho_i$  eine zu  $(U_i)_{i=1, \dots, \nu}$  untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir setzen  $f_i(p) = \rho_i(p)\kappa_i(p)$ . Die  $f_i$  sind wohldefiniert auf ganz  $M$ , da außerhalb des Definitionsbereichs von  $\kappa_i$  die Funktion  $\rho_i$  konstant Null ist. Wir definieren  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n:=\nu(m+1)}$  durch

$$p \mapsto (\rho_1(p), f_1(p), \rho_2(p), f_2(p), \dots, \rho_\nu(p), f_\nu(p))^T$$

- Stetigkeit von  $f$  ist klar.
- $f$  ist glatt, denn  $f \circ \kappa_i^{-1}: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$x \mapsto ((\rho_1 \circ \kappa_i^{-1})(x), (f_1 \circ \kappa_i^{-1})(x) = (\rho_1 \circ \kappa_i^{-1})(x)(\kappa_1 \circ \kappa_i^{-1})(x), \dots)^T$$

- Die Abbildung  $f$  ist injektiv: Seien  $p, q \in M$  mit  $f(p) = f(q)$ . Dann gilt  $\rho_i(p) = \rho_i(q)$  für  $i = 1, \dots, \nu$ . Es gibt ein  $i_0$  mit  $\rho_{i_0}(p) > 0$ . Wegen  $\rho_{i_0}(p)\kappa_{i_0}(p) = \rho_{i_0}(q)\kappa_{i_0}(q)$  folgt  $p = q$ .
- Da  $f$  stetig ist und bijektiv aufs Bild ist und da  $M$  kompakt ist, ist  $f: M \rightarrow f(M)$  ein Homöomorphismus. Damit ist  $f(M)$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Es bleibt zu zeigen, dass  $f(M)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist. Nach Folgerung I.3.30 reicht es zu zeigen, dass  $d_p f$  für alle  $p \in M$  injektiv ist.
- $d_p f$  ist eine Immersion (also injektiv) für jedes  $p \in M$ : Es ist

$$d_p f(v) = (d_p \rho_\nu(v), d_p \rho_1(v)\kappa_1(x) + \rho_1(x)d_p \kappa_1(v), \dots, d_p \rho_\nu(v), d_p \rho_\nu(v)\kappa_\nu(x) + \rho_\nu(x)d_p \kappa_\nu(v)).$$

Sei  $i$  so, dass  $\rho_i(p) > 0$  ist. Sei weiterhin  $v \in T_p M$  mit  $d_p f(v) = 0$ . Dann folgt  $d_p \rho_i(v) = 0$  und damit  $\rho_i(p)d_p \kappa_i(v) = 0$ , also  $d_p \kappa_i(v) = 0$ . Da  $d_p \kappa_i: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Vektorraumisomorphismus ist, folgt  $v = 0$ . Damit ist  $d_p f$  injektiv. □

\*  $U \subseteq X$  ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von  $U$  eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., für alle  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$  mit  $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$  gibt es eine endliche Teilmenge  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  mit  $\bigcup_{U \in \mathcal{V}} U = X$ .

Für Mannigfaltigkeiten impliziert Kompaktheit insbesondere, dass endliche viele Karten reichen, um die Mannigfaltigkeit zu überdecken.

### I.3.3. Konstruktion von Mannigfaltigkeiten - Produkte und Quotienten

**Bemerkung I.3.35.** Die disjunkte Vereinigung zweier Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension ist in kanonischer Weise wieder eine Mannigfaltigkeit.

**Satz I.3.36.** Das Produkt  $M \times N$  einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $N$  ist eine  $(m + n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Beweisskizze.** Sei  $(p, q) \in M \times N$ . Wähle Karten  $\kappa: U \rightarrow V$  in  $M$  um  $p$  und  $\kappa': U' \rightarrow V'$  in  $N$  um  $q$ . Dann ist  $\kappa \times \kappa': U \times U' \rightarrow V \times V'$ ,  $(r, s) \mapsto (\kappa(r), \kappa'(s))$  Karte um  $(p, q)$ .

Nun zu Quotienten: Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei  $G$  eine Gruppe und

$$\rho: G \rightarrow \text{Homöo}(M)$$

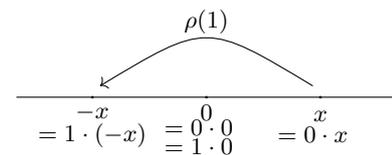
ein Gruppenhomomorphismus, wobei  $\text{Homöo}(M)$  die Gruppe der Homöomorphismen von  $M$  zusammen mit der Hintereinanderausführung ist. Abkürzend schreiben wir:  $g \cdot p := g(p) := \rho(g)(p)$ . Man sagt  $G$  *wirkt auf*  $M$ .

**Beispiel I.3.37.**

1.  $M = S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $G = \mathbb{Z}_2$  mit

$$\rho(g)(x) = \begin{cases} x & g = 0 \\ -x & g = 1 \end{cases}$$

2.  $M = \mathbb{R}^1$ ,  $G = \mathbb{Z}_2$ ,  $\rho$  wie oben.



3.  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  mit

$$g \cdot (x, y) = \begin{cases} (x, y) & g = (0, 0) \\ (-x, y) & g = (1, 0) \\ (x, -y) & g = (0, 1) \\ (-x, -y) & g = (1, 1) \end{cases}$$

4.  $S^1$  wirkt auf  $S^2$  durch Rotation um die  $z$ -Achse.

**Definition I.3.38.** Für  $p \in M$  bezeichne

$$[p] := \{g \cdot p \mid g \in G\}$$

die *Bahn* oder den *Orbit* von  $p$  unter der Gruppenwirkung  $\rho$  von  $G$ . Der *Orbitraum* ist definiert als

$$M/G := \{[p] \mid p \in M\}$$

mit der kanonischen Projektion  $\pi: M \rightarrow M/G$ ,  $p \mapsto [p]$ . Die durch  $\pi$  induzierte Quotiententopologie auf  $M/G$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_{M/G}$ .

**Zu Beispiel I.3.37:**  $M/G$  ist gleich  $\mathbb{R}P^n$ ,  $[0, \infty)$ ,  $[0, \infty)^2$  bzw.  $[-1, 1]$ .

Wir wollen hinreichende Bedingungen an die Gruppenwirkung finden, so dass  $M/G$  wieder eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

**Definition I.3.39.** Eine Gruppe  $G$  wirkt *frei* auf  $M$ , falls  $g \cdot p \neq p$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$  und alle  $p \in M$  ist. Eine Gruppe  $G$  wirkt *eigentlich diskontinuierlich* auf  $M$ , falls für alle kompakten Teilmengen  $K \subseteq M$  nur endlich viele Gruppenelemente  $g_1, \dots, g_{N_K} \in G$  existieren mit  $g_i(K) \cap K \neq \emptyset$  für  $1 \leq i \leq N_K$ .

**Zu Beispiel I.3.37:** 1. ist frei und eigentlich diskontinuierlich, 2. und 3. sind nicht frei aber eigentlich diskontinuierlich und 4. ist weder frei noch eigentlich diskontinuierlich.

**Satz I.3.40.** *Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $\rho: G \rightarrow \text{Hom}\ddot{o}(M)$  ein Gruppenhomomorphismus. Wirkt die Gruppe  $G$  frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $M$ , so ist der Orbitraum  $(M/G, \mathcal{T}_{M/G})$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.\**

**Beweisskizze.** (a)  $\pi$  stetig nach Definition von  $\mathcal{T}_{M/G}$  und  $\mathcal{T}_{M/G}$  hat abzählbare Basis.

(b) Für  $U \subseteq M$  gilt:  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g \in G} g(U)$ .

(c)  $\pi$  ist offen, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab.

(d) Für alle  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U_p$  von  $p$  mit  $U_p \cap g(U_p) = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$ :

Sei  $p \in M$  und  $K_p$  eine kompakte Umgebung von  $p$  (d.h. es gibt eine offene Umgebung von  $p$  deren Abschluss  $K_p$  kompakt ist.) Da  $G$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, gibt es endlich viele Gruppenelemente  $g_1 = e, g_2, \dots, g_N$  mit

$$K_p \cap g_i(K_p) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, N.$$

Im Fall  $N = 1$  folgt die Behauptung mit  $U_p$  gleich dem Inneren von  $K_p$ . Sei  $N \geq 2$ . Da  $G$  frei wirkt, ist  $g_i \cdot p \neq p$  für  $g_i \neq e$ . Da  $M$  Hausdorffsch ist, können wir die Punkte trennen: d.h. es gibt Umgebungen  $U_i$  von  $p$  und  $U'_i$  von  $g_i \cdot p$  mit  $U_i \cap U'_i = \emptyset$ . O.B.d.A. sei  $U_i \subseteq K_p$  und  $g(U_i) \subseteq U'_i$  (das kann immer erreicht werden, indem man  $U'_i$  durch  $U'_i \cap g_i(\text{Inneres}(K_p))$  und  $U_i$  durch  $U_i \cap g_i^{-1}(U'_i \cap g_i(\text{Inneres}(K_p)))$  ersetzt). Setzen wir

$$U_p := \cap_{i=1}^N U_i,$$

dann ist  $U_p$  eine offene Umgebung von  $p$  und

$$U_p \cap g_i(U_p) \subseteq U_i \cap g_i(U_i) \subseteq U_i \cap U'_i = \emptyset.$$

(e)  $M/G$  ist Hausdorff: Seien  $q = \pi(\hat{q})$  und  $p = \pi(\hat{p})$  mit  $p \neq q$  gegeben. Dann ist  $\hat{q} \neq g \cdot \hat{p}$  für alle  $g \in G$ . Sei  $K$  eine kompakte Umgebung von  $\hat{p}$  und  $\hat{q}$ . Dann gibt es nur endlich viele  $g_i \in G, i = 1, \dots, m$ , mit  $g_i \cdot K \cap K \neq \emptyset$ .

Für jedes  $g \in G$  seien  $U_{\hat{q}}^g$  und  $U_{g \cdot \hat{p}}$  offene Umgebungen von  $\hat{q}$  bzw.  $g \cdot \hat{p}$ , die diese Punkte trennen (möglich, da  $M$  Hausdorff). O.B.d.A. können wir wie in (d) annehmen, dass diese Umgebungen klein genug sind, dass  $U_{\hat{q}}^g \subseteq \text{Inneres}(K)$  und  $U_{g \cdot \hat{p}} \subseteq g \cdot \text{Inneres}(K)$  gilt, sowie  $g_i \cdot U_{e \cdot \hat{p}} \subseteq U_{g_i \cdot \hat{p}}$  für  $i = 1, \dots, m$ .

Wir setzen  $U_{\hat{q}} = \cap_{i=1}^m U_{\hat{q}}^{g_i}$ . Dann sind  $U_{\hat{q}}$  und  $U_{\hat{p}}$  offene Umgebungen von  $\hat{q}$  bzw.  $\hat{p}$ , so dass  $\pi(U_{\hat{q}}$  und  $\pi(U_{\hat{p}})$  disjunkte offene Umgebungen von  $q$  und  $p$  sind, denn: Sei  $x \in \pi(U_{\hat{q}} \cap \pi(U_{\hat{p}}))$ . Nach (a) gibt es dann  $g, h \in G$  mit  $x \in g \cdot U_{\hat{q}} \cap h \cdot U_{\hat{p}}$ . Also gibt es ein  $y \in U_{\hat{q}} \cap (g^{-1}h) \cdot U_{\hat{p}} \subseteq K \cap (g^{-1}h)K$ . Also ist  $g^{-1}h = g_i$  für ein  $i = 1, \dots, m$ . Andererseits ist  $U_{\hat{q}} \cap g_i \cdot U_{\hat{p}} \subseteq U_{\hat{q}}^{g_i} \cap U_{g_i \cdot \hat{p}} = \emptyset$ . Also existiert  $x$  nicht.

(f) Sei  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  um  $p$ . O.B.d.A. sei  $U$  derart, dass  $U \cap g(U) = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$  – immer möglich nach (d). Dann ist  $\pi|_U$  ein Homöomorphismus aufs Bild und  $\kappa \circ \pi|_U^{-1}: \pi(U) \rightarrow V$  eine Karte von  $M/G$  um  $\pi(p)$ . Ist  $\{\kappa: U \rightarrow V\}$  ein glatter Atlas von  $M$  mit Karten wie eben, dann ist auch  $\{\kappa \circ \pi|_U^{-1}: \pi(U) \rightarrow V\}$  ein glatter Atlas von  $M/G$ .

---

\*Es gibt eine Version dieses Satzes für Liegruppen (vgl. ÜA. 20), z.B. wenn  $S^1$  auf  $S^1 \times S^1$  durch Drehung in der ersten Komponente wirkt:

**Satz.** Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit auf der eine Liegruppe  $G$  frei und eigentlich wirkt. Dann ist  $M/G$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Gruppenwirkung heißt *eigentlich*, falls für die Abbildung  $G \times M \rightarrow M \times M, (g, m) \mapsto (m, g \cdot m)$  Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

**Beispiel I.3.41.**

1. Wir fassen die Sphäre  $S^{2k-1}$  als Menge aller  $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$  mit  $\sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1$  auf. Sind  $p \geq 2$  und  $1 \leq q_1, \dots, q_k < p$  ganze Zahlen, so dass  $q_i$  und  $p$  teilerfremd sind,  $1 \leq i \leq k$ , so wirkt die Gruppe der  $p$ -ten Einheitswurzeln  $E_p := \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\} \subseteq \mathbb{C}$  frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $S^{2k-1}$  durch

$$z \cdot (z_1, \dots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k).$$

Der Orbitraum  $L(p, q_1, \dots, q_k) := S^{2k-1}/E_p$  wird *Linsenraum vom Typ  $(p; q_1, \dots, q_k)$*  genannt.

2.  $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  ( $n$ -dimensionaler Torus): Hierbei wirkt  $\mathbb{Z}^n$  auf  $\mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$(z_1, \dots, z_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) := (x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n)$$

Die Gruppenoperation ist frei, eigentlich diskontinuierlich und differenzierbar. Es gilt:  $T^n$  ist diffeomorph zu  $S^1 \times \dots \times S^1$ .

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Bis jetzt haben wir glatte Mannigfaltigkeiten eingeführt. Damit wissen wir z.B. was differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind. Als nächstes wollen wir eine Struktur einführen mit der wir Länge von Vektoren, Abstände zwischen Punkten etc. bestimmen können. Für Untermannigfaltigkeit kriegen wir diese Struktur durch das euklidische Skalarprodukt des umliegenden Raum geschenkt: Wir schränken in jedem Punkt  $p$  der Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  das Skalarprodukt auf den Untervektorraum  $T_p M \subseteq \mathbb{R}^n$  ein und erhalten die erste Fundamentalform

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle \text{ für } X, Y \in T_p M.$$

Die erste Fundamentalform ist in jedem Punkt der Untermannigfaltigkeit eine positiv definite symmetrische Bilinearform und hängt glatt vom Punkt ab.

### II.1. Semi-Riemannsche Metriken

Sei nun  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

**Definition II.1.1.** \* Eine *semi-Riemannsche Metrik*  $g$  ist eine Abbildung, die jedem Punkt von  $M$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform  $g_p$  auf  $T_p M$  zuordnet, so dass diese Zuordnung glatt vom Basispunkt abhängt, d.h. für jede Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  um  $p$  ist die Abbildung

$$g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}, g_{ij}(v) := g_{\kappa^{-1}(v)} \left( \left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_{\kappa^{-1}(v)}, \left. \frac{\partial}{\partial u^j} \right|_{\kappa^{-1}(v)} \right)$$

glatt.

Eine semi-Riemannsche Metrik  $g$ , für die  $g|_p$  stets positiv definit ist, heißt *Riemannsche Metrik*. Ein Paar  $(M, g)$ , aus einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  und einer (semi-)Riemannschen Metrik auf  $M$ , heißt *(semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

\*

#### Wdh lineare Algebra - Bilinearformen

**Definition.** Sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform ist eine Abbildung  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

(i)  $g(\alpha v + \beta w, z) = \alpha g(v, z) + \beta g(w, z)$  für alle  $v, w \in V$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii)  $g(v, w) = g(w, v)$  für alle  $v, w \in V$

Man nennt  $g$  *nicht entartet*, falls aus  $g(v, w) = 0$  für alle  $w \in V$  folgt, dass  $v = 0$ .

Sei  $(b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $V$  und

$$g_{ij} := g(b_i, b_j) \in \mathbb{R} \text{ für } i, j = 1, \dots, m.$$

Dann ist  $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$  eine symmetrische  $m \times m$ -Matrix. Für  $v = \sum_{i=1}^m v^i b_i$  und  $w = \sum_{i=1}^m w^i b_i$  gilt

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} v^i w^j.$$

Sei  $b_1^*, \dots, b_m^*$  die duale Basis von  $V^*$  zu  $b_1, \dots, b_m$ , also  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ .

Dann ist  $g = \sum_{i,j} g_{ij} b_i^* \otimes b_j^*$ , dabei ist  $(b_i^* \otimes b_j^*)(v, w) = b_i^*(v) b_j^*(w)$ .

**Bemerkung.** Hauptachsentransformation:

Sei  $g$  eine nichtentartete symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Dann existiert eine Basis  $e_1, \dots, e_m$  von  $V$ , so dass

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \epsilon_i \in \{\pm 1\} & i = j. \end{cases}$$

Eine solche Basis heißt *Orthonormalbasis* und die Anzahl der  $i$ , für die  $\epsilon_i = -1$  ist, heißt *Index* von  $g$ .

**Beispiel.** (i) Skalarprodukt - Index 0

(ii) Minkowskiprodukt=Lorentzprodukt - Index 1, z.B.,  $g_{ij} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ .

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Eine semi-Riemannsche Metrik  $g$  heißt *Lorentz-Metrik*, falls  $g_p$  stets den Index 1 hat. Das Paar  $(M, g)$  heißt dann *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

**Kartenwechsel:** Seien  $\kappa: U \rightarrow V$  und  $\bar{\kappa}: U' \rightarrow V'$  zwei Karten von  $M$  mit  $p \in U \cap U'$ . Seien  $(x^1, \dots, x^m)$  bzw.  $(y^1, \dots, y^m)$  Koordinaten auf  $V$  bzw.  $V'$ .

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p = D_{\bar{\kappa}(p)} \bar{\kappa}^{-1}(e_i) = \sum_j \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad (\text{II.1})$$

und damit

$$g_{ij}^{(\bar{\kappa})}(\bar{\kappa}(p)) = \sum_{k,l} \frac{\partial(\kappa^k \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial(\kappa^l \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} g_{kl}^{(\kappa)}(\kappa(p))$$

bzw. in (Physiker-)Kurzschreibweise  $g_{ij}^{(y)} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} (g_{kl}^{(x)} \circ (x \circ y^{-1}))$ .

Ist  $g_{ij}^{(\kappa)}: V \rightarrow \mathbb{R}$  glatt für eine Karte  $\kappa: U \rightarrow V$ , dann gilt für jede Karte  $\kappa': U' \rightarrow V'$ , dass  $g_{ij}^{(\kappa')}: \kappa'(U \cap U') \subseteq V' \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Es reicht also die Glattheit der Metrikkoeffizienten für einen  $M$  überdeckenden Teilatlas zu überprüfen.

**Definition II.1.2.** Da  $d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Vektorraumisomorphismus ist, ist  $dx^i|_p := d_p \kappa^i \in (T_p M)^*$ . Der Dualraum  $(T_p M)^* =: T_p^* M$  heißt *Kotangentialraum* von  $M$  in  $p$ .

**Lemma II.1.3.** Die  $dx^i|_p$  bilden die zu  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  duale Basis.

*Beweis.*  $dx^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p) = d_p \kappa^i(d_{\kappa(p)} \kappa^{-1}(e_j)) = \delta_j^i$  □

Also ist

$$g_p = g_{ij}(\kappa(p)) dx^i|_p \otimes dx^j|_p^*, \text{ d.h. } g_p(X, Y) = g_{ij}(\kappa(p)) dx^i|_p(X) dx^j|_p(Y) \text{ für } X, Y \in T_p M$$

und

$$dx^i|_p = \frac{\partial(\kappa^i \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} dy^j \Big|_p \quad (\text{II.2})$$

(Kurzschreibweisen:  $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$ ,  $g = g_{ij} dx^i dx^j$ .)

**Beispiel II.1.4.** Lokal gibt es immer eine semi-Riemannsche Metrik von beliebigem Index:

Sei  $M^m$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\beta$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^m$  vom Index  $0 \leq k \leq m$ . Sei  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte mit Koordinaten  $(x^1, \dots, x^m)$ . Für jedes  $p \in U$ , ist  $d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Isomorphismus. Setze  $g_p := (d_p \kappa)^* \beta$ .<sup>†</sup> Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) &= (d_p \kappa)^* \beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) \\ &= \beta\left(d_p \kappa\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right), d_p \kappa\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right)\right) \\ &= \beta(e_i, e_i). \end{aligned}$$

Also sind die  $g_{ij}$  konstant in  $p$  und damit glatt und  $g$  ist auf  $U \subseteq M$  eine Metrik mit Index  $k$ .

<sup>\*</sup>Zur Anschauung und Herkunft des Tensorproduktes: Tom Coates, [The tensor product of vector spaces](#)

<sup>†</sup> Seien  $V$  und  $W$  zwei endlich dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $h$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  und  $\Phi: W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $\Phi^* h$ ,

$$(\Phi^* h)(w_1, w_2) := h(\Phi(w_1), \Phi(w_2)),$$

eine symmetrische Bilinearform auf  $W$ . Man sagt 'g wird mittels  $\Phi$  zurückgezogen'.

Ist  $h$  positiv definit, dann ist  $\Phi^* h$  positiv semidefinit. Falls  $\Phi$  zusätzlich injektiv ist, dann ist  $\Phi^* h$  positiv definit.

**Bemerkung II.1.5.** Sei  $g$  semi-Riemannsche Metrik auf  $M$ , sei  $v \in T_p M$ . Dann nennt man  $\|v\| := \sqrt{|g_p(v, v)|}$  Betrag des Vektors  $v$ . Ist  $g$  Riemannsche, so ist das eine Norm auf  $T_p M$ . Der Winkel zwischen Vektoren  $v, w \in T_p M \setminus \{0\}$  ist definiert

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{|g_p(v, v)| \cdot |g_p(w, w)|}}.$$

Beachte: Man kann nur Winkel zwischen Vektoren messen, die im gleichen Tangentialraum liegen.

**Beispiel II.1.6.** Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ :  $g_E = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 (= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dx^2)$  in Polarkoordinaten  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$ :

$$dx^1 = \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x^1}{\partial r} dr = -r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr, \quad dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x^2}{\partial r} dr = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 &= (-r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr) \otimes (-r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr) \\ &\quad + (r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr) \otimes (r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr) \\ &= r^2 \sin^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi - r \sin \varphi \cos \varphi (dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr) + \cos^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi \\ &\quad + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi + r \sin \varphi \cos \varphi (dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr) + \sin^2 \varphi dr \otimes dr \\ &= r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dr \otimes dr. \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix von  $g_E$  bzgl. der Koordinaten  $(r, \varphi)$  ist also  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$  während die bzgl. der euklidischen Koordinaten  $(x^1, x^2)$  die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist.

**Beispiel II.1.7.** Sei  $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^n_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = -1, x_{n+1} > 0\}$  und  $\mathbb{H}^n_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$ , vgl. Abbildung I.4. Wir betrachten auf beiden Untermannigfaltigkeiten, die durch das Lorentz-Produkt induzierte Metrik, d.h. für alle  $p \in M$ , mit  $M = \mathbb{H}^n$  oder  $M = \mathbb{H}^n_{-1}$  und  $v, w \in T_p M$

$$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle_L.$$

Dann ist  $(\mathbb{H}^n, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $(\mathbb{H}^n_{-1}, g)$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit:

Sei  $y \in T_p M$ . Dann gibt es eine Kurve  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = y$ . Wegen  $c(t) \in M$  ist  $\langle c(t), c(t) \rangle_L = \pm 1$ . Differentiation ergibt  $2\langle c'(t), c(t) \rangle_L = 0$  und damit  $\langle y, p \rangle_L = 0$ . Wir haben also  $T_p M = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, y \rangle_L = 0\}$ . Also ist  $\mathbb{R}^{n+1} = T_p M \oplus \mathbb{R}p$  eine orthogonale Zerlegung (bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ ) von  $T_p M$ . Im Fall  $M = \mathbb{H}^n$  ist  $\langle p, p \rangle_L = -1$ , also muss  $g_p$  positiv definit sein. Im Fall  $M = \mathbb{H}^n_{-1}$  ist  $\langle p, p \rangle_L = 1$ , also muss  $g_p$  vom Index 1 sein.

Vorl. 10

**Beispiel II.1.8.** Sei  $g$  eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  glatt. Dann ist  $f^2 g$  definiert als  $(f^2 g)_p(X, Y) := f^2(p) g_p(X, Y)$  für  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$  wieder eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$  gleichen Index. Man nennt  $f^2 g$  eine zu  $g$  konforme Metrik. Für eine konforme Metrik ändert sich zwar der Betrag eines Vektors ( $\|v\|_{f^2 g} = f(p) \|v\|_g$  für  $v \in T_p M$ ) aber nicht der Winkel zwischen zwei Vektoren, denn für  $v, w \in T_p M \setminus \{0\}$  gilt

$$\angle_{f^2 g}(v, w) = \arccos \frac{f^2(p) g_p(v, w)}{\sqrt{f^2(p) |g_p(v, v)| \cdot f^2(p) |g_p(w, w)|}} = \arccos \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{|g_p(v, v)| \cdot |g_p(w, w)|}} = \angle_g(v, w).$$

**Beispiel II.1.9.** Seien  $(M^m, g)$  und  $(N^n, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten vom Index  $k_1$  bzw.  $k_2$ . Wir wollen Beispiele für Metriken auf dem Produkt  $M \times N$  finden. Davor noch einige Vorüberlegungen: Für einen Punkt  $(p, q) \in M \times N$  gilt  $T_{(p,q)}(M \times N)$  ist kanonisch isomorph zu  $T_p M \times T_q N$ ,

$$[c]_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N) \mapsto ([pr_M \circ c]_p, [pr_N \circ c]_q) \in T_p M \times T_q N,$$

wobei  $pr_M: M \times N \rightarrow M$  bzw.  $pr_N: M \times N \rightarrow N$  die Projektion auf  $M$  bzw.  $N$  ist.

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Eine Möglichkeit eine Metrik auf  $M \times N$  zu definieren ist die *Produktmetrik*  $g + h$

$$(g + h)_{(p,q)}(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_p(X_1, X_2) + h_q(Y_1, Y_2), \quad \forall p \in M, q \in N, X_1, X_2 \in T_p M, Y_1, Y_2 \in T_q N$$

Sei  $f: N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine glatte Abbildung. Dann kann man eine verzerrte Metrik (warped product)  $M \times_f N := (M \times N, f^2 g + h)$  definieren als

$$(f^2 g + h)_{(p,q)}(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = f^2(q)g_p(X_1, X_2) + h_q(Y_1, Y_2), \quad \forall p \in M, q \in N, X_1, X_2 \in T_p M, Y_1, Y_2 \in T_q N.$$

Die Metrik  $f^2 g + h$  hat Index  $k_1 + k_2$ . Die Produktmetrik ist der Spezialfall  $f = 1$ .  
Bzgl. einer Karte  $\kappa$  auf  $M$  und  $\kappa'$  auf  $N$  haben wir für  $g + h$  in der Karte  $(\kappa, \kappa')$ :

$$(f^2 g + h)_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$$

**Satz II.1.10.** (*Globale Existenz Riemannscher Metriken*) Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Riemannsche Metrik auf  $M$ .

*Beweis.* Idee:\* Lokal existiert eine Riemannsche Metrik immer. Zusammenkleben zu einer globalen Metrik mittels einer Partition der Eins.

Sei  $\{\kappa_i: U_i \rightarrow V_i\}$  ein Atlas von  $M$ . Auf jedem  $U_i$  wählen wir eine Riemannsche Metrik  $g_i$  wie in Beispiel II.1.4. Sei  $\rho_i$  eine Zerlegung der Eins zu  $\{U_i\}_i$ . Wir setzen  $g = \sum_i \rho_i g_i$ . Dann ist  $g_p = \sum_i \rho_i(p)(g_i)_p$  für jedes  $p \in M$  wieder eine symmetrische Bilinearform. Weiterhin ist  $g_p(X, X) \geq 0$  für alle  $X \in T_p M$ , da  $\rho_i \geq 0$  gilt. Gilt  $g_p(X, X) = 0$ , muss wegen Nichtnegativität der einzelnen Summanden  $\rho_i(p)(g_i)_p(X, X) = 0$  für alle  $i$  sein. Sei  $i_0$  derart, dass  $\rho_{i_0}(p) \neq 0$  gilt. Dann ist  $(g_{i_0})_p(X, X) = 0$  und damit  $X = 0$ . Also ist  $g_p$  positiv definit. Glattheit folgt da Summe/Produkt glatter Abbildungen.  $\square$

**Bemerkung II.1.11.** Nicht auf jeder glatten Mannigfaltigkeit  $M^m$  gibt es eine semi-Riemannsche Metrik mit Index  $\notin \{0, m\}$ , z.B. gibt es keine Lorentzmetrik auf  $S^2$ .

**Beispiel II.1.12.** Auf  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit Koordinaten  $(\varphi, \theta)$  ist z.B.  $(d\varphi)^2 + (d\theta)^2$  eine Riemannsche Metrik – die Produktmetrik, und  $(d\varphi)^2 - (d\theta)^2$  eine Lorentzmetrik.

**Definition II.1.13.** Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann heißt ein lokaler Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$  *lokale Isometrie*, falls

$$d_p \varphi: (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{\varphi(p)} N, h_{\varphi(p)})$$

für alle  $p \in M$  eine Isometrie ist, also für die

$$g_p(X, Y) = h_{\varphi(p)}(d_p \varphi(X), d_p \varphi(Y)) \quad \text{für alle } X, Y \in T_p M \text{ gilt.}$$

Ist  $\varphi$  schon ein Diffeomorphismus, heißt  $\varphi$  *Isometrie*.

**Beispiel II.1.14.** Seien  $(M = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, dt^2)$ , vgl. Beispiel II.1.21, und  $(N = \mathbb{R}, dx^2)$  gegeben. Dann ist Produktmannigfaltigkeit  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  diffeomorph zum Zylinder im  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Mit der Produktmetrik ist  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  auch isometrisch zum Zylinder  $Z$  (mit der induzierten Metrik = 1. Fundamentalform), vgl. ÜA 23(i).  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times_f \mathbb{R}$  mit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist isometrisch zur Rotationsfläche  $\{(f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi, z \in \mathbb{R}\}$ .

Anders herum kann man einen lokalen Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$  und eine semi-Riemannsche Metrik  $h$  auf  $N$  auch nutzen, um eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$  zu definieren, für die  $\varphi$  eine lokale Isometrie wird:

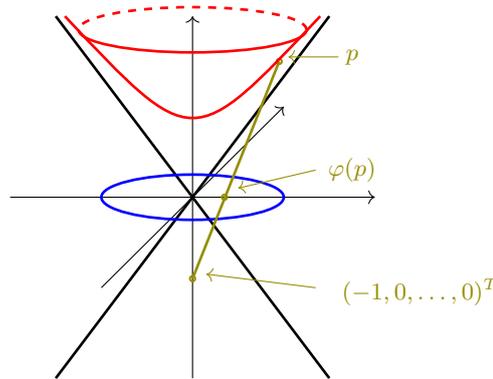
**Definition II.1.15.** Ist  $\varphi: M \rightarrow N$  ein lokaler Diffeomorphismus und  $h$  eine semi-Riemannsche Metrik auf  $N$ , so heißt die semi-Riemannsche Metrik  $\varphi^* h$  auf  $M$  *Pull-Back* von  $h$ , wobei

$$(\varphi^* h)_p := (d_p \varphi)^*(h_{\varphi(p)}).$$

**Bemerkung II.1.16.**  $\varphi^* h$  ist die eindeutig bestimmte semi-Riemannsche Metrik auf  $M$ , für die  $\varphi$  eine lokale Isometrie ist.

\*Alternativ kann man auch den Whitney'schen Einbettungssatz benutzen, erhält eine Einbettung  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  und auf  $f(M)$  die induzierte Metrik  $g$ . Der Pullback  $\varphi^* g$ , siehe Definition II.1.15, ist dann eine Riemannsche Metrik auf  $M$ ,

**Beispiel II.1.17.** Wir betrachten die stereographische Projektion  $\varphi$  des hyperbolischen Raumes  $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  auf den Einheitsball  $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dabei ist  $\varphi(p)$  der Schnitt der Geraden von  $p$  zum Punkt  $(-1, 0, \dots, 0)^T$  mit der Ebene  $\{x_1 = 0\}$ .



Damit ist  $\varphi$  gegeben durch

$$\varphi: \mathbb{H}^n \rightarrow B_1(0), \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1+x^1} \begin{pmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus. Sei  $g$  die auf  $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  durch die Lorentz-Metrik des  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierte Riemannsche Metrik. Dann gilt  $(\varphi^{-1})^*g(y) = \frac{4}{1-\|y\|_E^2}g_E$ , s. Übungsaufgabe 21. Das Pullback der hyperbolischen Metrik auf  $B_1(0)$  ist also konform zur euklidischen Metrik – man sagt: Der hyperbolische Raum ist *konform flach*. Man nennt  $(B_1(0), (\varphi^{-1})^*g)$  das *Poincaresche Ballmodell des hyperbolischen Raumes*.

**Definition II.1.18.** Die Menge aller Isometrien  $\varphi: M \rightarrow M$  von  $(M, g)$  bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe - die sogenannte *Isometriegruppe*  $\text{Isom}(M, g)$  von  $M$ .

**Beispiel II.1.19.** (i) [4, Satz I.6.8] Der euklidische Raum:

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_E) = \text{Gruppe der eukl. Bewegungen} = \{\varphi(x) = Ax + b \mid A \in \mathbb{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{O}(n)$$

(ii) Der Minkowski-Raum:

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\mathbb{R}^{n,1}, g_{\text{Minkowski}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_L) &= \text{Gruppe der Poincare-Transformationen} \\ &= \{\varphi(x) = Ax + b \mid A \in \mathbb{O}(n, 1), b \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \mathbb{R}^{n,1} \rtimes \mathbb{O}(n, 1) \end{aligned}$$

(iii) [4, Satz IV.2.15]  $\text{Isom}(S^n, g_{st}) = \mathbb{O}(n+1)$

(iv) [4, Satz II.4.2]  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n, g_{st}) = \mathbb{O}(n, 1)$

**Satz II.1.20.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $G$  Untergruppe von  $\text{Isom}(M, g)$ , welche frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $M$  operiert. Dann existiert genau eine semi-Riemannsche Metrik  $\hat{g}$  auf dem Orbitraum  $M/G$ , so dass die Projektion  $\pi: (M, g) \rightarrow (M/G, \hat{g})$  lokale Isometrie ist.

*Beweis.* Sei  $[p] \in M/G$ . Da  $\pi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist  $d_p\pi: T_pM \rightarrow T_{[p]}M/G$  ein Vektorraumisomorphismus. Damit können wir auf  $T_{[p]}M/G$  ein Skalarprodukt definieren als

$$(\hat{g}_{\pi(p)})(d_p\pi(v), d_p\pi(w)) := g_p(v, w).$$

Wenn  $\hat{g}$  eine semi-Riemannsche Metrik ist, dann folgt direkt aus der Definition dieser Metrik, dass  $\pi$  eine lokale Isometrie ist. Es bleibt also zu zeigen, dass  $\hat{g}$  eine semi-Riemannsche Metrik ist.

Zuerst bemerken wir, dass die Definition von  $\hat{g}_{\pi(p)}$  nicht vom Repräsentanten  $p$  von  $[p]$  abhängt: Sei  $q = h \cdot p = \rho(h)(p)$ . Dann ist  $d_p\pi = d_q\pi(d_p\rho(h))$  wegen  $\pi = \pi \circ \rho(h)$ . Da  $G$  isometrisch wirkt, folgt die Behauptung.

Es ist klar, dass  $\hat{g}_{\pi(p)}$  für jedes  $p \in M$  eine nichtentartete symmetrische Bilinearform ist. Sei nun  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  um  $U$ . O.B.d.A. sei  $U$  derart, dass  $U \cap g(U) = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$ , vgl. Satz I.3.40. Dann

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

ist  $\bar{\kappa} := \kappa \circ \pi^{-1}|_U : \pi(U) \rightarrow V$  eine Karte von  $M/G$  um  $[p]$ . Die zugehörigen Koordinaten bezeichnen wir mit  $\bar{x}^i$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Metrikoeffizienten  $(\hat{g}_{ij})([q]) = \hat{g}_{[q]=\pi(q)}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_{[q]}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}|_{[q]})$  glatt sind. Nach Konstruktion von  $\bar{\kappa}$  gilt  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_{[q]} = d_p\pi(\frac{\partial}{\partial x^i}|_q)$  und damit

$$(\hat{g}_{ij})([q]) = \hat{g}_{[q]=\pi(q)}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_{[q]}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}|_{[q]}\right) = g_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_q, \frac{\partial}{\partial x^j}|_q\right) = g_{ij}(q).$$

□

**Beispiel II.1.21.** Wir betrachten  $(\mathbb{R}, (dx)^2)$  mit der  $\mathbb{Z}$ -Wirkung  $(z, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mapsto x + z\mathbb{R}$ . Dann ist nach  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  eine Mannigfaltigkeit, vgl. Beispiel I.3.41. Nach letztem Satz erhalten wir auf  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  auch eine Riemannsche Metrik, so dass  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  eine lokale Isometrie ist. Diese Metrik auf  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  hat in der Koordinate  $x$  dann auch die Form  $(dx)^2$ . Nach ÜA 15 ist  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  diffeomorph zu  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Mit obiger Metrik ist  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sogar isometrisch zu  $S^1$ , vgl. ÜA 23(i).

**Beispiel II.1.22.** Die sogenannte *Fubini-Study Metrik* ist die Metrik auf dem  $\mathbb{R}P^n$ , die mittels der Standardmetrik auf  $S^n$  und der kanonischen Projektion  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  induziert wird.

**Satz II.1.23** (Isometrische Einbettungssätze). \*

- (i) (Nash) Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  ist isometrisch in einen  $\mathbb{R}^n$  einbettbar.
- (ii) (Greene) Jede (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  ist isometrisch in einen  $\mathbb{R}^{n_1, n_2}$  einbettbar. (Hier steht  $\mathbb{R}^{n_1, n_2}$  für den  $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$  mit der Metrik  $-(dx^1)^2 - \dots - (dx^{n_2})^2 + (dx^{n_2+1})^2 + \dots + (dx^{n_2+n_1})^2$ .)

Vorl. 11

## II.2. Ableitung von Vektorfeldern - Levi-Civita-Zusammenhang

Wir betrachten eine Untermannigfaltigkeit  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  auf der sich ein Teilchen auf einer Kurve  $c(t)$  bewegen soll. Wirkt auf dem Teilchen gar keine Kraft, ist die Beschleunigung  $\ddot{c} \equiv 0$  und das Teilchen bewegt sich auf einer Gerade - also im Allgemeinen von  $M$  herunter. Soll das Teilchen aber auf  $M$  bleiben, muss es eine Anteil der Beschleunigung geben, der es auf  $M$  hält - wie z.B. die Radialkraft bei einer Bewegung auf dem Kreis. Dieser Anteil von  $\ddot{c}$  steht zu jeder Zeit senkrecht zur Fläche. Der noch übrig bleibende tangential Anteil, sorgt für die Beschleunigung innerhalb der Fläche. Möchte man also z.B. die geradlinig gleichförmige Bewegung im  $\mathbb{R}^n$  (also  $\ddot{c} = 0$ ) für  $M$  verallgemeinern, sucht man Kurven, deren tangentialer Anteil der Beschleunigung gleich 0 (solche Kurven heißen Geodätische auf  $M$  - dazu später mehr).

Wir suchen also einen Ausdruck für den tangential Anteil von  $\ddot{c}$ :

Wir werden als erstes  $\ddot{c} = D_{\dot{c}}\dot{c}$  verstehen, wobei  $D$  die Richtungsableitung ist:

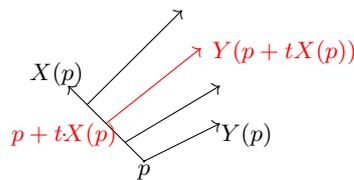


Abb. II.1.: Die Richtungsableitung im  $\mathbb{R}^n$

Seien  $X$  und  $Y$  glatte Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Richtungsableitung  $D_X Y$  wieder ein Vektorfeld und gegeben durch

$$(D_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tX(p)) - Y(p)}{t}$$

\*1956 bewies John Nash, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum isometrisch eingebettet werden kann. (Interview mit John Nash: [https://www.simonsfoundation.org/science\\_lives\\_video/john-nash-2/?chapter=21](https://www.simonsfoundation.org/science_lives_video/john-nash-2/?chapter=21) (Teil zum Einbettungsproblem))

Robert Greene bewies dieses Resultat für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Beachte: Ist  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, so ist  $M$  nicht notwendigerweise isometrisch in einen  $\mathbb{R}^{n,1}$  einbettbar - da eine allgemeine Lorentz-Mannigfaltigkeit Zeitschleifen haben kann.

Der Ableitung  $D_X Y$  im Punkt  $p$  hängt nicht von dem ganzen Vektorfeld  $X$  und  $Y$  ab, sondern nur von  $X(p)$  und den Werten von  $Y$  auf der Kurve  $t \mapsto p + tX(p)$  in der Nähe von  $t = 0$  ab. Es gilt sogar:

$$(D_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\gamma(t)) - Y(\gamma(0))}{t}$$

\* für jede Kurve  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = X(p)$ . Damit kann man  $D_{\dot{c}}\dot{c}$  verstehen:  $\dot{c}(t)$  ist ein Vektor im Punkt  $c(t)$ . Man wählt formal  $\gamma(s) = c(t+s)$ ,  $X(c(t)) = Y(c(t)) = \dot{c}(t)$  und erhält  $D_{\dot{c}}\dot{c}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dot{c}(t+s) - \dot{c}(t)}{s} = \ddot{c}(t)$ .

Allgemein auf einer Untermannigfaltigkeit  $M^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ? Seien  $X, Y: M \rightarrow TM$  glatte Vektorfelder (tangente Vektorfelder der Untermannigfaltigkeit). Dann wählt man für  $\gamma$  eine Kurve mit Werten in  $M$ , womit  $Y(\gamma(t))$  und damit  $(D_X Y)(p)$  wohldefiniert sind.

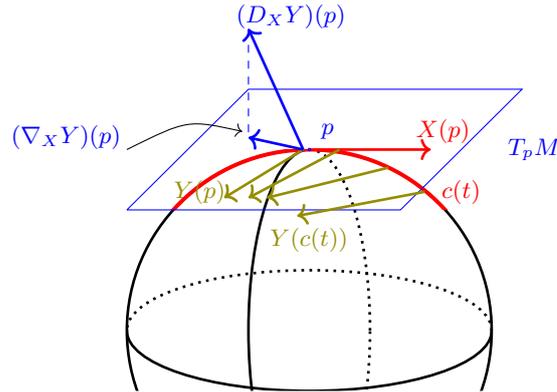


Abb. II.2.: Projektion der Richtungsableitung auf den Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

Allerdings ist  $(D_X Y)(p)$ , wie auch schon  $\ddot{c}(0)$ , zumeist kein Element mehr in  $T_p M$ . Um trotzdem ein Vektorfeld auf  $M$  zu erhalten, benutzen wir die Orthogonalprojektion  $\text{pr}_{T_p M}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  und erhalten die Abbildung

$$(\nabla_X Y)(p) := \text{pr}_{T_p M}((D_X Y)(p)).$$

(Der tangente Anteil von  $\ddot{c}$  ist in dieser Schreibweise:  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ .)

Die Abbildung  $\nabla$  bildet zwei Vektorfelder  $X$  und  $Y$  wieder auf ein (tangentes) Vektorfeld  $\nabla_X Y$  ab und erbt dabei einige wichtige Eigenschaften der Richtungsableitung:

**Lemma II.2.1.** Sei  $M^n \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Seien  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und seien  $X, Y: M \rightarrow TM$  glatte Vektorfelder. Dann gilt

(i)  $\nabla$  ist linear in beiden Argumenten.

(ii) (Tensoriell in der ersten Komponente)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$  (also  $(\nabla_{fX} Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)_p$ ).

(iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fY) = df(X)Y + f \nabla_X Y, \quad \text{also } (\nabla_X(fY))_p = d_p f(X(p))Y(p) + f(p)(\nabla_X Y)_p.$$

(iv) (metrisch (= kompatibel mit der Metrik)) Für alle glatten Vektorfelder  $X, Y, Z$  auf  $M$  gilt:

$$Z.g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

wobei  $Z.f := Z(f) := df(Z): M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto d_p f(Z(p))$  für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  (Hier ist  $f = g(X, Y)$ , vgl. Übungsaufgabe 15.) ist.

\*Da bei uns alle Funktionen glatt sind, ist  $f$  insbesondere differenzierbar und die Richtungsableitungen linear in der Richtung in die abgeleitet wird. Insbesondere kann man für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  die Richtungsableitung auch mit Hilfe der Jacobimatrix  $D_p f$  als  $D_p f(X) = D_X f(p)$  ausdrücken.

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

(v) (torsionsfrei) Für alle Karten  $\kappa: U \rightarrow V$  mit  $p \in U$  und Koordinaten  $x^i$  auf  $V$  gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

für alle  $i$  und  $j$ .

**Bemerkung II.2.2.** Auch  $df(Z)$  ist als Hintereinanderausführung  $M \xrightarrow{Z} TM \xrightarrow{df} T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}$  glatter Abbildungen selbst wieder glatt.

*Beweis von Lemma II.2.1.* (i)-(iii) Verwenden der Eigenschaften für  $D$  und Projektion auf den Tangentialraum. (iv) folgt aus  $Z \cdot \langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle$  und  $(\text{id} - \text{pr}_{T_p M})((D_Z X)(p)) \perp T_p M$ .

(v) Sei  $F = \kappa^{-1}: V \rightarrow W$  mit  $W \cap M = U$  eine lokale Parametrisierung mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^m$ . Dann ist  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}$  und

$$D_{X=\frac{\partial}{\partial x^i}} Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} (Y(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i + t, x^{i+1}, \dots, x^m) - Y(x^1, \dots, x^m)).$$

Also insbesondere

$$D_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Demnach ist

$$D_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j}(p) = D_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \frac{\partial F}{\partial x^i}(p)$$

einfach der Satz von Schwarz und (v) dessen Projektion auf den Tangentialraum.  $\square$

**Bemerkung II.2.3.**

(a) Wie auch  $(D_X Y)(p)$  hängt als Projektion auch  $(\nabla_X Y)(p)$  nur vom Wert von  $X$  in Punkt  $p$  aber von  $Y$  in einer Umgebung von  $p$  abhängt (diese Eigenschaft folgt auch nochmals aus den Eigenschaften (ii) und (iii) des letzten Lemmas). Insbesondere ist damit der Ausdruck  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$  auch sinnvoll, obwohl  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  nur Vektorfelder auf  $U$  sind, und ergibt wieder ein Vektorfeld auf  $U$ .

(b) (v) gilt nicht für allgemeine Vektorfelder, weder für  $D$  noch für  $\nabla$ . Beispiel:  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ ,  $Y = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} = x^1 X$ , denn

$$D_Y X \stackrel{(ii)}{=} x^1 D_X X \stackrel{(v)}{=} 0, \quad D_X Y \stackrel{(iv)}{=} x^1 D_X X + X(x^1)X = X.$$

(c) Zur Notation  $X(f)$  für glattes  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ : Falls  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$  ein Koordinatenvektorfeld bzgl. einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  ist, dann ist für alle  $p = \kappa(u) \in U$

$$df(X)(p) = d_p f(X(p)) = d_p f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = d_p f([t \mapsto \kappa(u + te_i)]_p) = \underbrace{[t \mapsto (f \circ \kappa)(u + te_i)]}_{\text{Kurve in } \mathbb{R}}|_{f(p)} = \frac{\partial(f \circ \kappa)}{\partial x^i}(u).$$

### $\nabla$ für glatte Mannigfaltigkeiten?

**Notation:** Die Menge der glatten reellwertigen Funktionen auf  $M$  wird mit  $C^\infty(M)$  und die der glatten (tangentialen) Vektorfelder auf  $M$  mit  $\mathfrak{X}(M)$  bezeichnet.

**Definition II.2.4.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , die die Bedingungen (i)-(iii) aus Lemma II.2.1 erfüllt heißt *affiner Zusammenhang* auf  $M$ . Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang  $\nabla$ . Erfüllt  $\nabla$  (iv) und (v), so heißt  $\nabla$  *Levi-Civita-Zusammenhang* auf  $(M, g)$ .

**Bemerkung II.2.5.** (a) Bemerkung II.2.3 gilt immer noch.

(b) Gilt (v) in einer Karte in einem Punkt  $p$  so auch in jeder anderen Karten, die  $p$  enthält: Seien  $x^1, \dots, x^m$  bzw.  $y^1, \dots, y^m$  die Koordinaten zu zwei solcher Karten. Wir benutzen die Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} &\stackrel{(I.3)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left( \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &\stackrel{(i)+(iii)}{=} \sum_k \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &\stackrel{(i)+(I.3)}{=} \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j}}_{\text{symmetrisch in } i \text{ und } j} + \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &\stackrel{(v)}{=} \sum_k \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^j \partial y^i} + \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
 &\stackrel{\text{alles rückwärts}}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}.
 \end{aligned}$$

**Definition II.2.6.** (Christoffelsymbole) Für eine Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  seien die Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Vorl. 12

**Bemerkung II.2.7.** Da für jedes  $p \in U$  die  $\frac{\partial}{\partial x^k}|_p$  eine Basis von  $T_p M$  bilden, sind die  $\Gamma_{ij}^k$  eindeutig bestimmt. Weiterhin bestimmen die Christoffelsymbole  $\nabla$  auf  $U$  eindeutig: Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^m$ . Dann ist  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  und  $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  für geeignete Funktionen  $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$ . Wir haben auf  $U$ :

$$\begin{aligned}
 \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &\stackrel{(i)+(ii)}{=} \sum_{i,j} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \sum_{i,j} X^i \left( Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \underbrace{\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}}_{\text{das war kurz für } \frac{\partial(Y^j \circ \kappa)}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &\stackrel{\text{Def. II.2.6}}{=} \sum_{i,j} X^i \left( \sum_k Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \sum_{i,k} X^i \left( \sum_j Y^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.
 \end{aligned}$$

**Satz II.2.8.** Für jede semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit existiert genau ein Levi-Civita Zusammenhang.

*Beweis. Eindeutigkeit:* Sei  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in U$ . Wir zeigen, dass mit den Eigenschaften eines Levi-Civita Zusammenhangs die Christoffelsymbole eindeutig bestimmt sind:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}}_{\text{Vektorfeld auf } U} \left( \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{\in C^\infty(U)} \right) \\
 &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= \sum_l g\left(\Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
 &= \sum_l \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}.
 \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} &= \sum_l \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \Gamma_{jk}^l g_{il} \\
 \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} &= \sum_l \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{ij}^l g_{kl}.
 \end{aligned}$$

Es gilt  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  wegen der Torsionsfreiheit. Damit haben wir

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = 2 \sum_l \Gamma_{ik}^l g_{lj}.$$

Sei  $g^{ij}$  die zu  $g_{ij}$  inverse Matrix, also  $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$ . Dann erhalten wir

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} \sum_m g^{jm} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right).$$

Kurz (mit  $g_{ij,m} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$ )

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \tag{II.3}$$

*Existenz:* Wir definieren  $\Gamma_{ij}^k$  wie oben und erhalten dadurch  $\nabla$ . Es bleibt nachzurechnen, dass  $\nabla$  dann wirklich alle Eigenschaften aus Lemma II.2.1 erfüllt.  $\square$

**Bemerkung II.2.9.** (i) Aus (II.3) folgt insbesondere, dass die  $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind.

(ii) Aus der Eindeutigkeit des Levi-Civita Zusammenhang folgt insbesondere, dass für  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  mit induzierter Metrik  $\nabla$  genau die Projektion der Richtungsableitung  $D$  auf den Tangentialraum ist.

**Beispiel II.2.10.** Sei  $(M = \mathbb{R}^2, g_E)$ . Für die euklidischen Koordinaten gilt  $g_{ij} = \delta_{ij}$  und damit  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Für Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  haben wir, siehe Beispiel II.1.6:

$$g_{ij}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

Christoffelsymbole (da  $g$  Diagonalgestalt hat):

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \\
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} 1(0 + 0 - 0) = 0
 \end{aligned}$$

Analog  $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$  und

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (0 + 2r - 0) = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} 1(0 + 0 - 2r) = -r
 \end{aligned}$$

Also gilt z.B.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Zum Vergleich:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \nabla_{-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}} \left( -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \dots = -r \frac{\partial}{\partial r}.$$

**Bemerkung II.2.11.** Für Untermannigfaltigkeiten  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ : Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann ist

$$D_X Y(p) = \underbrace{\text{pr}_{T_p M}(D_X Y)(p)}_{=\nabla_X Y(p) \in T_p M} + \underbrace{(1 - \text{pr}_{T_p M})(D_X Y)(p)}_{=: II(X, Y)(p) \in N_p M}$$

Die Abbildung  $II: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow NM$  heißt *zweite Fundamentalform von  $M^*$* . Im Fall von Hyperflächen,  $n = m + 1$ , ist  $II(X, Y)(p)$  parallel zum Normalenvektor  $\nu_p$ .

Für eine lokale Parametrisierung  $F: U \rightarrow V$  von einer Hyperfläche  $M^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^m$  haben wir die *Gaußgleichung* oder *Gaußsche Ableitungsgleichung*:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + h_{ij} \nu$$

(In ElemDiffgeo definiert man gewöhnlich direkt:  $h_{ij} = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \rangle$ .)

### II.3. Bewegungsgleichungen

Ein Teilchen mit Masse  $m$  werde durch ein Kraftfeld  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer Kurve  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bewegt. Dann ist nach Newton  $F = m\ddot{c}$ . Ein Teil dieser Kraft sei dafür verantwortlich, dass das Teilchen sich auf einer Untermannigfaltigkeit  $M$  bewegt, z.B. gibt es Zwangskräfte die auf einen Mitfahrer in einem Karussell wirken, damit er auf der Kreisbahn bleibt. Es sei also  $F = F_1 + F_2$ , wobei  $F_1$  nur dafür verantwortlich sei, das Teilchen auf  $M$  zu halten. Es gelte also  $F_1(p) \perp T_p M$  für alle  $p \in M$ .

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle unsere auftretenden Kräfte in  $F_2$  konservativ sind, d.h. es ist  $F = -\nabla V$  für eine Funktion  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die Potential genannt wird (z.B. kommt die Gravitationskraft von einem Potential).

Da wir wissen, dass das Teilchen sich nur auf  $M$  bewegt, ist die Bewegung mittels

$$m \text{pr}_{T_{c(t)} M} \ddot{c}(t) (= m \nabla_{\dot{c}} \dot{c}) = -\text{pr}_{T_{c(t)} M} \nabla V \tag{II.4}$$

bestimmt.

Sei  $\kappa: U \subseteq M \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$ . Die Koordinaten auf  $U'$  nennen wir  $q^i$ . Dann ist  $c(t) = \kappa^{-1}(q(t))$  und damit  $\dot{c}(t) = \dot{q}^i \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial q^i}(q(t)) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} |_{c(t)}$ .

Das Potential sei in den Koordinaten als  $\tilde{V}(q) = V(\kappa^{-1}(q))$  gegeben, also  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} = \langle \nabla V, \frac{\partial}{\partial q^\ell} \rangle$ . Es gilt  $\text{pr}_{T_{c(t)} M} \nabla V = b^j \frac{\partial}{\partial q^j}$ . Skalarprodukt mit  $\frac{\partial}{\partial q^\ell}$  liefert:  $(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} =) \langle \nabla V, \frac{\partial}{\partial q^\ell} \rangle = b^j g_{j\ell}$  und damit  $b^j = g^{j\ell} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell}$ .

Nach Bemerkung II.2.7 ist (II.4) in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \dot{q}^i \dot{q}^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \frac{\partial}{\partial q^j} + \dot{q}^i \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} = (\Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j + \ddot{q}^k) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

und damit haben wir

$$m(\ddot{q}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{q}^i \dot{q}^k) \frac{\partial}{\partial q^j} = -g^{j\ell} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \frac{\partial}{\partial q^j}, \tag{II.5}$$

Wir wollen nun diese Gleichung mittels Energien schreiben. Dazu betrachten die kinetische Energie  $T$  des Teilchen als Funktion von  $q$  und  $\dot{q}$ :

$$T(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{m}{2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \frac{m}{2} g_{ij}(q(t)) \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t).$$

\* $NM$  war das Normalenbündel von  $M$ .

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden die Zeitabhängigkeit nicht mehr explizit hin. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q^\ell} &= \frac{m}{2} g_{ij,\ell} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} &= m g_{\ell j} \dot{q}^j \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} &= m g_{\ell j,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + m g_{\ell j} \ddot{q}^j.\end{aligned}$$

Wir definieren die *Lagrangefunktion*  $L(q, \dot{q}) := T(q, \dot{q}) - \tilde{V}(q)$  und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\ell} - \frac{\partial L}{\partial q^\ell} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} - \frac{\partial T}{\partial q^\ell} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \\ &= m g_{\ell k,i} \dot{q}^i \dot{q}^k + m g_{\ell j} \ddot{q}^j - \frac{m}{2} g_{ik,\ell} \dot{q}^i \dot{q}^k + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \\ &= m g_{\ell j} \left( \ddot{q}^j + \frac{1}{2} g^{jr} \dot{q}^i \dot{q}^k (g_{ir,k} + g_{kr,i} - g_{ik,r}) \right) + g_{\ell j} g^{jr} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^r} \\ &= g_{\ell j} \underbrace{\left( m(\ddot{q}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{q}^i \dot{q}^k) + g^{jr} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^r} \right)}_{\text{(II.5)}}.\end{aligned}$$

Wir haben also nachgerechnet, dass (II.5) gleich der Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\ell} = \frac{\partial L}{\partial q^\ell} \quad \ell = 1, \dots, m \quad \text{(II.6)}$$

ist. Insbesondere haben wir gesehen, dass man beim Ausrechnen der Lagrangegleichung implizit die Christoffelsymbole mit ausrechnet. Desweiteren erhält man die Gleichung  $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$  (also die Geodätengleichung) für  $V = 0$  und  $m = 1$ .

**Vorl. 13**

Als nächsten wollen wir die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* ableiten. Das werden im Gegensatz zur Lagrangegleichung erste Ordnung Differentialgleichungen sein. Dazu führen wir Hilfsvariablen ein - die *verallgemeinerten Impulse*:  $p_i := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m g_{ij} \dot{q}^j$ . Dann ist  $\dot{q}^j = \frac{1}{m} g^{ji} p_i$  und wir betrachten nun die kinetische Energie in Abhängigkeit von  $q^i$  und  $p_i$ , statt bisher von  $q^i$  und  $\dot{q}^i$ :  $\tilde{T}(q, p) = T(q, \dot{q}(p))$ . Wir definieren die *Hamiltonfunktion*  $H(q, p) = \tilde{T}(q, p) + \tilde{V}(q)$ .

Dann kann man nachrechnen, dass die Lagrangegleichung (II.6) dann äquivalent zu den *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i},\end{aligned} \quad \text{(II.7)}$$

einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung, ist, vgl. ÜA 27. Im Falle von Geodäten, also  $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ , nennt man die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen *geodätischen Fluß*.

Die Lagrangegleichungen sind gut, wenn man direkt die Bewegungsgleichungen ausrechnen will. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind etwas besser, wenn man Erhaltungsgrößen, vgl. ÜA 28, studieren will. Insbesondere ist  $H$  selbst eine Erhaltungsgröße, da  $H(q^i(t), p_i(t))$  wegen

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = -\dot{p}_i \dot{q}^i + \dot{q}^i \dot{p}_i = 0$$

konstant in  $t$  ist.

**Beispiel II.3.1.** Wir betrachten eine Masse  $m$ , die an einem Fadenpendel der Länge  $r_0$  hängt. Wir nehmen an, dass der Faden 'starr' ist und damit sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt. D.h.  $M = \{(x, y)^T \in$

$\mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r_0^2$ . Das System befinde sich im Gravitationsfeld der Erde, d.h. wir haben näherungsweise als Potential:  $V(x, y) = mgy$  mit  $g$  der Erdbeschleunigung. Die kinetische Energie ist  $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ . Als Koordinaten auf  $M$  verwenden wir die Winkelkoordinate  $\varphi$  – es sei  $c(t) = (x(t), y(t))^T = r_0(\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))^T$ . Also ist  $T(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}r_0^2\dot{\varphi}^2$  und  $\tilde{V}(\varphi) = mgr_0 \cos \varphi$ . Für die Lagrangegleichung erhalten wir also

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr_0^2 \ddot{\varphi} - mgr_0 \sin \varphi.$$

Dabei haben wir implizit mit ausgerechnet, dass  $\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0$  ist.

Für den verallgemeinerten Impuls haben wir  $p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr_0^2 \dot{\varphi}$  und damit  $H = \frac{m}{2}r_0^2 \left(\frac{1}{mr_0^2} p_\varphi\right)^2 - mgr_0 \cos \varphi = \frac{p_\varphi^2}{2mr_0^2} - mgr_0 \cos \varphi$ .

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind also

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgr_0 \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr_0^2}.$$

**Bemerkung II.3.2.**

- (i) Was sind die  $p_i$  für Objekte? Wegen  $p_i = mg_{ij}\dot{q}^j$ , ist  $p_i$  die  $i$ -te Komponente der linearen Abbildung  $v \in T_{c(t)}M \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), v)$ , also eines Elementes des Kotangententialraumes  $T_{c(t)}^*M$ .
- (ii) Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt,  $p \in M$ . Dann ist sowohl  $d_p f \in T_p^*M$  als auch  $g_p(Y(p), \cdot) \in T_p^*M$  für jedes  $Y(p) \in T_pM$ . Da  $g_p$  nicht degeneriert ist, gibt es genau ein  $Y(p) \in T_pM$  mit  $g_p(Y(p), \cdot) = d_p f(\cdot)$ . Das Vektorfeld  $Y$  hängt glatt von  $p$  ab, da in lokalen Koordinaten  $Y(p) = Y^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  gilt:

$$\begin{aligned} g_p(Y(p), \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p) &= d_p f(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p) \\ g_{ij}(p)Y^j(p) &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ Y^j(p) &= g^{ij}(p) \frac{\partial f}{\partial x^j}(p). \end{aligned}$$

Somit hängt  $Y^j$  glatt von  $p$  ab und nach Beispiel I.3.19 damit auch  $Y$ . Dieses eindeutig bestimmte glatte Vektorfeld nennt man *Gradient von  $f$*  (bzgl.  $g$ ) und schreibt  $Y = \text{grad}_g f$ .

Damit schreibt sich (II.4) bzw. (II.5) als  $m\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = -\text{grad}_g \tilde{V}$ .

## II.4. Geodätische

Wie schon erwähnt soll eine Geodätische ( $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ ) auf eine Untermannigfaltigkeit keinen Beschleunigungsanteil in der Mannigfaltigkeit haben. Stattdessen wird die Beschleunigung nur darauf verwendet, dass 'die Kurve  $c$  auf  $M$  bleibt' (Das ist die Beschleunigung die durch Zwangsbedingungen (= Bedingung, dass  $c$  eine Kurve in  $M$  ist) erzeugt wird.) Geodätische verallgemeinern geradlinig gleichförmige Bewegungen im  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel II.4.1.** Im  $(\mathbb{R}^n, g_E)$  bzw.  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Minkowski}})$  ist  $c(t)$  eine Geodätische, genau dann wenn  $\ddot{c}(t) = 0$ , also  $\dot{c}(t)$  konstant ist, also genau dann, wenn  $\ddot{c}(t) = 0$ , also genau dann wenn  $c(t) = p + tv$  für  $p, v \in \mathbb{R}^n$  ist.

**Bemerkung II.4.2** (Geodäte vs. Geodätische). Geodäten sind die Spuren von Geodätischen\*. Geodätische ist immer eine parametrisierte Kurve, vgl. letztes Beispiel: Eine Gerade im  $\mathbb{R}^n$  kann auch so parametrisiert werden, dass  $\ddot{c} \neq 0$  ist.

**Beispiel II.4.3.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit: Dann ist  $c: I \rightarrow M$  genau dann Geodätische, wenn  $\ddot{c}(t) \perp T_{c(t)}M$  für alle  $t$  gilt. Im Falle von Hyperflächen erhalten wir so:

$$c \text{ ist genau dann Geodätische, falls } \ddot{c}(t) \parallel \nu_{c(t)} \text{ für alle } t \text{ ist,} \tag{II.8}$$

---

\*und eine Berufsbezeichnung...

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

wobei  $\nu_{c(t)}$  ein Normalenvektor an die Hyperfläche im Punkt  $c(t)$  ist. Auf der  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ : Seien  $c_i$  nach Bogenlänge parametrisierte Kreise, d.h.  $|\dot{c}_i|^2 = 1^*$  wie im Bild II.3 links. Dann ist  $0 = \frac{d}{dt}|\dot{c}_i(t)|^2 = 2\langle \dot{c}_i(t), \ddot{c}_i(t) \rangle$ , also  $\dot{c}_i(t) \perp \ddot{c}_i(t)$  für alle  $t$ . Dann ist der Großkreis eine Geodäte, der Kleinkreis zum Beispiel nicht.

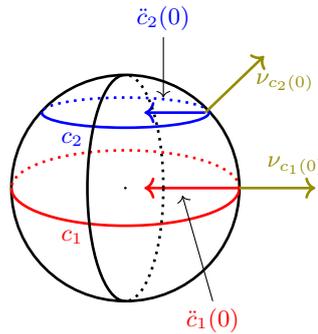


Abb. II.3.: Großkreise sind Geodäten

Analog definieren wir für abstrakte Mannigfaltigkeiten:

**Definition II.4.4.** Eine Kurve  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  heißt *autoparallel* oder *Geodätische*, falls  $\dot{c}$  parallel entlang  $c$  ist, also  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}(t) = 0$  ist.

**Bemerkung II.4.5.** Da für die Ableitung  $\nabla_{\dot{c}}\tilde{X}$  das Vektorfeld  $\tilde{X}$  nur entlang der Kurve  $c(t)$  definiert sein muss, schreibt man auch oft  $X(t) = \tilde{X}(c(t))$  und  $\frac{\nabla}{dt}X(t) := \nabla_{\dot{c}}\tilde{X}(c(t))$  und nennt  $\frac{\nabla}{dt}$  *kovariante Ableitung von  $X(t)$  entlang  $c$* .

**Bemerkung II.4.6.** (Geodätengleichung  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$  in Koordinaten) In einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  von  $M$  um  $p \in U$  mit Koordinaten  $(x^1, \dots, x^m)$  ist  $c(t) = \kappa^{-1}(x(t))$  und damit  $\dot{c}(t) = \sum_i \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)}$ . Dann gilt, vgl. (II.5),

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c} = 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad \ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t) = 0.$$

Dies ist ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Damit folgt mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgender Satz sofort:

**Satz II.4.7.** (*Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen*) Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes  $p \in M$  und jedes  $v \in T_p M$  existiert ein offenes Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  und eine Geodätische  $c: I \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$ . Für jede andere Geodätische  $\tilde{c}: \tilde{I} \rightarrow M$  mit  $\tilde{c}(0) = p$  und  $\dot{\tilde{c}}(0) = v$  ist  $c|_{I \cap \tilde{I}} = \tilde{c}|_{I \cap \tilde{I}}$ .

**Bemerkung II.4.8.** Geodäten sind im Allgemeinen nicht für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  definiert. Was kann schiefgehen: Man erreicht in endlicher Zeit das 'Ende' der Mannigfaltigkeit. Z.B. bei der offenen Einheitskreisschreibe mit euklidischer Metrik ist jede Geodätische, die im Ursprung mit Geschwindigkeit Norm eins startet, nur für die Zeiten  $t \in (-1, 1)$  definiert.

**Lemma II.4.9.** Für Geodätische  $c$  auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist

$$g(\dot{c}, \dot{c})(t) (= g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)))$$

konstant in  $t$ . Man sagt  $c$  ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

*Beweis.*

$$\frac{d}{dt}g(\dot{c}, \dot{c})(t) = \dot{c}.g(\dot{c}, \dot{c})(t) = g(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \dot{c}) + g(\dot{c}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}) = 0$$

\*Die Bezeichnung kommt von folgender Eigenschaft: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $|\dot{\gamma}(t)| = 1$  für alle  $t$ . Dann ist die Länge der Kurve  $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = b - a$ . Eine analoge Rechnung gilt für die Länge einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit, vgl. Bemerkung II.6.8.

wobei die erste Gleichheit in lokalen Koordinaten\* folgt mit  $(\dot{c} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(X, Y) &= \frac{d}{dt}(g_{ij}(c(t))X^i(c(t))Y^j(c(t))) = g_{ij,k}\dot{x}^k X^i Y^j + g_{ij}\dot{X}^i Y^j + g_{ij}X^i \dot{Y}^j \\ \dot{c}.g(X, Y) &= g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}}X, Y) + g_{c(t)}(X, \nabla_{\dot{c}}Y) = g_{ij}(\dot{X}^i + \dot{x}^\ell X^\ell \Gamma_{kl}^i)Y^j + g_{ij}X^i(\dot{Y}^j + \dot{x}^\ell Y^\ell \Gamma_{kl}^j) \\ &= g_{ij}\dot{X}^i Y^j + g_{ij}X^i \dot{Y}^j + \underbrace{\dot{x}^k X^i Y^j (g_{rj}\Gamma_{ik}^r + g_{ri}\Gamma_{jk}^r)}_{=g_{ij,k}}. \end{aligned}$$

□

**Folgerung II.4.10.** Die proportional der Bogenlänge parametrisierten Geraden in  $\mathbb{R}^n$  sind alle Geodätischen des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$ . Die proportional der Bogenlänge parametrisierten Großkreise sind alle Geodätischen der  $S^2$ .

**Bemerkung II.4.11.** (Unter Isometrien) Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Isometrie zwischen zwei semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  und  $(N, h)$ . Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Wir schreiben  $f_*X := df(X)$  (=Push-Forward des Vektorfeldes  $X$ ), d.h.  $(f_*(X))(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$ .  $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$  gilt, wobei  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $(M, g)$  und  $\bar{\nabla}$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $(N, h)$  ist, vgl. ÜA 32.

Ist  $Z(t)$  ein Vektorfeld entlang  $c(t)$ , dann gibt es ein Vektorfeld  $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $Z(t) = \tilde{Z}(c(t))$  und wir haben für  $p = f(c(t))$ , dass:  $(f_*\tilde{Z})(p) = d_{c(t)}f(\tilde{Z}(c(t))) = d_{c(t)}f(Z(t))$ . Für  $Z = \dot{c}$ :  $(f_*\tilde{Z})(p) = (f \circ c)'(t) =: (f_*\dot{c})(t)$ . Sei nun  $c$  eine Geodätische auf  $M$ . Dann gilt  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$  und damit  $\bar{\nabla}_{f_*\dot{c}}f_*\dot{c} = 0$ . Wegen  $(f_*\dot{c})(t) = (f \circ c)'(t)$  ist  $f \circ c$  eine Geodätische auf  $N$ .

Da 'geodätisch sein' lokal nachgerechnet wird, gilt das auch für lokale Isometrien.

Vorl. 14

**Folgerung II.4.12.** (Geodätische auf dem Zylinder und Kegel) Der Zylinder und der Kegel sind beide lokal isometrisch zur euklidischen Ebene. Damit ergeben sich die Geodäten wie in Abbildung II.5 links.

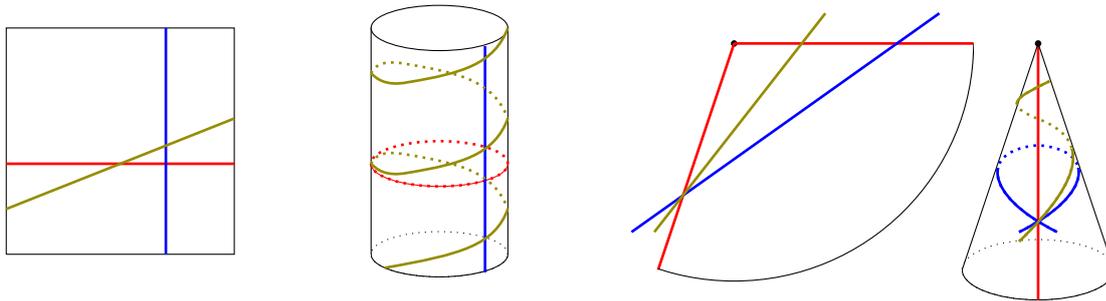


Abb. II.4.: Links: Die Abbildung  $\varphi: (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\sin x, \cos x, y)^T \in \text{Zylinder} \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine lokale Isometrie. (Hierbei ist  $\mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Metrik und der Zylinder mit der induzierten Metrik versehen.) Geodäten im  $\mathbb{R}^2$  sind Geraden. Ihre Bilder auf dem Zylinder sind Meridiane, Breitenkreise oder Schraubenlinien.

Rechts: Auch der Kegel ist lokal isometrisch zu euklidischen Ebene - links ist die Abwicklung des Kegels zu sehen. Hier können geodätische Schleifen entstehen, z.B. die blaue Geodäte im Bild. Ist der Winkel des abgerollten Kegels, also der Winkel an der Spitze links im Bild, größer als  $180^\circ$  gibt es keine geodätischen Schleifen mehr.

**Definition II.4.13.** Sei  $\psi: M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus. Dann heißt

$$\text{Fix}(\psi) := \{p \in M \mid \psi(p) = p\}$$

Fixpunktmenge von  $\psi$ .

\*alternativ kann man für  $t_0$  mit  $\dot{c}(t_0) \neq 0$  in einer Umgebung von  $t_0$  die Zeit  $t$  auch als eine Koordinate einer Karte auffassen und dann ist diese Gleichheit Bemerkung II.2.3(c).

**Lemma II.4.14.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\psi \in \text{Isom}(M, g)$ . Sei  $p \in \text{Fix}(\psi)$  und  $X \in T_p M$  mit  $d_p \psi(X) = X$ . Dann verläuft die Geodätische  $c: I \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = X$  ganz in  $\text{Fix}(\psi)$ .

*Beweis.* Da  $\psi$  eine Isometrie ist, ist  $\bar{c}(t) := \psi(c(t))$  wieder eine Geodätische. Wegen  $\bar{c}(0) = \psi(c(0)) = \psi(p) = p = c(0)$ ,  $\dot{\bar{c}}(0) = d_{c(0)} \psi(\dot{c}(0)) = d_p \psi(X) = X = \dot{c}(0)$  und der Eindeutigkeit der Geodätische bei gleichen Anfangswerten muss  $c = \bar{c}$  sein.  $\square$

**Folgerung II.4.15.** Meridiane von Rotationsflächen sind Geodätische, s. Abbildung II.5.

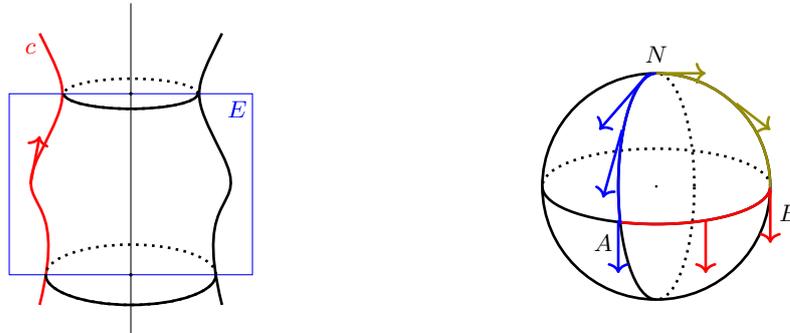


Abb. II.5.: Links: Sei  $E$  eine Ebene, die die Rotationsachse enthält. Die Spiegelung  $f$  an der Ebene  $E$  ist eine Isometrie der Rotationsfläche. Der Schnitt von  $E$  mit der Rotationsfläche sind nur zwei Kurven, Meridiane, die damit automatisch Geodätische sein müssen.  
Rechts: Paralleltransport ist wegabhängig

## II.5. Parallelverschiebung

Im  $\mathbb{R}^n$  kann man mittels der Parallelverschiebung Vektoren an verschiedenen Punkten vergleichen. Auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten soll das mit Hilfe des Levi-Civita Zusammenhangs geschehen:

**Definition II.5.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld  $X(t)$  heißt *parallel längs  $c$* , falls  $\frac{\nabla}{dt} X(t) = 0$  ist.

**Bemerkung II.5.2.** In lokalen Koordinaten haben wir  $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{c(t)}$  und damit

$$0 = \frac{\nabla}{dt} X(t) = \nabla_{\dot{c}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \dot{c}^i X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \dot{c}^i \frac{X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\dot{c}^i X^j \Gamma_{ij}^k + \dot{X}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{II.9})$$

**Beispiel II.5.3.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_E = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  oder  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Minkowski}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ . In kartesischen Koordinaten gilt  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Nach (II.9) ist somit  $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{c(t)}$  parallel genau dann, wenn  $\dot{X}^i(t) = 0$  für alle  $i$  ist, also genau dann, wenn  $X$  konstant ist. Paralleles Vektorfeld ist damit also eine Verallgemeinerung des Begriffes paralleler Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz II.5.4.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve, wobei  $I = (a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist. Sei  $t_0 \in I$ . Zu  $X_0 \in T_{c(t_0)} M$  gibt es genau ein paralleles Vektorfeld  $X$  längs  $c$  mit  $X(t_0) = X_0$ .

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Spur  $c(I)$  von  $c$  in einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  enthalten ist. Nach (II.9) und da die  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden, gilt  $\frac{\nabla}{dt} X = 0$  genau dann, wenn

$$\dot{X}^k = - \sum_{ij} \dot{c}^i \Gamma_{ij}^k X^j.$$

Das ist ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für  $X^i$ . Somit existiert dafür mit den Anfangswerten  $X^k(t_0) = X_0^k$  eine eindeutige Lösung. Wegen der Linearität ist diese Lösung auf ganz  $I$  definiert.

Sei nun  $c(I)$  nicht in einer Karte enthalten. Idee: Zusammenkleben lokaler Lösungen.

Wähle  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  mit  $[a_1, b_1] \subseteq I$ . Sei  $a_1 < a_2 < \dots < a_n = b_1$  so gewählt, dass für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  die Spur von  $c|_{[a_i, a_{i+1}]}$  in jeweils einer Karte  $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i$  enthalten ist. Das ist immer möglich, da  $c([a_1, a_n])$  kompakt ist. Sei  $t_0 \in [a_i, a_{i+1}]$ . Dann haben wir nach oben eine eindeutige Lösung  $X$  für alle  $t$  mit  $c(t) \in U_i$ . Damit erhalten wir  $X(a_i)$  bzw.  $X(a_{i+1})$ . Der Anfangswert  $X(a_i)$  liefert dann eine eindeutige Lösung von  $X_2$  in  $U_{i-1}$ . Wegen der Eindeutigkeit von oben der Lösung mit Anfangswert  $X(a_i)$  im Punkt  $c(a_i)$  muss  $X_2 = X$  auf  $U_{i-1} \cap U_i$  sein. So erhält man induktiv eine eindeutige Lösung für  $[a_1, b_1]$ . Wählt man nun eine Folge von  $a_1$ , bzw.  $b_1$  mit  $a_1 \rightarrow a$  und  $b_1 \rightarrow b$ . Dann erhalten wir eine Folge von Lösungen  $X$ , die auf einem immer größeren Intervall  $[a_1, b_1]$  definiert sind und auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich jeweils übereinstimmen. Damit haben wir die Existenz und Eindeutigkeit von  $X$  auf ganz  $(a, b)$ .

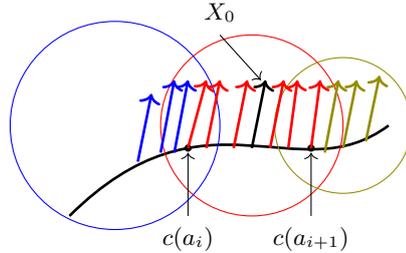


Abb. II.6.: Konstruktion des parallelen Vektorfeldes in den einzelnen Karten

□

**Definition II.5.5.** Sei  $c: I \rightarrow M$  wie oben. Seien  $t_0, t_1 \in I$ . Die Abbildung

$$\|_{t_0, t_1}^c: T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M, X_0 \mapsto X(t_1),$$

wobei  $X(t)$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $X(t_0) = X_0$  ist, heißt *Parallelverschiebung* längs  $c$ .

**Bemerkung II.5.6.** Die Parallelverschiebung stellt einen Zusammenhang zwischen Tangentialräumen an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit her. Beachte: Die Parallelverschiebung ist abhängig von der Kurve entlang derer verschoben wird.

Entlang einer Geodätischen ist ihr Tangentialvektorfeld immer parallel (Deshalb nennt man Geodätische auch autoparallele Kurven). Für Paralleltransport entlang einer Geodätischen wird nach Satz II.5.7 folgen, dass der Winkel zwischen dem parallelen Vektorfeld und der Geodätischen immer konstant sein. Außerdem darf sich die Länge des Vektorfeldes nicht ändern. Das bestimmt das parallele Vektorfeld im Falle von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten schon eindeutig. Im Bild II.5 rechts sehen wir den Paralleltransport entlang eines (stückweise glatten) Weges der durch drei Großkreisabschnitte (Großkreise sind Geodäten) gebildet wird.

**Satz II.5.7.**

- (a)  $\|_{t_0, t_1}^c$  ist eine lineare Abbildung.
- (b)  $\|_{t_0, t_1}^c: (T_{c(t_0)}M, g_{c(t_0)}) \rightarrow (T_{c(t_1)}M, g_{c(t_1)})$  ist eine Isometrie.
- (c)  $\|_{t_0, t_2}^c = \|_{t_1, t_2}^c \cdot \|_{t_0, t_1}^c$

*Beweis.* a) Linearität klar nach  $\frac{\nabla}{dt}(X + Y) = \frac{\nabla}{dt}X + \frac{\nabla}{dt}Y$

c) Klar nach Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des AWP für parallele Vektorfelder.

b) Sei  $X_0, Y_0 \in T_{c(t_0)}(M)$ . Seien  $X$  und  $Y$  die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs  $c$ . Dann gilt (mit  $X = \tilde{X} \circ c$  und  $Y = \tilde{Y} \circ c$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_{c(t)}(X(t), Y(t)) &= \dot{c}(g_{c(t)}(\tilde{X}(c(t)), \tilde{Y}(c(t)))) \\ &\stackrel{\text{metrisch}}{=} g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}}\tilde{X}, \tilde{Y}) + g(\tilde{X}, \nabla_{\dot{c}}Y) = 0 \end{aligned}$$

Also ist  $g(X, Y)(t) := g_{c(t)}(X(t), Y(t))$  konstant und somit

$$g_{c(t_1)}(\|_{t_0, t_1}^c(X_0), \|_{t_0, t_1}^c(Y_0)) = g_{c(t_1)}(X(t_1), Y(t_1)) = g_{c(t_0)}(X(t_0), Y(t_0)) = g_{c(t_0)}(X_0, Y_0).$$

□

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Man kann aus der Parallelverschiebung auch die kovariante Ableitung wieder konstruieren:

**Satz II.5.8.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve,  $t_0 \in I$ . Dann gilt

$$\left(\frac{\nabla}{dt}X\right)(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|_{t,t_0}^c(X(t)) - X(t_0)}{t - t_0}$$

für jedes glatte Vektorfeld  $X$  längs  $c$ .

*Beweis.* Sei  $e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)$  eine Basis von  $T_{c(t_0)}M$ . Seien  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs  $c$ . Nach Satz II.5.7.b, folgt dass die  $e_i(t)$  für jedes  $t$  eine Basis von  $T_{c(t)}M$  bilden. Sei  $X(t) = \sum_j X^j(t)e_j(t)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}X &= \nabla_{\dot{c}}(X^j e_j) = X^j \nabla_{\dot{c}} e_j + \dot{X}^j e_j = \dot{X}^j e_j \\ \frac{\nabla}{dt}X(t_0) &= \dot{X}^j(t_0) e_j(t_0) \end{aligned}$$

und mit Satz II.5.7

$$\|_{t,t_0}^c(X(t)) = X^j(t) \|_{t,t_0}^c e_j(t) = X^j(t) e_j(t_0).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\|_{t,t_0}^c(X(t)) - X(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\sum_j X^j(t) e_j(t_0) - \sum_j X^j(t_0) e_j(t_0)}{t - t_0} \\ &= \sum_j \frac{X^j(t) - X^j(t_0)}{t - t_0} e_j(t_0) \rightarrow \sum_j \dot{X}^j(t_0) e_j(t_0) \quad \text{für } t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

□

Vorl. 15

## II.6. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen

**Definition II.6.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $V: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Dann heißt

$$S(c) := \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t)) dt = \frac{m}{2} \int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt - \int_a^b V(c(t)) dt$$

*Wirkungsfunktional.* Ist  $m = 1, V = 0$ , dann heißt  $E(c) := S(c)$  *Energie* von  $c$ .

Wir werden sehen, dass die kritische Punkte des Wirkungsfunktionals genau die Lösungen der Lagrangegleichung sind – insbesondere Geodätische kritische Punkte des Energiefunktionals. Doch zuvor brauchen wir noch einige Vorarbeiten:

**Definition II.6.2.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Eine *Variation* von  $c$  ist eine glatte Abbildung

$$c: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

mit  $c(s, t) = c(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ . Gilt  $c(s, a) = c(a)$  und  $c(s, b) = c(b)$  für alle  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , so heißt  $c(s, t)$  *Variation mit festen Endpunkten*. Man schreibt oft  $c_s(t) := c(s, t)$ . Das Vektorfeld  $X(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$  entlang  $c(t)$  heißt *Variationsvektorfeld*, vgl. Abb. II.7.

Für das Variationsvektorfeld  $X$  einer Variation mit festen Endpunkten gilt  $X(a) = X(b) = 0$ .

**Satz II.6.3** (Erste Variation der Energie). Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve, sei  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  eine Variation dieser Kurve ( $c_s(t) = c(s, t)$ ). Sei  $X$  das zugehörige Variationsvektorfeld. Dann gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(c_s) = - \int_a^b g_{c(t)}(X(t), m \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) + \text{grad}_g V(c(t))) dt + g_{c(b)}(X(b), m\dot{c}(b)) - g_{c(a)}(X(a), m\dot{c}(a)).$$

*Beweis.* Es ist  $S(c_s) = mE(c_s) - \int_a^b V(c_s(t))dt$ . Wir berechnen die Ableitungen der einzelnen Summanden einzeln (wir lassen der Einfachheit halber bei  $g_p(\cdot, \cdot)$  den Punkt  $p$  beim Schreiben weg):

Nach Kettenregel ist  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b V(c_s(t))dt = \int_a^b d_{c(t)}V(X(t))dt = \int_a^b g(X(t), \text{grad}_g V(c(t)))dt$ . Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g\left(\frac{\partial c}{\partial t}(s, t), \frac{\partial c}{\partial t}(s, t)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial t}(0, t)\right) dt \stackrel{(*)}{=} \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}(0, t), \frac{\partial c}{\partial t}(0, t)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} X(t), \dot{c}(t)\right) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(X(t), \dot{c}(t)) - g(X(t), \nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \dot{c}(t)) dt \\ &= g(X(t), \dot{c}(t))\Big|_a^b - \int_a^b g(X(t), \nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \dot{c}(t)) dt \end{aligned}$$

(\*) folgt, da lokal gilt, dass

$$\nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s} = \sum_k \left( \frac{\partial^2 c^k}{\partial t \partial s} + \sum_{ij} \frac{\partial c^i}{\partial t} \frac{\partial c^j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

und dieser Ausdruck wegen Torsionsfreiheit ( $\sim \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ) symmetrisch in  $s$  und  $t$  ist. □

**Lemma II.6.4.** Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve, sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$ . Dann existiert eine Variation von  $c$  mit Variationsvektorfeld  $X$ . Falls  $X(a) = X(b) = 0$  ist, so kann die Variation mit festen Endpunkten gewählt werden.

*Beweis.* Wir beweisen als erstes den Spezialfall, dass der Support von  $X$  ist in einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  enthalten, also  $c(t) \in U$  sobald  $X(t) \neq 0$  ist. Wir definieren, vgl. Abbildung II.7,

$$c(s, t) := \begin{cases} \kappa^{-1}(\kappa(c(t)) + sd_{c(t)}\kappa(X(t))) & c(t) \in U \\ c(t) & c(t) \notin U \end{cases}$$

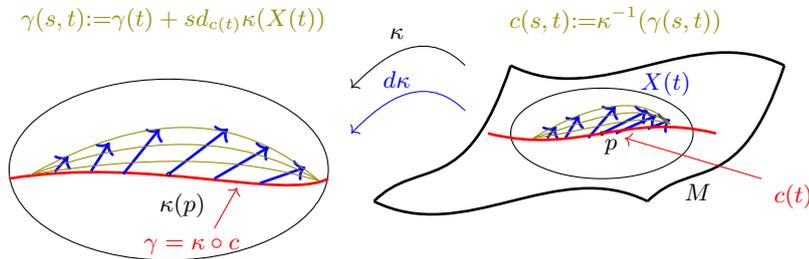


Abb. II.7.: Konstruktion der Variation in der Karte

Dann gilt

$$\frac{\partial c}{\partial s}(0, t) = d_{\kappa(c(t))} \kappa^{-1} (d_{c(t)} \kappa(X(t))) = X(t).$$

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Für den allgemeinen Fall überdecken wir  $c[a, b]$  mittels endlich vieler Karten  $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i$  und einer zugehörigen untergeordneten Zerlegung der Eins  $\rho_i$ . Wir setzen  $X_i := \rho_i X$ . Für  $i = 1$  machen wir die Konstruktion von oben und erhalten eine Variation  $c_1(s, t)$  von  $c(t)$  mit Variationsvektorfeld  $X_1$ . Für  $i = 2$  setzen wir nun

$$c_2(s, t) := \begin{cases} \kappa_2^{-1} (\kappa_2(c_1(s, t)) + s d_{c_1(s, t)} \kappa_2(X_2(t))) & c_1(s, t) \in U_2 \\ c_1(s, t) & c_1(s, t) \notin U_2 \end{cases}$$

Wegen  $c_2(0, t) = c_1(0, t) = c(t)$  und

$$\frac{\partial c_2}{\partial s}(0, t) = d_{\kappa_2(c(t))} \kappa_2^{-1} \left( d_{c(t)} \kappa_2 \frac{\partial c_1}{\partial s}(0, t) + d_{c(t)} \kappa_2(X_2(t)) \right) = X_1(t) + X_2(t).$$

ist  $c_2(s, t)$  eine Variation von  $c(t)$  mit Variationsvektorfeld  $X_1 + X_2$ . Für  $i > 2$  fahren wir Karte für Karte so fort und erhalten nach endlich vielen Schritten eine Variation  $c(s, t)$  von  $c(t)$  mit Variationsfeld  $X$ .  $\square$

**Folgerung II.6.5.** *Sei  $c$  eine glatte Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$ . Dann ist  $c$  ein kritischer Punkt des Energiefunktional, d.h.*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c_s) = 0$$

für alle Variationen  $c_s$  von  $c$  mit festen Endpunkten, genau dann wenn  $c$  eine Geodätische für alle  $t \in [a, b]$  ist.

*Beweis.* Ist  $c$  eine Geodätische, dann folgt  $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c_s) = 0$  für alle Variationen  $c_s$  von  $c$  mit festen Endpunkten aus der ersten Variation des Energiefunktional.

Sei nun umgekehrt für alle Variationen  $c_s$  von  $c$  mit festen Endpunkten  $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c_s) = 0$ . Wir nehmen an, dass ein  $t_0 \in (a, b)$  mit  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t_0) \neq 0$  existiert. Dann existiert ein  $X_0 \in T_{c(t_0)} M$  mit  $g(X_0, \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t_0)) > 0$ . Sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$  mit  $X(t_0) = X_0$ . Wegen Stetigkeit von  $t \mapsto g(X(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t))$  gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $g(X(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t)) > 0$  für alle  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq (a, b)$  gilt. Wir wählen eine glatte Funktion  $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\rho(t) > 0$  für alle  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  und  $\rho(t) = 0$  (Man nennt  $\rho$  Abschneidefunktion.). Sei  $Y(t) := \rho(t) X(t)$ . Nach dem letzten Lemma gibt es eine Variation  $c(s, t)$  von  $c$  mit festen Endpunkten und dem Variationsvektorfeld  $Y$ . Dann gilt

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c_s) = - \int_a^b g \left( Y(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) dt < 0.$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0$  auf  $(a, b)$  und wegen Stetigkeit auf ganz  $[a, b]$ .  $\square$

Analog wie die letzte Folgerung erhält man für das Wirkungsfunktional:

**Folgerung II.6.6.** (Hamiltonsches Wirkungsprinzip) *Sei  $c$  eine glatte Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$ . Dann ist  $c$  ein kritischer Punkt des Wirkungsfunktional, d.h.*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S(c_s) = 0$$

für alle Variationen  $c_s$  von  $c$  mit festen Endpunkten, genau dann wenn  $c$  eine Lösung der zugehörige Lagrange-gleichung  $m \nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\text{grad}_g V$  ist.

Vorl. 16

**Bemerkung II.6.7.** Man kann die obige Variation auch direkt für  $\int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt$  für allgemeine  $L$  ausrechnen (Hier ist  $q(t)$  wieder  $c(t)$  in lokalen Koordinaten und erhält ganz analog für Variationen mit festen Endpunkten

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S(c_s) = - \int_a^b g_{kl} \left( - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) X^\ell dt$$

und damit die Lagrange-gleichung. Da wir hier aber nur unsere spezielle Lagrange-funktion betrachten, haben wir es direkt berechnet.

**Bemerkung II.6.8.**

(a) Ist  $g$  Riemannsch, dann heißt

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

*Länge* von  $c$ . Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung: Sei  $\varphi: (a_0, b_0) \rightarrow (a, b)$  ein Diffeomorphismus. O.B.d.A. sei  $\varphi' > 0$ . (Man beachte: Weil  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $\varphi'(s) \neq 0$  für alle  $s$ .) Dann ist  $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$  eine Kurve mit gleicher Spur und

$$L(\tilde{c}) = \int_{a_0}^{b_0} \sqrt{g(\dot{\tilde{c}}(s), \dot{\tilde{c}}(s))} ds = \int_{a_0}^{b_0} \sqrt{\varphi'(s)^2 g(\dot{c}(\varphi(s)), \dot{c}(\varphi(s)))} ds = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt = L(c).$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist  $L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$  und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $g(\dot{c}, \dot{c})$  konstant, also  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Insbesondere hängt die Energie einer Kurve - im Gegensatz zur Länge - von der Parametrisierung ab.

Sei  $M$  zusammenhängend. Wir definieren die *Riemannsche Abstandsfunktion*  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  durch\*

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte Kurve von } p \text{ zu } q\}.$$

Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, vgl. ÜA 36.

(b) Für  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit mit induzierter Metrik ist  $L(c)$  genau die Länge von  $c$  im  $\mathbb{R}^n$ . Die Riemannsche Abstandsfunktion stimmt jedoch nicht mit der Abstandsfunktion im euklidischen Raum überein.

(c) Für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert man Längen i.A. nur für *kausale Kurven*, d.h.  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \leq 0$ , als

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{-g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

Für die Lorentzsche Abstandsfunktion definiert man dann

$$d(p, q) = \sup\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

siehe ÜA 35.

**Folgerung II.6.9.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $p, q \in M$ . Eine Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  minimiert genau dann die Energie unter allen stückweise glatten Kurven, die  $p = c(a)$  und  $q = c(b)$  verbinden, wenn  $c$  die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

**Folgerung II.6.10.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jede kürzeste Kurve von  $p$  nach  $q$  ist eine Geodäte und wenn sie proportional nach Bogenlänge parametrisiert ist eine Geodätische.

**Bemerkung II.6.11.** Nicht jede Geodätische ist Kürzeste z.B. die Großkreise auf der  $S^n$ .

**Beispiel II.6.12.** Das *Fermatsche Prinzip* (nach Pierre de Fermat) besagt, dass Licht in einem Medium zwischen zwei Punkten Wege nimmt, auf denen seine Laufzeit sich bei kleinen Variationen des Weges nicht ändert. Die Laufzeit des Lichtes bestimmt sich im Prinzip aus der Länge der Kurve  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrisiert nach Bogenlänge bzgl.  $g_E$ , auf der sich das Licht bewegt, allerdings ist zu beachten, dass sich je nach Medium (Luft, Wasser, Glas, etc.) die Lichtgeschwindigkeit mit dem Brechungsindex  $n$  ändert: Laufzeit  $= \int_a^b n(c(t)) dt$ , wobei  $n: \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$  der ortsabhängige Brechungsindex ist. Für  $n = 1$  (z.B. Luft) ist das genau die Länge der Kurve im Euklidischen Raum, ansonsten können wir es trotzdem als Länge der Kurve  $c$  bzgl. der konformen Metrik  $g = n^2 g_E$  betrachten, denn dann ist  $L_g(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})} dt = \int_a^b n(c(t)) dt$ .

Im Allgemeinen: Licht bewegt sich auf lichtartigen Geodäten in einer Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, h)$ , wobei eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  *lichtartig* heißt, falls  $h_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0$  für alle  $t$  ist. Lokal sieht unsere Universum (unsere Lorentzmannigfaltigkeit) in guter Näherung aus, wie ein Produkt  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  mit Metrik  $g - (dt)^2$ . Befinden wir uns in Luft ist  $g = g_E$ , in Medien mit anderem Brechungsindex  $g = n^2 g_E$ .

In unserer Sprache heißt das, dass die Spur des Lichtes eine Geodäte ist für die Metrik  $g = n g_E$ .

\*Gilt für eine Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$  schon  $L(c) = d(p, q)$ , dann ist  $c$  glatt. Weiterhin kann das 'stückweise' in der Definition auch weggelassen werden. Es macht nur technische Details einfacher.

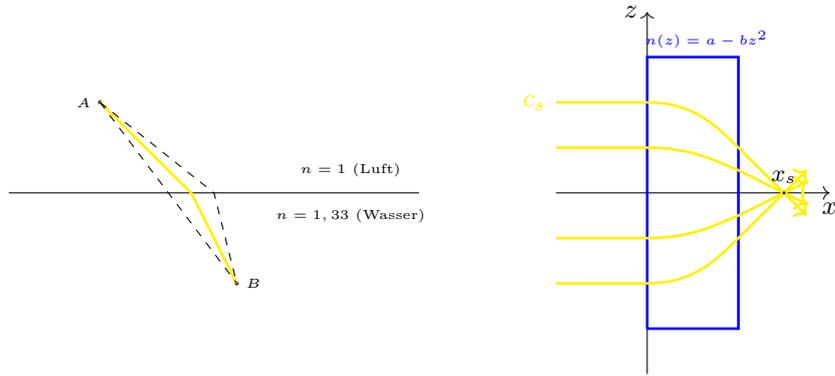


Abb. II.8.: Links: Extremale Weglänge zwischen  $A$  und  $B$  in zwei unterschiedlichen Medien – vergleiche Snells Gesetz\*. Hier ist  $n$  nicht glatt, sondern hat einen Sprung. Strenggenommen fällt es somit nicht unter unsere Voraussetzungen, da wir hier der Einfachheit immer mit glatten Metriken arbeiten. Aber man sieht hier ganz schön, dass dafür die Formulierung über das Variationsproblem sehr gut ist, da dort die integrale noch immer Sinn ergeben. Rechts: Das blaue Rechteck soll eine Gradientenlinse\* darstellen, d.h. in diesem Bereich ist der Brechungsindex ortsabhängig – hier  $n(z) = a - bz^2$ . Sei  $c_s$  ein Lichtstrahl, der sich achsenparallel auf die Linse zu bewegt und diese in  $(0, s)$  erreicht. Dann wird dieses in der Linse zur Achse hin abgelenkt und nach Austritt aus der Linse erreicht es die  $x$ -Achse in  $x_s$ . Dann gilt  $x_s = \text{const} + O(s^2)$ , vgl. ÜA 37/38. D.h. achsenparallele Strahlen fokussieren in einem Punkt.

**Folgerung II.6.13.** Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Jede längste kausale Kurve von  $p$  nach  $q$  ist eine Geodäte und wenn sie proportional nach Bogenlänge parametrisiert ist eine Geodätische.

## II.7. Krümmung

**Definition II.7.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung  $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z$$

heißt *Riemannscher Krümmungstensor* von  $(M, g)$ .

**Satz II.7.2.** Für  $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

1. (tensoriell in den drei Komponenten)  $R(f_1 X, f_2 Y)(f_3 Z) = f_1 f_2 f_3 R(X, Y)Z$ .
2. (Symmetrien)  $R(X, X)Z = 0$  und  $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$  und  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
3. (Bianchi-Identität)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

*Beweis.* Durch Nachrechnen. □

**Bemerkung II.7.3.** (i) Aus der Symmetrie  $R(X, X)Z = 0$  und tensoriell in den drei Komponenten folgt für eindimensionale Mannigfaltigkeiten sofort, dass  $R \equiv 0$  ist.

(ii) Aus tensoriell in den drei Komponenten folgt, dass  $R$  für jeden Punkt  $p \in M$  eine Abbildung

$$R_p: T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

definiert.

(iii) Interpretation von  $R_p$ : Nach Satz II.5.8 kann man  $\nabla_X Y$  als Grenzwert des Paralleltransports verstehen.

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Snelliusches\\_Brechungsgesetz](https://de.wikipedia.org/wiki/Snelliusches_Brechungsgesetz), [https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index\\_optics](https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics)

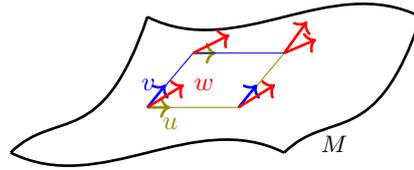


Abb. II.9.: Betrachtet man ein 'infinitesimal kleines' Parallelogramm mit den Seitenvektoren  $u$  und  $v$  und bewegt  $w$  mittels Paralleltransport einmal links und einmal rechts herum, dann entstehen im allgemeinen zwei verschiedene Vektoren 'in der rechten oberen Ecke'. Deren Differenz mal Fläche des Parallelogramms ergibt im Limes Parallelogramm  $\rightarrow p$  den Vektor  $R_p(u, v)w$ .

(iv) In einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  von  $M$  um  $p$  gilt wegen  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$ :

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \dots \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma_{im}^\ell \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^\ell \Gamma_{ik}^m) \right)}_{=: R_{ijk}^\ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Wir setzen

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

Dann ist  $R_{ijkl} = \sum_r R_{ijk}^r g_{rl}$  und wegen der Symmetrien gilt

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk}.$$

**Definition II.7.4.** Sei  $(M^m, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ .

1. Sei  $m > 1$ . Für jeden zweidimensionalen nichtentarteten Untervektorraum  $E \subseteq T_p M$  (nichtentartet heißt, dass  $g_p(\cdot, \cdot)|_{E \times E}: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-entartet ist.\*) mit Basis  $(v, w)$  ist die *Schnittkrümmung* definiert als

$$\text{sec}_p(E) = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} \in \mathbb{R}^\dagger$$

Vorl. 17

2. Die *Ricci-Krümmung* auf  $T_p M$  ist definiert als die bilineare, symmetrische Abbildung

$$\text{Ric}_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\text{Ric}_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \text{Ric}_{ij}(p) = \text{Spur}_g\left(R\left(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p: T_p M \rightarrow T_p M\right) = R_{kij}^k(p) \in \mathbb{R}.$$

(vgl. Appendix für die Definition der Spur)

\*Das ist automatisch erfüllt, wenn  $g$  Riemannsch ist.

† Es ist  $g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2 = \det g|_{\text{span}\{v, w\}}$ . Falls  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  ist, ist  $\det g|_{\text{span}\{v, w\}}$  das Quadrat des Flächeninhalts des durch die Vektoren  $v$  und  $w$  aufgespannten Parallelogramms.

**Bemerkung II.7.5.** Die Schnittkrümmung ist unabhängig von der Basiswahl  $v, w \in VM$  und damit wohldefiniert: Sei  $A \in GL(E)$ . Dann ist  $(\tilde{v} = Av, \tilde{w} = Aw)$  eine Basis von  $E$  und wir haben, vgl. Appendix

$$\frac{g(R(Av, Aw)Aw, Av)}{g(Av, Av)g(Aw, Aw) - g(Av, Aw)^2} = \frac{(\det A)^2 g(R(v, w)w, v)}{(\det A)^2 (g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2)} = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}.$$

Die Menge aller Schnittkrümmungen in einem Punkt  $p \in M$  bestimmen den Riemannschen Krümmungstensor in dem Punkt eindeutig: Da  $R$  linear in allen Komponenten ist, kann man das durch geeignete Polarisierung nachrechnen, also  $\sec_p(\text{span}\{v+w, u+z\})$  nachrechnen. Ähnlich wie man nachrechnet, dass eine symmetrische Bilinearform  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig bestimmt sind, wenn man alle  $b(v, v)$  für  $v \in V$  kennt.

Hängt die Schnittkrümmung nur von  $p$  und nicht von der Wahl  $E \subseteq T_p M$  ab, schreibt man  $\sec(p) = \sec_p(E)$ , (in Dimension 2 ist das immer so, da  $T_p M$  zweidimensional ist), dann gilt

$$g_p(R_p(v, w)z, u) = \sec(p) (g_p(w, z)g_p(v, u) - g_p(v, z)g_p(w, u)).$$

**Bemerkung II.7.6.** Da  $\text{Ric}_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear und symmetrisch und  $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear, symmetrisch und nichtentartet ist, existiert  $\text{Ric}_p: T_p M \rightarrow T_p M$  als der durch  $\text{Ric}_p(v, w) = g_p(\text{Ric}_p(v), w)$  eindeutig bestimmte Endomorphismus Sei  $\text{Ric}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_j \text{Ric}_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Wir haben dann

$$\text{Ric}_{ij} = g \left( \text{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_k \text{Ric}_i^k g_{kj},$$

also  $\text{Ric}_i^j = \sum_k \text{Ric}_{ik} g^{kj}$ .

**Definition II.7.7.** Die *Skalarkrümmung* auf  $M$  definiert als

$$\text{scal}(p) = \text{Spur}(\text{Ric}_p(\cdot)) = \sum_i \text{Ric}_i^i(p) = \sum_{ij} \text{Ric}_{ij}(p) g^{ij}(p) \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel II.7.8.** Für  $\mathbb{R}^n$  mit euklidischer oder Minkowskimetrik in Standardkoordinaten ist  $\Gamma_{ij}^k = 0$  und damit  $R_{ijkl}^{\ell} = 0$ , also  $R = 0$ . Mannigfaltigkeiten mit  $R = 0$  heißen *flach*.

Für  $\mathbb{S}^n$  mit induzierter Metrik gilt  $\sec_p(E) = 1$  für alle  $p \in M$  und Ebenen  $E \subseteq T_p M$ .

Für  $\mathbb{H}^n$  mit induzierter Metrik gilt  $\sec_p(E) = -1$  für alle  $p \in M$  und Ebenen  $E \subseteq T_p M$ .

Ist die Schnittkrümmung in einem Punkt  $p$  konstant, dann gilt in diesem Punkt

$$\begin{aligned} \sec_p(E) = \sec(p) &=: c \\ \implies \text{Ric}_{ij} &= \sum_{k,l} R_{kijl} g^{kl} = c \sum_{k,l} (g_{kl} g_{ij} - g_{kj} g_{il}) g^{kl} = c(m-1) g_{ij} \\ \implies \text{Ric}_i^j &= \sum_k \text{Ric}_{ik} g^{kj} = c(m-1) \sum_k g_{ik} g^{kj} = c(m-1) \delta_i^j \\ \implies \text{scal}_g &= \sum_i \text{Ric}_i^i = m(m-1)c. \end{aligned}$$

**Bemerkung II.7.9.** Interpretation von Ric und scal (hier ohne Beweis);

- (i) Die Skalarkrümmung in einem Punkt  $p \in M^n$  vergleicht das Volumen kleiner Bälle in  $M$  um  $p$  (gemessen bzgl.  $g$ ) mit dem Volumen von Bällen im  $\mathbb{R}^n$  (gemessen bzgl.  $g_E$ ) mit gleichem Radius:

$$\text{vol}_g(B_\epsilon(p) \subseteq M) = \text{vol}_g(B_\epsilon(p) \subseteq \mathbb{R}^n) \left( 1 - \frac{\text{scal}_p}{6(n-2)} \epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right).$$

- (ii) Die Ricciskrümmung tritt ähnlich als Term zweiter Ordnung in der Taylorentwicklung der Volumenform auf.

**Lemma II.7.10.** Sei  $f: M \rightarrow N$  eine lokale Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  und  $(N, h)$ . Sei  $R$  bzw.  $\bar{R}$  der Riemannsche Krümmungstensor auf  $(M, g)$  bzw.  $(N, h)$ . Dann gilt für  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$f_* R(X, Y)Z = \bar{R}(f_* X, f_* Y)f_* Z.$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors und Übungsaufgabe 20.  $\square$

**Folgerung II.7.11.** Für den Zylinder oder Kegel im  $\mathbb{R}^3$  mit induzierter Metrik und für den flachen Torus ( $= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) gilt  $R = 0$ .

**Folgerung II.7.12.** Weder die Sphäre  $S^n$  noch der hyperbolische Raum  $\mathbb{H}^n$ , jeweils mit induzierter Metrik, sind lokal isometrisch zum euklidischen Raum.

**Bemerkung II.7.13.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Sei  $\nabla$  bzw.  $R$  der zur induzierten Metrik gehörige Levi-Civita Zusammenhang bzw. Riemannsche Krümmungstensor. Sei  $II$  die zweite Fundamentalform, also  $II(X, Y) := D_X Y - \nabla_X Y$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann erhält man durch direktes Nachrechnen, dass für alle  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle R(X, Y)W, Z \rangle = \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle$$

gilt. Insbesondere ist für  $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $II(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}) =: h_{ij}\nu$

$$R_{ijkl} = h_{il}h_{jk} - h_{jl}h_{ik}.$$

In Dimension 2 kann wegen der Symmetrien nur  $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$  nicht Null sein. Also ist

$$R_{1221} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{12} = \det h_{ij}.$$

Damit ist die Schnittkrümmung für  $E = T_p M = \text{span} \{v = \frac{\partial}{\partial x^1}, w = \frac{\partial}{\partial x^2}\}$

$$\text{sec}_g = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} =: \text{Gaußkrümmung}.$$

Vorl. 18

## II.8. Die Exponentialabbildung

**Bemerkung II.8.1.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Für  $v \in T_p M$  bezeichnen wir mit  $c_v$  die eindeutig bestimmte Geodäte mit  $c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ . Dann gilt  $c_{\alpha v}(t) = c_v(\alpha t)$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ : Da  $c_{\alpha v}(0) = c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_{\alpha v}(0) = \alpha \dot{c}_v(0) = \alpha v$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $\bar{c} := c_{\alpha v}$  wieder eine Geodätische ist:

$$\nabla_{\dot{\bar{c}}(t)} \ddot{\bar{c}}(t) = \nabla_{\alpha \dot{c}_v(\alpha t)} \alpha \dot{c}_v(\alpha t) = \alpha^2 (\nabla_{\dot{c}_v} \dot{c}_v)(\alpha t) = 0.$$

**Definition II.8.2.** Die *Exponentialabbildung*  $\exp_p: D_p \subseteq T_p M \rightarrow M$  ist definiert als  $\exp_p(v) = c_v(1)$ , wobei  $D_p := \{v \in T_p M \mid 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_v\}$ .

**Bemerkung II.8.3.**

- (i)  $\exp_p(0) = p$
- (ii)  $\exp_p(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$ . Damit ist  $D_p$  sternförmig bezüglich 0.
- (iii) Das Differential  $d_0 \exp_p: T_0 D_p = T_0 T_p M \rightarrow T_p M$  ist gegeben durch den kanonischen Isomorphismus  $\Phi_0: T_0 T_p M \rightarrow T_p M$ . Sei  $v \in T_p M$ . Dann ist  $\Phi_0^{-1}v \in T_0 T_p M$  und wir haben:

$$d_0 \exp_p(\Phi_0^{-1}v) = d_0 \exp_p \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (tv) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c_v(t) = v.$$

- (iv) Die Exponentialabbildung ist glatt. Das folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösung der Geodätengleichung von den Anfangswerten,  $\square$ .

**Folgerung II.8.4.** Zu  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{V}_p \subseteq D_p \subseteq T_p M$  von 0, so dass  $\exp_p: \mathcal{V}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$  ein Diffeomorphismus ist.

*Beweis.* Folgt aus der letzten Bemerkung und dem Umkehrsatz I.3.24.  $\square$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

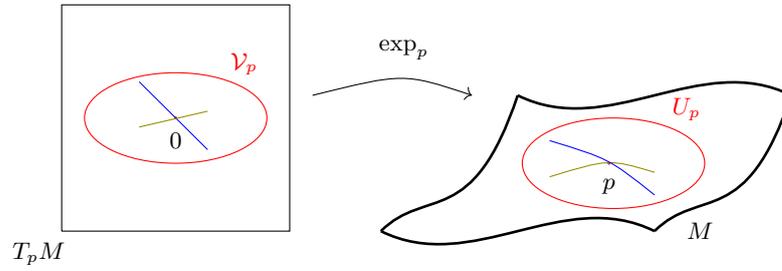


Abb. II.10.: Die Exponentialabbildung bildet Geraden durch  $0 \in T_p M$  auf Geodäten durch  $p$  ab. Geodätische Polarkoordinaten sind bis auf die Wahl eines Koordinatensystems für  $T_p M$ , also unser  $A$ , durch  $(\exp_p)^{-1}$  gegeben.

Nächstes Ziel: Mit Hilfe der Exponentialabbildung 'gute' Koordinaten in der Umgebung eines Punktes wählen. Wir wählen ein Orthonormalsystem  $e_1, \dots, e_m$  von  $T_p M$ , also  $g_p(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$  mit  $\epsilon_i = \pm 1$ . Sei  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$  definiert durch  $(v^1, \dots, v^m) \mapsto \sum_i v^i e_i$ . Dann ist  $A$  ein linearer Isomorphismus. Damit erhalten wir eine Karte  $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}$ .

**Definition II.8.5.** Die mittels  $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}: U_p \rightarrow V_p := A^{-1}(V_p) \subseteq \mathbb{R}^m$  erhaltenen Koordinaten um  $p$  nennt man *geodätische Normalkoordinaten*.

**Satz II.8.6.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Seien  $g_{ij}: V_p \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Gamma_{ij}^k: V_p \rightarrow \mathbb{R}$  die zu den geodätischen Normalkoordinaten  $\kappa$  um  $p$  zugehörigen Metrikkoeffizienten bzw. Christoffelsymbole. Dann gilt

$$\kappa(p) = 0, \quad g_{ij}(0) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0.$$

*Beweis.*  $\kappa(p) = 0$  ist klar und  $g_{ij}(0) = \epsilon_i \delta_{ij}$  folgt direkt aus Bemerkung II.8.3.iii. Wir schreiben für  $\Gamma_{ij}^k(q)$  im folgenden oft  $\Gamma_{ij}^k(x = \kappa^{-1}q)$ . Sei  $v = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ .  $c(t) = \exp_p(tAv)$  ist Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = Av$ . Für diese Geodätische lautet die Geodätengleichung in geodätischen Normalkoordinaten:

$$0 = \ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t)$$

mit  $x^k(t) = \kappa^k(c(t)) = tv^k$ . Also gilt für  $t = 0$

$$0 = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(0) v^i v^j$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^m$ . Daraus folgt  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$  für alle  $i, j, k$ . □

**Folgerung II.8.7.** In geodätischen Normalkoordinaten gilt für die Taylorentwicklung der Metrikkoeffizienten  $g_{ij}: V_p \rightarrow \mathbb{R}$  um 0

$$g_{ij}(x) = \epsilon_i \delta_{ij} + O(|x|^2).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= g_{ij}(0) + x^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) + O(|x|^2) \\ &\stackrel{\text{Satz II.8.6}}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + x^k g_{ij,k}(0) + O(|x|^2) \\ \text{Bew. v. Satz II.2.8} &\stackrel{=}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + x^k (\Gamma_{ki}^l(0) g_{lj}(0) + \Gamma_{kj}^l(0) g_{il}(0)) + O(|x|^2) \\ &\stackrel{\text{Satz II.8.6}}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + O(|x|^2) \end{aligned}$$

□

**Satz II.8.8.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. In geodätischen Normalkoordinaten gilt

$$g_{ij}(x) = \epsilon_i \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(|x|^3).$$

*Beweis.* Bis zur ersten Ordnung haben wir die Gleichheit schon in der letzten Folgerung nachgerechnet. Wir müssen die zweiten Ordnungsterme, also  $\frac{1}{2}g_{ij,kl}(0)x^kx^l$  berechnen:

Aus  $g_{ij,k} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{im}$  (vgl. Bew. v. Satz II.2.8) und  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$  erhalten wir

$$g_{ij,kl} = \Gamma_{ki,l}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{kj,l}^m(0)g_{im}(0).$$

Wegen des Satzes von Schwarz ist  $g_{ij,kl}$  symmetrisch in  $k$  und  $l$ , also

$$g_{ij,kl} = \Gamma_{ki,l}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{kj,l}^m(0)g_{im}(0) = \Gamma_{li,k}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0)g_{im}(0). \quad (\text{II.11})$$

Wir zeigen als nächstes, dass

$$\Gamma_{ij,l}^k(0) + \Gamma_{li,j}^k(0) + \Gamma_{jl,i}^k(0) = 0 \quad (\text{II.12})$$

gilt:

In geodätischen Normalkoordinaten sind die Geraden  $t \mapsto tx$  durch 0 Geodätische mit Geodätengleichung  $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(tx)x^i x^j = 0$  Differentiation nach  $t$  in  $t = 0$  ergibt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(tx)x^i x^j = \sum_{ijl} \Gamma_{ij,l}^k(0)x^l x^i x^j.$$

Das ist ein Polynom dritten Grades und Koeffizientenvergleich liefert genau Gleichung (II.12).

Weiterhin ist nach (II.10)  $R_{kil}^j(0) = \Gamma_{il,k}^j(0) - \Gamma_{kl,i}^j(0)$ , also

$$R_{kilj}(0) = (\Gamma_{il,k}^m(0) - \Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0). \quad (\text{II.13})$$

Insgesamt haben wir nun

$$\begin{aligned} 6g_{ij,kl}(0) &\stackrel{(\text{II.11})}{=} 3(\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0))g_{mj}(0) + 3(\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(\text{II.12})}{=} (3\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0) - 2\Gamma_{ik,l}^m(0) - 2\Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) \\ &\quad + (3\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0) - 2\Gamma_{jk,l}^m(0) - 2\Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} (\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0) - 2\Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) + (\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0) - 2\Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(\text{II.11})}{=} 2(\Gamma_{il,k}^m(0) - \Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) + 2(\Gamma_{jl,k}^m(0) - \Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(\text{II.13})}{=} 2R_{kilj} + 2R_{kjl i}. \end{aligned}$$

□

## II.9. Jacobifelder

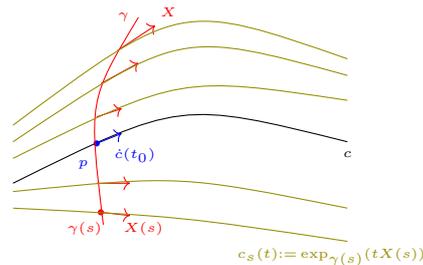
**Ziel:** Wir wollen das Verhalten von Geodäten mit 'nah beieinander liegenden' Anfangswerten untersuchen. Also Fragen wie: 'Streben die Geodäten dann eher voneinander weg oder aufeinander zu'? Da die Geodätengleichung nichtlinear ist, ist das a priori nicht leicht zu beantworten. Deshalb schauen wir uns nur die ersten Ordnungseffekte an, d.h. wir linearisieren die Geodätengleichung.

**Vorl. 20**

**Definition II.9.1.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Variation  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$  (vgl. Definition II.6.2) heißt *geodätische Variation längs*  $c(t) := c(0, t)$ , falls für jedes  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  die Kurve  $c_s: t \mapsto c(s, t)$  eine Geodätische ist.

**Bemerkung II.9.2.** Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $p = c(t_0)$ .

Sei  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit  $p = \gamma(0)$  und sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $\gamma$  mit  $X(0) = \dot{c}(t_0)$ . Dann ist  $c(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(tX(s))$  eine geodätische Variation. Alle geodätischen Variation sind wegen Eindeutigkeit von Geodätischen in dieser Form darstellbar.



## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

**Bemerkung II.9.3.** Sei  $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} c(0, t)$  das Variationsvektorfeld zu einer geodätischen Variation  $c(s, t)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} c(s, t) \Big|_{s=0} \stackrel{\text{torsionsfrei (vgl. Erste Var. von } E \text{ - Satz II.6.3)}}{=} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial t} c(s, t) \Big|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Def. von } R}{=} \frac{\nabla}{ds} \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial t} c(s, t)}_{=0 \text{ da alle } c_s \text{ Geod.}} \Big|_{s=0} + R\left(\frac{\partial}{\partial t} c(0, t), \frac{\partial}{\partial s} c(0, t)\right) \frac{\partial}{\partial t} c(0, t) \\ &= R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t). \end{aligned}$$

**Definition II.9.4.** Sei  $c: I \rightarrow M$  Geodätische. Die Gleichung

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) = R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t)$$

heißt *Jacobigleichung* und deren Lösungen heißen *Jacobifelder längs c*.

**Bemerkung II.9.5.** Nach obiger Bemerkung sind Variationsfelder von geodätischen Variationen Jacobifelder. Wir werden später sehen, dass alle Jacobifelder so gewonnen werden können.

**Satz II.9.6.** Sei  $(M^m, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische,  $t_0 \in I$ . Für alle  $v, w \in T_{c(t_0)}M$  gibt es genau ein Jacobi-Feld  $J$  längs  $c$  mit  $J(t_0) = v$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(t_0) = w$ . Insbesondere ist die Menge der Jacobifelder längs  $c$  ein  $2m$ -dimensionaler Vektorraum.

*Beweis.* Sei  $e_1(t_0), \dots, e_m(t_0)$  eine Basis von  $T_{c(t_0)}M$ . Durch Parallelverschiebung längs  $c$  erhalten wir eine Basis  $e_1(t), \dots, e_m(t)$  von  $T_{c(t)}(M)$ . Setze  $J(t) = v^i(t)e_i(t)$ . Dann gilt  $\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) = \ddot{v}^i(t)e_i(t)$ . Weiterhin ist

$$R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t) = v^j \underbrace{R(\dot{c}(t), e_j(t))\dot{c}(t)}_{=a_j^i e_i(t)}.$$

Also ist  $J$  genau dann ein Jacobifeld, wenn  $\ddot{v}^i = v^j a_j^i$  für alle  $i$  gilt. Das ist ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Damit existieren Lösungen auf ganz  $I$  und sind durch die Wahl der Anfangswerte eindeutig bestimmt.  $\square$

**Beispiel II.9.7.** (Die 'uninteressanten' Jacobifelder) Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Geodätischen  $c$ . Dann ist das Vektorfeld  $J(t) := (a + bt)\dot{c}(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  ein Jacobifeld, wegen

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J = 0 \stackrel{\text{Symm. von } R}{=} -(a + bt)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = -R(\dot{c}, J)\dot{c}.$$

$J$  ist das Variationsvektorfeld zur geodätischen Variation

$$c(s, t) = c(t + s(a + bt)) = c((1 + sb)t + sa),$$

also einfach einer Schar von Umparametrisierungen von  $c$ .

**Beispiel II.9.8.** Ist  $M$  flach, also  $R \equiv 0$ , dann lautet die Jacobigleichung:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J(t) = 0.$$

Also sind alle Vektorfelder der Form  $X(t) + tY(t)$  mit  $X, Y$  parallel längs  $c$  Jacobifelder. Nach Satz II.9.6 und Satz II.5.4 (Ex. und Eind.satz von parallelen Vektorfeldern) sind das schon alle Jacobifelder.

**Satz II.9.9.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: I = [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische und sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$ . Dann ist  $X$  genau dann ein Jacobifeld längs  $c$ , wenn  $X$  das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ist.

*Beweis.* Dass das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobifeld ist, wissen wir schon. Sei nun  $X$  ein Jacobifeld längs  $c$ . O.B.d.A. sei  $0 \in I$  (den allgemeinen Fall erhält man dann durch Verschieben). Sei  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = c(0)$  und  $\dot{\gamma}(0) = X(0)$ . Sei  $\eta_1$  das parallele Vektorfeld längs  $\gamma$  mit  $\eta_1(0) = \dot{c}(0)$  und  $\eta_2$  das mit  $\eta_2(0) = \frac{\nabla}{dt}X(0)$ . Wir setzen  $\eta(s) := \eta_1(s) + s\eta_2(s)$  und  $c(s, t) := \exp_{\gamma(s)}(t\eta(s))$ . Da  $\exp$  einen offenen Definitionsbereich hat und  $[a, b]$  kompakt ist, ist  $c_s(t) = c(s, t)$  für hinreichend kleine  $|s|$  und alle  $t \in [a, b]$  definiert. Für alle solchen  $s$  ist  $c_s(t)$  dann eine Geodätische und

$$c(0, t) = \exp_{\gamma(0)}(t\eta(0)) = \exp_{c(0)}(t\dot{c}(0)) = c(t).$$

Also ist  $c(s, t)$  eine geodätische Variation längs  $c$ . Sei  $J$  das zugehörige Jacobifeld. Dann bleibt zu zeigen, dass  $J(0) = X(0)$  und  $\frac{\nabla}{dt}J(0) = \frac{\nabla}{dt}X(0)$  ist, denn dann folgt nach Satz II.9.6  $X = J$ .

$$\begin{aligned} J(0) &= \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(s) = \dot{\gamma}(0) = X(0) \\ \frac{\nabla}{dt}J(0) &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds}\Big|_{s=0} \eta(s) \stackrel{\eta_i \text{ parall.}}{=} \eta_2(0) = \frac{\nabla}{dt}X(0). \end{aligned}$$

□

Insbesondere sieht man im Beweis des letzten Satzes, dass man die geodätische Variation zu einem Jacobifeld  $J$  längs  $c$  mit  $J(t_0) = 0$  derart wählen kann, dass  $c_s(t_0) = c(s, t_0) = c(t_0)$  für alle  $s$  gilt.

**Lemma II.9.10.** Sei  $J: I \rightarrow TM$  ein Jacobifeld längs einer Geodäten  $c$ , sei  $t_0 \in I$ . Sei  $J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)^*$  und  $\frac{\nabla}{dt}J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$ . Dann gilt  $J(t) \perp \dot{c}(t)$  und  $\frac{\nabla}{dt}J(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(\frac{\nabla}{dt}J, \dot{c}\right) &\stackrel{\text{metrisch}}{=} g\left(\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J, \dot{c}\right) + g\left(\frac{\nabla}{dt}J, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0}\right) \\ &\stackrel{\text{Jacobigl.}}{=} g(R(\dot{c}, J)\dot{c}, \dot{c}) \stackrel{\text{Symm. von } R}{=} 0. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$0 = g\left(\frac{\nabla}{dt}J(t_0), \dot{c}(t_0)\right) = g\left(\frac{\nabla}{dt}J, \dot{c}\right) \stackrel{\text{metrisch}}{=} \frac{d}{dt}g(J, \dot{c}) + g\left(J, \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\dot{c}}_{=0}\right)$$

und damit  $g(J(t), \dot{c}(t)) = g(J(t_0), \dot{c}(t_0)) = 0$ . □

**Folgerung II.9.11.** Sei die Geodätische  $c$  nicht lichtartig, also  $g(\dot{c}, \dot{c}) \neq 0$ . Dann ist  $T_{c(t)}M = \mathbb{R}\dot{c}(t) \oplus \dot{c}(t)^\perp$  und die Menge aller Jacobifelder längs  $c$  ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \cdot \dot{c} \oplus \mathbb{R} \cdot t\dot{c}}_{\text{die 'uninteressanten'}} \oplus \left\{ \text{Jacobifelder } J \text{ längs } c \text{ mit } J \perp \dot{c}, \frac{\nabla}{dt}J \perp \dot{c} \right\}.$$

*Beweis.* Ist  $v \in T_{c(t)}(M)$ . Dann ist  $v = \frac{g(v, \dot{c}(t))}{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}\dot{c}(t) + w$  mit  $w \in \dot{c}(t)^\perp$ . Sei  $J$  ein Jacobifeld. Dann ist  $J$  durch seine Anfangswerte  $J(t_0)$  und  $\frac{\nabla}{dt}J(t_0)$  bestimmt. Wegen Linearität der Jacobigleichung können wir die Anfangswerte und damit das Jacobifeld in den 'uninteressanten' Anteil und in den aus Lemma II.9.10 zerlegen. □

**Beispiel II.9.12.** Die letzte Folgerung stimmt nicht für lichtartige Geodäten: Sei  $c$  eine lichtartige Geodätische in  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ . Dann ist insbesondere  $\dot{c}(t)^\perp = \mathbb{R}\dot{c}(t)$ . Sei z.B.  $X$  ein lichtartiges paralleles Vektorfeld längs  $c$ , welches linear unabhängig von  $\dot{c}$  ist. Dann ist  $X \not\perp \dot{c}$ . Da  $X$  parallel und  $R = 0$  ist, ist  $X$  ein Jacobifeld.

Für die Berechnung von 'interessanten Jacobifeldern' auf Räumen konstanter Schnittkrümmung brauchen wir noch Hilfsfunktionen:

**Vorl. 21**

\*wobei  $v \perp w$  die Kurzschreibweise für  $g_p(v, w) = 0$  für  $v, w \in T_pM$  ist

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

**Definition II.9.13.** Sei  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Die verallgemeinerten Sinus- und Kosinusfunktionen  $s_\kappa, c_\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch

$$s_\kappa(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0 \\ r, & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}r), & \kappa < 0 \end{cases} \quad c_\kappa(r) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0 \\ 1, & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}r), & \kappa < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung II.9.14.** Es gilt  $\kappa s_\kappa^2 + c_\kappa^2 = 1$ ,  $s'_\kappa = c_\kappa$ ,  $c'_\kappa = -\kappa s_\kappa$ ,  $s_\kappa(0) = 0$  und  $c_\kappa(0) = 1$ .

**Beispiel II.9.15.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ . Sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Sei  $X$  ein paralleles Vektorfeld längs  $c$  mit  $X \perp \dot{c}$ . Wir setzen  $J(t) := (as_\kappa(t) + bc_\kappa(t))X(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 J = (a\ddot{s}_\kappa + b\ddot{c}_\kappa)X = -\kappa(as_\kappa + bc_\kappa)X = -\kappa J.$$

Nach Polarisation der Schnittkrümmungsdefinition für konstante Schnittkrümmung  $\kappa$  gilt  $R(X, Y)Z = \kappa(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$ , also:

$$R(\dot{c}, J)\dot{c} = (as_\kappa + bc_\kappa)R(\dot{c}, X)\dot{c} = (as_\kappa + bc_\kappa)\underbrace{\kappa(g(X, \dot{c})\dot{c} - g(\dot{c}, \dot{c})X)}_{=0} = -\kappa J.$$

Damit ist  $J$  ein Jacobifeld.

**Satz II.9.16.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Sei  $v \in T_p M$  derart, dass die Geodätische  $c_v(t) = \exp_p(tv)$  für  $t \in [0, 1]$  definiert sei. Sei  $\eta \in T_p M \cong T_{tv} T_p M$  und sei  $J$  das Jacobifeld längs  $c_v$  mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(0) = \eta$ . Dann gilt

$$d_{tv} \exp_p(\eta) = \frac{J(t)}{t} \text{ für } t \in (0, 1].$$

Insbesondere ist

$$\ker(d_{tv} \exp_p) \cong \{\text{Jacobifelder längs } c_v(t) \mid J(0) = 0, J(1) = 0\}$$

*Beweis.* Wir betrachten die geodätische Variation  $c(s, t) := \exp_p(t(v + s\eta))$ . Das zugehörige Variationsvektorfeld sei  $X := \frac{\partial c}{\partial s}|_{s=0}$ . Da  $X$  ein Jacobifeld mit

$$X(0) = \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) \stackrel{t=0}{=} \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp_p(0) = 0 = J(0)$$

und

$$\frac{\nabla}{dt} X(0) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds}|_{s=0} (v + s\eta) = \eta = \frac{\nabla}{dt} J(0)$$

ist, gilt wegen Eindeutigkeit der Jacobifelder bei gegebenen Anfangswerten, dass  $X = J$  ist. Also gilt

$$d_{tv} \exp_p(\eta) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp_p(tv + s\eta) = \frac{d}{ds}|_{s=0} c(st^{-1}, t) = t^{-1} \frac{d}{ds}|_{s=0} c(s, t) = t^{-1} J(t).$$

□

**Definition II.9.17.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische. Dann heißen  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 \neq t_2$  konjugierte Punkte längs  $c$ , falls es ein nicht-triviales Jacobifeld  $J$  längs  $c$  mit  $J(t_1) = 0$  und  $J(t_2) = 0$  gibt.

**Folgerung II.9.18.**  $d_v \exp_p$  ist genau dann nicht invertierbar, wenn  $p$  und  $\exp_p(v)$  konjugierte Punkte längs  $\exp_p(tv)$  sind.

*Beweis.* Da  $d_v \exp_p: T_v T_p M \cong T_p M \rightarrow T_p M$  linear ist, ist es genau dann nicht invertierbar, wenn es nicht injektiv ist. Mit letztem Satz folgt so die Behauptung. □

**Beispiel II.9.19.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K = \kappa$ . Sei  $c_v: I \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Sei  $t_1 = 0 \in I$ . Nach Beispiel II.9.15 haben Jacobifelder die Form  $J(t) = (as_\kappa(t) + bc_\kappa(t))X(t)$ , wobei  $X$  ein paralleles Vektorfeld längs  $c$  ist.

$\kappa \leq 0$  Jacobifelder haben maximal eine Nullstelle. Es gibt also keinen konjugierten Punkte und  $d_v \exp_p$  ist für alle  $v$  im Definitionsbereich von  $\exp_p$  invertierbar.

$\kappa > 0$  Die zu  $t_0$  konjugierten Punkte sind  $t_0 + \frac{m\pi}{\sqrt{\kappa}}$  für  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Auf der Sphäre sind also insbesondere  $p$  und  $-p$  entlang jeder Geodäten konjugiert.

**Satz II.9.20.** Sei  $(M^m, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: [t_0, t_1] \rightarrow M$  eine Geodätische und seien  $c(t_0)$  und  $c(t_1)$  längs  $c$  nicht zueinander konjugiert. Dann ist die lineare Abbildung

$$A: \{ \text{Jacobifelder längs } c \} \rightarrow T_{c(t_0)}M \oplus T_{c(t_1)}M, J \mapsto (J(t_0), J(t_1))$$

bijektiv.

*Beweis.* Injektivität folgt, da  $c(t_0)$  und  $c(t_1)$  längs nicht zueinander konjugiert sind. Da beide Räume  $2m$ -dimensional sind, folgt auch die Surjektivität.  $\square$

**Lemma II.9.21.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $v \in T_pM$ . Die Geodätische  $c(t) = \exp_p(tv)$  sei auf  $[0, b]$  definiert. Dann gilt  $g(d_{tv} \exp_p(\eta), \dot{c}(t)) = g(\eta, v)$  für  $\eta \in T_pM \cong T_{tv}T_pM$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $\eta = v$ . Dann ist  $d_{tv} \exp_p(v) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp_p(tv + sv) = \frac{d}{ds}|_{s=0} c(t + s) = \dot{c}(t)$ . Dann gilt  $g(d_{tv} \exp_p(\eta), \dot{c}(t)) = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \stackrel{\text{Geod}}{=} g(v = \dot{c}(0), v)$ . Sei nun  $\eta \perp v$  und sei  $J$  das Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(0) = \eta$ . Da  $J(0) \perp \dot{c}(0) = v$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(0) \perp v$  gilt  $J(t) \perp \dot{c}(t)$ . Weiterhin gilt nach Satz II.9.16  $d_{tv} \exp_p(\eta) = t^{-1} J(t)$  für  $t > 0$ . Zusammen gilt dann

$$g(d_{tv} \exp_p(\eta), \dot{c}(t)) = g(t^{-1} J(t), \dot{c}(t)) = 0 = g(\eta, v).$$

$\square$

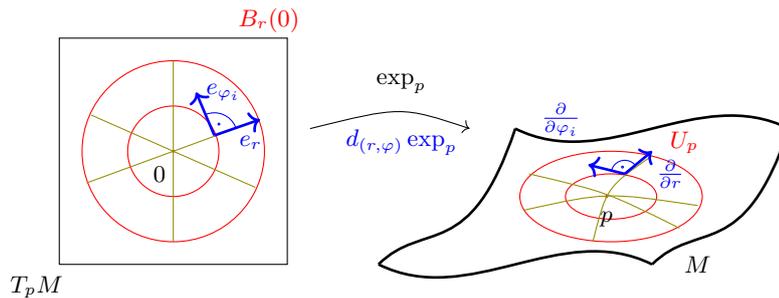


Abb. II.11.: Wählt man auf  $T_pM$  Polarkoordinaten  $(r, \varphi) := (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})$  mit  $\langle e_{\varphi_i}, e_{\varphi_j} \rangle = \delta_{ij}$ . Dann bleiben die Geraden  $r \mapsto (r, \varphi)$  auch nach Anwenden von  $\exp_p$  Geodäten, vgl. Bem. II.8.3. Damit können wir Lemma II.9.21 anwenden und erhalten, dass  $g$  in den Koordinaten  $(r, \varphi_i)$  die Form  $g_{rr} = 1$  und  $g_{r\varphi_i} = 0$  hat.

## II.10. Mehr zur Riemannschen Geometrie

Vorl. 22

### II.10.1. Injektivitätsradius

**Definition II.10.1.** Sei  $(M^m, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Der *Injektivitätsradius* in  $p \in M$  ist definiert als

$$\text{inj}(p) := \sup \{ r \mid \exp_p|_{B_r(0)} : B_r(0) \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \text{ ist Diffeo} \},$$

wobei  $B_r(0) := \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < r^2 \}$  ist.

**Beispiel II.10.2.** (i)

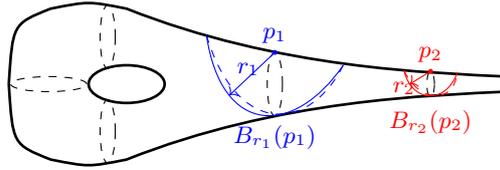


Abb. II.12.: Für diese Untermannigfaltigkeit verstanden mit der induzierten Metrik ist  $r_1 > r_2$ . Insbesondere haben wir  $\text{inj}(p) \rightarrow 0$  für  $d(p_1, p) \rightarrow \infty$ .

(ii) Auf der Sphäre  $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Radius 1 ist der Injektivitätsradius in jedem Punkt  $\pi$ .

(iii) Gibt es von einem Punkt  $p \in M$  eine Geodäte  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . Dann ist  $\text{inj}(p) \leq L(\gamma)$ .

**Bemerkung II.10.3.** Nach Folgerung II.8.4 gilt  $\text{inj}(p) > 0$ .

**Lemma II.10.4.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für  $0 < r < \text{inj}(p)$  gilt  $\exp_p(B_r(0)) = B_r(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$ .

*Beweis.* Sei  $q = \exp_p(v)$  mit  $\|v\| < r$ . Dann ist  $t \mapsto \exp_p(tv)$ ,  $t \in [0, 1]$  eine Geodätische von  $p$  nach  $q$  der Länge  $\|v\| < r$ . Damit ist  $d(p, q) < r$  und damit  $q \in B_r(p)$ .

Sei andererseits  $q \notin \exp_p(B_r(0))$ . Wir betrachten eine Kurve  $\gamma: [0, L(\gamma)] \rightarrow M$ , nach Bogenlänge parametrisiert, von  $p$  nach  $q$ . Diese muss  $\overline{\exp_p(B_r(0))}$  zuerst in einem Punkt verlassen, sagen wir  $\bar{q} = \gamma(t_0)$ . Wir wählen für  $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^m$  Polarkoordinaten  $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) =: (r, \varphi)$  und erhalten mittels  $\exp_p$  Polarkoordinaten für  $\exp_p(B_r(0))$ . In diesen Koordinaten gilt nach Lemma II.9.21 für die Metrikkoeffizienten  $g_{rr}(v) = 1$  nach Definition von  $\exp_p$  und  $g_{r\varphi_i} = 0$ . Damit gilt

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, t_0]}) = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \geq \int_0^{t_0} \dot{\gamma}^r(t) dt = \gamma^r(t_0) - \gamma^r(0) = r.$$

Damit ist  $d(p, q) \geq r$  und  $q \notin B_r(p)$ . □

**Folgerung II.10.5.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ . Sei  $0 < r < \text{inj}(p)$ . Dann kann jeder Punkt in  $q \in B_r(p)$  mit  $p$  mittels einer eindeutigen minimalen Geodäten verbunden werden.

*Beweis.* Sei  $q \in B_r(p)$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $v \in \mathbb{R}^m \cong T_p M$  mit  $\|v\| = d(p, q) < r$ , so dass  $\exp_p(v) = q$  ist. Damit ist  $t \mapsto \exp_p(tv)$ ,  $t \in [0, 1]$ , eine minimale Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Das gibt die Existenz. Andererseits kann jede minimale Geodäte von  $p$  nach  $q$  derart parametrisiert werden, dass sie die obige Form hat. Die Eindeutigkeit von  $v$  gibt die Eindeutigkeit der minimalen Geodäten. □

**Folgerung II.10.6.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ . Sei  $0 < r < \text{inj}(p)$ . Dann ist  $B_r(p)$  offen in  $M$ .

*Beweis.* Sei  $0 < r < r' < \text{inj}(p)$ . Dann folgt die Behauptung aus  $\exp_p(B_r(0)) = B_r(p)$ ,  $\exp_p|_{B_{r'}(0)}$  Diffeomorphismus und  $B_{r'}(0)$  offen in  $\mathbb{R}^m$ . □

**Folgerung II.10.7.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $(M, d)$  der zugehörige metrische Raum. Dann ist die durch  $d$  erzeugte Topologie auf  $M$  gleich der ursprünglichen Topologie. Insbesondere ist die Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  damit stetig.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass offen bzgl. der topologischen Mannigfaltigkeit gleich dem offen bzgl. der Abstandsfunktion  $d$  ist.

Sei zunächst  $U \subseteq M$  offen bzgl.  $d$ . Dann gibt es für jedes  $p \in U$  ein  $r(p) > 0$  mit  $B_{r(p)}(p) \subseteq U$ . O.B.d.A. sei  $r(p) < \text{inj}(p)$ . Dann ist  $B_{r(p)}(p)$  offen in  $M$  und damit als Vereinigung offener Teilmengen auch  $U = \cup_{p \in U} B_{r(p)}(p)$ .

Sei andererseits  $U \subseteq M$  offen bzgl. der topologischen Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei  $p \in U$ . Sei  $U' \subseteq U \cap \exp_p(B_r(0))$  offen wobei  $0 < r < \text{inj}(p)$ . Setze  $V = \exp_p^{-1}(U')$ . Dann ist  $V$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}^m$ . Damit gibt es ein  $r' \in (0, r)$  mit  $B_{r'}(0) \subseteq V$  und es gilt  $B_{r'}(p) = \exp_p(B_{r'}(0)) \subseteq U$ . □

### II.10.2. Vollständigkeit

**Definition II.10.8.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Wir nennen  $(M, g)$  *geodätisch vollständig* in  $p$ , falls  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, d.h. alle Geodätischen durch  $p$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Satz II.10.9 (Hopf-Rinow).** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $(M, g)$  ist geodätisch vollständig in  $p$ .
  - (2)  $(M, g)$  ist geodätisch vollständig in allen  $q \in M$ .
  - (3) Die Bälle  $\overline{B_r(p)}$  sind für alle  $r > 0$  kompakt.
  - (4) ( $\cong$  Heine-Borel-Eigenschaft\*) Die Bälle  $\overline{B_r(q)}$  sind für alle  $r > 0$  und alle  $q \in M$  kompakt.
  - (5)  $(M, d)$  ist vollständig als metrischer Raum, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.
- (\* Ist  $(M, g)$  geodätisch vollständig, dann lässt sich jeder Punkt  $q \in M$  mit jedem Punkt  $p \in M$  durch eine minimale (=längenminimierende) Geodäte verbinden.

**Folgerung II.10.10.** Jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.

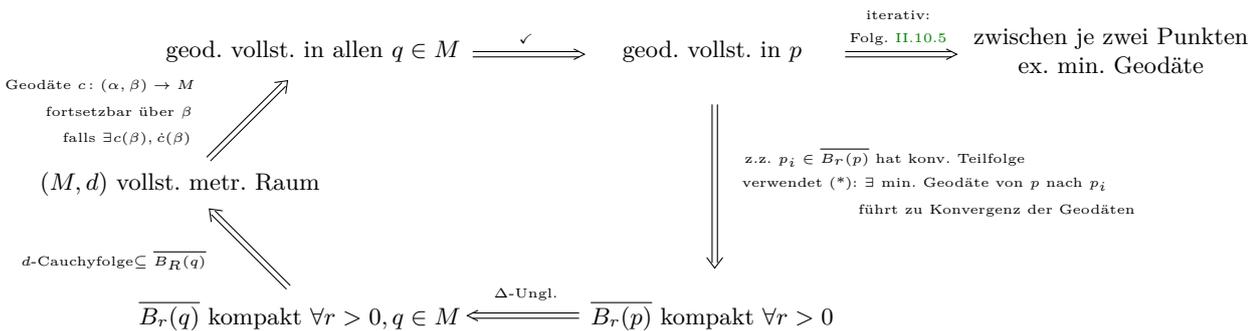
*Beweis.*  $\overline{B_r(p)} \subseteq M$  ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes  $M$  wieder kompakt. Damit folgt nach dem Satz von Hopf-Rinow die Behauptung. □

**Folgerung II.10.11.** Gibt es auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  eine eigentliche (=Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) Lipschitzfunktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $M$  vollständig.

*Beweis.* Wir zeigen die Bedingung (3) in Hopf-Rinow: Sei  $C := \overline{B_r(p)}$ . Dann ist  $C$  beschränkt und abgeschlossen. Da  $f$  Lipschitz ist, ist auch  $f(C)$  beschränkt. Also  $C \subseteq f^{-1}[a, b]$  für ein geeignetes kompaktes Intervall  $[a, b]$ . Da  $f$  eigentlich ist, ist  $f^{-1}[a, b]$  kompakt und damit ist auch  $C$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt. □

**Bemerkung II.10.12.** Die Abstandsfunktion zu einem gegebenen Punkt  $d_p: M \rightarrow \mathbb{R}, q \mapsto d(p, q)$  ist eine Lipschitzfunktion, denn nach Dreiecksungleichung ist  $|d_p(x) - d_p(y)| = |d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$ . Damit gibt die letzte Folgerung ein Kriterium um Vollständigkeit zu zeigen, in dem man schaut, ob die Abstandsfunktion zu einem gegebenen Punkt eigentlich ist.

#### Beweisschema zu Satz II.10.9.



*Beweis von Hopf-Rinow.* (\*): Sei  $q \in M$ . Gilt sogar  $q \in B_{\text{inj}(p)}(p)$ , dann wissen wir nach Folgerung II.10.5, dass es eine minimale Geodäte von  $p$  nach  $q$  gibt. Sei nun  $q \notin B_{\text{inj}(p)}(p)$ . Seien  $\gamma_k$  stetige, stückweise glatte Kurven von  $p$  nach  $q$  mit  $L(\gamma_k) = d(p, q) + \epsilon_k$  mit  $\epsilon_k \rightarrow 0$ . Wir wählen  $0 < r_0 < \text{inj}(p)$ . Dann ist nach Lemma II.10.4  $S_{r_0}(p) := \{z \in M \mid d(p, z) = r_0\} = \exp_p(S^{m-1}(r_0))$  und damit kompakt. Sei  $q_k$  der erste Schnittpunkt von  $\gamma_k$

\*Heine-Borel-Eigenschaft = Jede beschränkte abgeschlossene Menge ist kompakt

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

mit  $S_{r_0}(p)$ . Wegen Kompaktheit von  $S_{r_0}(p)$  besitzt die Folge  $q_k$  eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert sei  $z \in S_{r_0}(p)$ . Wegen

$$d(p, q) \leq d(p, q_k) + d(q_k, q) \leq L(\gamma_k) \leq d(p, q) + \epsilon_k$$

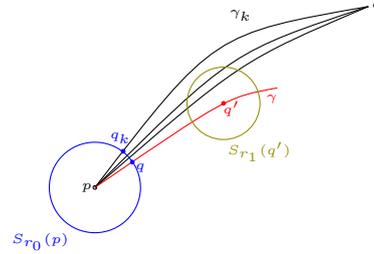
gilt mit  $k \rightarrow \infty$

$$d(p, q) = d(p, z) + d(z, q).$$

Sei  $\gamma$  die minimale Geodätische, die  $p$  und  $z$  verbindet und nach Bogenlänge parametrisiert ist. Da nach (1)  $(M, g)$  geodätisch vollständig in  $p$  ist, lässt sich  $\gamma$  auf das Intervall  $[0, d(p, q)]$  fortsetzen. Es bleibt zu zeigen, dass  $\gamma: [0, d(p, q)] \rightarrow M$  eine minimale Geodätische von  $p$  nach  $q$  ist:

Wir setzen  $I := \{t \in [0, d(p, q)] \mid d(p, \gamma(t)) = t, d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) = d(p, q)\}$ . Nach obigen Überlegungen ist  $[0, r_0] \subseteq I$ . Wegen Stetigkeit ist  $I$  abgeschlossen. Sei  $t_0$  maximal derart, dass  $[0, t_0] \subseteq I$  gilt. Es ist zu zeigen, dass  $t_0 = d(p, q)$  ist, denn dann ist insbesondere  $\gamma(d(p, q)) = q$ .

Annahme:  $t_0 < d(p, q)$ . Sei  $q' = \gamma(t_0)$ . Wir wählen  $r_1 < \min\{d(p, q) - t_0, \text{inj}(q')\}$ . Dann finden wir wie oben ein  $\bar{q}' \in S_{r_1}(q')$  mit  $d(q', \bar{q}') + d(\bar{q}', q) = d(q', q)$ . Sei  $\gamma_1$  die minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $q'$  nach  $\bar{q}'$ . Sei  $z$  ein Punkt auf dieser Geodätischen. Wegen



$$d(p, z) \leq d(p, q') + d(q', z) = d(p, q') + d(q', q) - d(z, q) = d(p, q) - d(z, q) \leq d(p, z)$$

folgt  $d(p, z) = d(p, q') + d(q', z)$  und  $d(p, q) = d(z, q) + d(p, z)$ . Also gilt insbesondere  $d(p, \bar{q}) = d(p, q') + d(q', \bar{q})$  und damit realisiert die aus Kurve  $\gamma|_{[0, t_0]}$  und  $\gamma_1$  zusammengesetzte Kurve den Abstand  $d(p, \bar{q})$  und ist damit selbst eine Geodätische. Wegen Eindeutigkeit der Geodätischen bei vorgegebenen Anfangswerten muss dies die Geodätische  $\gamma|_{[0, t_0+r_1]}$  sein. Also ist  $[0, t_0 + r_1] \subseteq I$ , was den gesuchten Widerspruch liefert.

(1)  $\implies$  (3): Da in metrischen Räumen, Kompaktheit gleich Folgenkompaktheit ist, reicht es zu zeigen, dass jede Folge  $p_i \in \overline{B_r(p)}$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Nach (\*) existieren minimale Geodätische  $\gamma_i(t)$  mit  $\gamma_i(0) = p$  und  $\gamma_i(t_i) = p_i$ , wobei o.B.d.A. die  $\gamma_i$  nach Bogenlänge parametrisiert seien, also  $t_i = L(\gamma_i) = d(p, p_i) \leq r$ . Die  $\dot{\gamma}_i(0)$  sind Einheitsvektoren in  $T_p M$ . Da  $S^{m-1}(0) \subseteq T_p M$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $\dot{\gamma}_{i_j}(0) \rightarrow v \in S^{m-1}(0) \subseteq T_p M$ . Wegen  $t_{i_j} \in [0, r]$ , gibt es auch hier wieder eine konvergente Teilfolge  $t_{i_{j_k}} \rightarrow T \in [0, r]$ . Wir setzen  $q := \exp_p(Tv)$  und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_{j_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp_p(t_{i_{j_k}} \dot{\gamma}_{i_{j_k}}(0)) = \exp_p(\lim_{k \rightarrow \infty} t_{i_{j_k}} \dot{\gamma}_{i_{j_k}}(0)) = \exp_p(Tv) = q.$$

(3)  $\implies$  (4): Seien alle Bälle  $\overline{B_r(p)}$  kompakt für  $r > 0$ . Sei  $q \in M$  und  $R > 0$ . Dann gilt nach Dreiecksungleichung

$$\overline{B_R(q)} \subseteq \overline{B_{R+d(p,q)}(p)}.$$

Damit ist  $\overline{B_R(q)}$  als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $\overline{B_{R+d(p,q)}(p)}$  selbst wieder kompakt.

(4)  $\implies$  (5): Seien alle Bälle  $\overline{B_r(q)}$  kompakt. Sei  $p_i$  eine Cauchyfolge in  $(M, d)$ . Dann gibt es ein  $R > 0$  mit  $p_i \in \overline{B_R(p)}$  für alle  $i$ . Da  $\overline{B_R(p)}$  kompakt ist, konvergiert die Folge.

(5)  $\implies$  (2): Sei  $c: (\alpha, \beta) \rightarrow M$  eine Geodätische mit maximalem Definitionsbereich und nach Bogenlänge parametrisiert. Wir wollen zeigen, dass  $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$  gilt. Dazu nehmen wir an, dass  $\beta < \infty$ . Dann gibt es eine Folge  $t_i \in (\alpha, \beta)$  mit  $t_i \rightarrow \beta$ , und es gilt

$$d(c(t_i), c(t_j)) \leq L(c|_{[t_i, t_j]}) = |t_i - t_j|.$$

Also ist  $c(t_i)$  eine Cauchy-Folge in  $(M, d)$ . Wegen Vollständigkeit, existiert ein eindeutiges  $q \in M$  mit  $c(t_i) \rightarrow q$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Wir zeigen als nächstes, dass auch der Limes von  $\dot{c}(t)$  für  $t \rightarrow \beta$  existiert: Sei  $\kappa = \exp_q^{-1}: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq T_q \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$  um  $q$  mit  $\kappa(q) = 0$ . Sei  $r > 0$  derart, dass  $\overline{B_r(0)} \subseteq V$  ist. Sei  $x := \kappa \circ c$  für  $t \in (\beta - \epsilon, \beta)$  wobei  $\kappa \circ c|_{(\beta - \epsilon, \beta)} \subseteq \overline{B_r(0)}$ . Setze  $a := \dot{x}$ . Dann gilt nach Geodätengleichung:

$$\dot{a}^k = \ddot{x}^k = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x) a^i a^j$$

Da  $\overline{B_r(0)}$  kompakt ist, gibt es ein  $C$  mit  $|\Gamma_{ij}^k(x)| \leq C$  für alle  $x \in \overline{B_r(0)}$ . Damit ist

$$|\dot{a}^k| \leq m^2 C \|a\|_{\max}^2 \stackrel{(**)}{\leq} C' \underbrace{g(\dot{c}, \dot{c})}_{=1} = C'$$

für ein  $C' > 0$ , wobei  $(**)$  folgt wegen: Alle Normen des  $\mathbb{R}^m \cong T_x \mathbb{R}^m$  sind äquivalent, also insbesondere die Maximumsnorm auf  $T_x \mathbb{R}^m$  und die Norm des Skalarproduktes  $(\exp_q^* g)_x$  auf  $T_x \mathbb{R}^m$ . Damit gibt es für jedes  $x \in \overline{B_r(0)}$  ein  $C(x) > 0$  mit  $\|v\|_{\max}^2 \leq C(x)(\exp_q^* g)_x(a, a) = C(x)g(d_x \exp_q(a) = d_x \exp_q(\dot{x}) = \dot{c}, \dot{c})$  für alle  $a \in T_x \mathbb{R}^m$ . Hier hängt  $C(x)$  von  $x$  ab. Da aber  $g_p$  stetig in  $p$  ist, kann auch  $C(x)$  stetig gewählt werden. Da  $\overline{B_r(0)}$  kompakt ist, folgt die Existenz von  $C'$ . Damit haben wir

$$\|a(t_j) - a(t_i)\|_{\max} = \left\| \int_{t_j}^{t_i} \dot{a}(u) du \right\|_{\max} \leq \left| \int_{t_j}^{t_i} \|\dot{a}(u)\|_{\max} du \right| \leq C' |t_j - t_i|$$

Also bilden die  $a(t_i) = \dot{x}(t_i)$  eine Cauchyfolge und konvergieren somit gegen ein eindeutiges  $A \in \mathbb{R}^m$ . Damit setzt sich sowohl  $c$  als auch  $\dot{c}$  in  $\beta$  fort. Nach Existenz von Geodätischen kann somit  $c$  auch auf eine Umgebung von  $\beta$  fortgesetzt werden. Widerspruch.

(2)  $\implies$  (1): trivial

□

Da für Riemannsche Mannigfaltigkeiten geodätisch vollständig und metrisch vollständig nach Hopf-Rinow äquivalent sind, spricht man oft nur von vollständigen Mannigfaltigkeiten.

### II.10.3. Zweite Variation des Energiefunktionals

Ziel: Wir wissen aus Abschnitt II.6, dass kritische Punkte des Energiefunktionals genau die Geodätischen sind. Wissen wir mehr über die kritischen Punkte, können wir im Allgemeinen mehr über Geodätische aussagen und andersherum. Ist z.B. eine Geodätische minimal, so muss bezüglich aller geodätischen Variationen mit festen Endpunkten, die zweite Variation der Energie nichtnegativ sein. Wir berechnen eine Formel für die zweite Variation der Energie und beschränken uns dabei auf Variationen mit festen Endpunkten:

**Satz II.10.13** (Zweite Variation der Energie). *Sei  $M$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische und  $c_s$  eine Variation von  $c$  mit festen Endpunkten. Sei  $X$  das zugehörige Variationsvektorfeld. Dann gilt*

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) = \int_a^b \left( g \left( \frac{\nabla}{dt} X(t), \frac{\nabla}{dt} X(t) \right) - g(R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t)) \right) dt.$$

*Beweis.* Im Beweis der ersten Variationsformel des Energiefunktionals, s. Satz II.6.3, hatten wir

$$\frac{d}{ds} E(c_s) = \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial t} \right) dt.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) &= \int_a^b \left( g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) + g \left( \frac{\nabla}{dt} X, \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial t} \Big|_{s=0} \right) \right) dt \\ &= \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) dt + \int_a^b g(R(X, \dot{c})X, \dot{c}) dt + \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{dt} X, \frac{\nabla}{dt} X \right) dt. \end{aligned}$$

Mittels

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g \left( \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) dt &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) - g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \dot{c}}_{=0} \right) \right) dt \\
 &= g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) \Big|_a^b \\
 &= g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{c(s, b)}_{=c(b)}, \dot{c}(b) \right) \Big|_{s=0} - g \left( \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{c(s, a)}_{=c(a)}, \dot{c}(a) \right) \Big|_{s=0} = 0.
 \end{aligned}$$

erhalten wir die Behauptung. □

**Bemerkung II.10.14.** Ist  $c: [a, b] \rightarrow M$  minimale Geodätische und  $c_s$  eine Variation von  $c$  mit festen Endpunkten. Wegen der Minimalität ist  $L(c) \leq L(c_s)$  für alle  $s$ . Es ist  $L(c_s) \leq 2(b-a)E(c_s)$  (nach Cauchy-Schwarz) und  $L(c) = 2(b-a)E(c)$ , da  $c$  Geodätische und damit proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Insgesamt ist also:  $E(c) \leq E(c_s)$  für alle Variationen  $c_s$  mit festen Endpunkten und damit  $\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) \geq 0$ .

### II.10.4. Satz von Bonnet-Myers

**Definition II.10.15.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der *Durchmesser* von  $(M, g)$  ist definiert als

$$\text{diam}(M, g) := \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\}.$$

**Beispiel II.10.16.** Ist  $\dim M > 1$ , dann ist  $\text{diam}(M, g) \in (0, \infty]$ .

$$\text{diam}(S^m, g_{st}) = \pi, \quad \text{diam}(\mathbb{R}^m, g_E) = \infty$$

**Lemma II.10.17.** Sei  $(M, g)$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\text{diam}(M, g) < \infty$  genau dann, wenn  $M$  kompakt ist.

*Beweis.* Sei  $M$  kompakt. Dann ist auch  $M \times M$  kompakt. Damit ist  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und nimmt sein Maximum an.

Sei  $\text{diam}(M, g) < \infty$ . Dann gibt es ein  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(p)} = M$ . Da  $M$  vollständig ist, folgt mit dem Satz von Hopf-Rinow, dass  $M$  kompakt ist. □

**Satz II.10.18.** (Bonnet-Myers)

Sei  $(M^m, g)$  eine vollständige und zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $\kappa > 0$ , so dass  $\text{Ric} \geq \kappa(m-1)g$ , d.h.  $\text{Ric}_p(v, v) \geq \kappa(m-1)g_p(v, v)$  für alle  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ . Dann ist  $M$  kompakt und

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

**Bemerkung II.10.19.** Sätze, wie Bonnet-Myers, bei denen man Krümmungsschranken annimmt, werden i.A. bewiesen, in dem man die zu untersuchenden Größen man denen des Raumes vergleicht, in dem diese Krümmungsschranken angenommen werden. Deshalb nennt man das auch Vergleichsgeometrie.

*Beweis von Bonnet-Myers.* Für  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$  setzen wir  $L := d(p, q)$ , wobei  $d$  die Riemannsche Abstandsfunktion ist. Da  $(M, g)$  vollständig ist, gibt es nach dem Satz von Hopf-Rinow eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $c: [0, L] \rightarrow M$  von  $c(0) = p$  nach  $c(L) = q$ .

Sei  $e \in T_p M$  mit  $e \perp \dot{c}(0)$  und  $g_p(e, e) = 1$ . Sei  $e(t)$  das zugehörige parallele Vektorfeld längs  $c$ . Wir setzen

$$X(t) := \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right) e(t).$$

Sei  $c_s(t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$ . Dann ist  $c_s(t)$  eine Variation von  $c$  mit festen Endpunkten. Da  $c$  minimale Geodätische ist, haben wir  $0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c_s)$  und

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) \stackrel{\text{(Bem. II.10.14)}}{=} \int_0^L \left( g \left( \frac{\nabla}{dt} X(t), \frac{\nabla}{dt} X(t) \right) - g(R(X(t), \dot{c}(t)), \dot{c}(t), X(t)) \right) dt \\
 &= \int_0^L \left( g \left( \frac{\pi}{L} \cos \left( \frac{\pi}{L} t \right) e(t), \frac{\pi}{L} \cos \left( \frac{\pi}{L} t \right) e(t) \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) g(R(e(t), \dot{c}(t)), \dot{c}(t), e(t)) \right) dt \\
 &= \int_0^L \left( \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) g(R(e(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), e(t)) \right) dt.
 \end{aligned}$$

Startet man mit einer Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_{m-1}, \dot{c}(0)$  und summiert obige Gleichungen für  $e = e_i$  über  $i$ , dann erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^L \left( (m-1) \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) \underbrace{\text{Ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}_{\geq (m-1)\kappa} \right) dt \\
 &\leq (m-1) \int_0^L \left( \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} t \right) \kappa \right) dt \\
 &\leq (m-1) \frac{1}{2} \frac{\pi^2 - \kappa L^2}{L}.
 \end{aligned}$$

Also ist  $L \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  und damit  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Nach Lemma II.10.17 ist  $(M, g)$  dann kompakt. □

Vorl. 25

**Beispiel II.10.20.**

$M = S^m$  mit  $g = \alpha^2 g_{st}$ ,  $\alpha > 0$ . Dann gilt

$$\text{Radius} = \alpha, \text{diam}(M) = \alpha\pi, \text{sec} = \frac{1}{\alpha^2}, \text{Ric} = \frac{1}{\alpha^2}(m-1)g, \text{scal} = \frac{1}{\alpha^2}m(m-1).$$

**II.10.5. Weitere Beispiele für Sätze der Vergleichsgeometrie**

Es folgen ein paar weitere Beispiele für Vergleichssätze. Für Beweise vgl. z.B. [3].

**Satz II.10.21.** (Satz von Hadamard) Sei  $(M, g)$  eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, also  $\text{sec}_p(E)$  für alle  $p \in M$  und alle affinen Ebenen  $E \subseteq T_p M$ . Dann ist  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist  $M$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  mit  $n = \dim M$ .

**Bemerkung II.10.22.**  $M$  ist einfach zusammenhängend, falls  $M$  zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve  $c: S^1 \rightarrow M$  stetig in eine konstante Kurve deformiert werden kann (d.h. es gibt eine stetige Abbildung  $\tilde{c}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\tilde{c}(t, 0) = c(t)$  und  $\tilde{c}(t, 1) = p$  für ein  $p \in M$ ).

Bsp:  $S^1$  und Torus sind nicht einfach zusammenhängend.  $\mathbb{R}^m, S^n$  für  $n > 1$  sind einfach zusammenhängend.

**Satz II.10.23.** Sei  $(M^m, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Ric} \geq \kappa(m-1)g$ . Sei

$$\bar{M}^m := \begin{cases} S^m & \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^m & \kappa = 0 \\ \mathbb{H}^m & \kappa < 0 \end{cases}$$

versehen mit der Standardmetrik für  $\kappa = 0$  bzw. das  $\sqrt{|\kappa|}$ -fache der Standardmetrik für  $\kappa \neq 0$ . Dann ist  $\bar{M}$  vollständig und hat konstant Schnittkrümmung  $\kappa$ . Sei  $\bar{B}_r \subseteq \bar{M}$  ein Ball mit Radius  $r$ . Dann ist

$$\frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(\bar{B}_r)}$$

monoton fallend in  $r$  und für  $r \rightarrow 0$  ist der Grenzwert 1.

**Bemerkung II.10.24.** (Volumina) Sei  $(M, g)$  Riemannsch. Sei  $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$ . Sei  $g_{ij}$  die Metrik in den lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots, x^m)$  zu  $\kappa$ . Dann ist  $\text{vol}(U) := \int_U \text{dvol}_g := \int_V \sqrt{\det g_{ij}} dx$ . Möchte man  $\text{vol}(M)$  bestimmen, nimmt man Überdeckung mit Karten  $\kappa_a: U_a \rightarrow V_a$  und eine zugehörige Zerlegung der Eins  $\rho_a$  und setzt:

$$\text{vol}(M) := \sum_a \int_{V_a} (\rho_a \circ \kappa_a^{-1}) \sqrt{\det g_{ij}^a} dx.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der  $(\kappa_a, \rho_a)$  und damit ist  $\text{vol}(M)$  wohldefiniert.

Ähnlich ist auch das Integral von Funktionen  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\int_M F \text{dvol}_g = \sum_a \int_{V_a} ((\rho_a F) \circ \kappa_a^{-1}) \sqrt{\det g_{ij}^a} dx.$$

*Satz von Gauß-Bonnet:* Für eine kompakte orientierbare zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt für die Gaußkrümmung  $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\int_M K \text{dvol}_g = 2\pi \chi(M) (= 2\pi(2 - 2g)),$$

wobei  $g$  das Geschlecht der Fläche (=Anzahl der Löcher) und  $\chi(M)$  die Eulercharakteristik ist.

Für die Kugel  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  ist  $g = 0$ ,  $\chi = 2$  und  $K = 1$ . Es muss also  $\text{vol}(S^2) = 4\pi$  gelten. Das ist auch so, denn: Wir wählen  $F: (\varphi, \psi) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: V \mapsto (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi)$ . Das ist eine Parametrisierung von  $S^2$  bis auf eine Nullmenge. Deshalb ist  $\text{vol}(M) = \text{vol}(F(V)) = \int_V \sqrt{\det g_{ij}} d\varphi d\psi = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\varphi d\psi = 4\pi$ .

**Satz II.10.25.** (Satz von Topogonov) Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $\geq \kappa$ . Seien  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . Sei  $\gamma_1$  minimierend. Falls  $\kappa > 0$ , sei zusätzlich  $L_g(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ .

Sei  $(N, h)$  eine vollständige zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung  $\kappa$  mit zwei nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  mit  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ . Es gelte  $L_g(\gamma_i) = L_h(\tilde{\gamma}_i) =: \ell_i$  und  $g(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)) = h(\dot{\tilde{\gamma}}_1(0), \dot{\tilde{\gamma}}_2(0))$ . Dann gilt

$$\text{dist}_g(\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_2)) \leq \text{dist}_h(\tilde{\gamma}_1(\ell_1), \tilde{\gamma}_2(\ell_2)).$$

**Satz II.10.26.** (Sphärensatz von Berger 1961) Sei  $(M^m, g)$  eine vollständige einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit  $1 \geq \text{sec} > \frac{1}{4}$ . Dann ist  $M$  homöomorph zur  $S^m$ .

**Bemerkung II.10.27.** (i) Der Sphärensatz wäre nicht mehr richtig, wenn man nur  $1 \geq \text{sec} \geq \frac{1}{4}$ . Ein Gegenbeispiel ist dann der  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = S^{2n+1}/S^1$  für  $m = 2n$  mit der durch  $S^{2n+1}$  induzierten Metrik.

(ii) Da es exotische Sphären gibt, erhält man nicht direkt die Aussage, dass  $M$  diffeomorph zur  $S^m$  ist. Der Beweis erfordert andere Techniken und wurde es viele Jahre später erbracht unter Verwendung von Riccifluss-Techniken:

**Satz II.10.28.** (Differenzieller Sphärensatz von Brendle/Schoen 2007 [2]) Sei  $(M^m, g)$  eine vollständige einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit  $1 \geq \text{sec} > \frac{1}{4}$ . Dann ist  $M$  diffeomorph zur  $S^m$ .

## II.11. Einsteingleichungen

### II.11.1. (r,s)-Tensoren

In der (multi-)lineare Algebra.

**Definition II.11.1.** Ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $V^*$  sein Dual. Dann ist ein  $(r, s)$ -Tensor eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{K}.$$

Für  $\varphi \in T_{s_1}^{r_1}(V)$  und  $\psi \in T_{s_2}^{r_2}(V)$  definiert man das *Tensorprodukt*  $\varphi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$  durch

$$\varphi \otimes \psi(u^1, \dots, u^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) := \varphi(u^1, \dots, u^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) \psi(u^{r_1+1}, \dots, u^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}).$$

Das Tensorprodukt  $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V)$  definieren wir als den linearen Span aller  $\varphi \otimes \psi$  mit  $\varphi \in T_{s_1}^{r_1}(V)$  und  $\psi \in T_{s_2}^{r_2}(V)$ , wobei Elemente  $\sum_k \varphi_1^k \otimes \psi_1^k$  und  $\sum_j \varphi_2^j \otimes \psi_2^j$  als identisch betrachtet werden, wenn sie als lineare Abbildungen identisch sind.\*

**Beispiel II.11.2.** (i) Die Dualitätspaarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$  ist ein  $(1, 1)$ -Tensor.

(ii) Die (semi-)Riemannsche Metrik  $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $p \in M$  ein  $(0, 2)$ -Tensor.

**Bemerkung II.11.3.** (i)  $T_1^0(V) = V^*$ ,  $T_0^1(V) = V$  ( $V^{**}$  wird mittels des kanonischen Isomorphismus mit  $V$  identifiziert.)

(ii) Ist  $e_1, \dots, e_m$  eine Basis von  $V$  und  $\epsilon^i$  die zugehörige Dualbasis, dann ist

$$\{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{k_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{k_s} \mid 1 \leq j_i, k_i \leq m\}$$

eine Basis von  $T_s^r(V)$ . Damit ist  $\dim T_s^r(V) = m^{r+s}$ .

(iii) Die obige Definition von  $\varphi \otimes \psi$  induziert eine lineare Abbildung  $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V) \rightarrow T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ . Das ist ein Isomorphismus. Insbesondere kann man so  $T_s^r(V)$  mit  $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$  identifizieren.

(iv) Für  $\varphi \in T_1^1(V)$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\Phi: V \rightarrow V$  mit

$$\varphi(w, v) = \langle w, \Phi(v) \rangle \quad \forall v \in V, w \in V^*.$$

**In Diffgeo.** Für eine Mannigfaltigkeit haben wir in jedem Punkt  $p \in M$  einen ausgezeichneten Vektorraum  $T_p M$  (Das Dual ist  $T_p^* M$  – der Kotangentialraum.) Nun wollen wir aber noch die Zusatzstruktur einbauen, dass sich der Punkt glatt ändern kann (ganz analog, wie wir von Bilinearformen zu (semi-)Riemannschen Metriken, gekommen sind:

Dafür noch kurz zum Kotangentialraum:

**Bemerkung II.11.4.** Für Vektorfelder haben wir zuerst das Tangentialbündel  $TM = \sqcup_p T_p M$  als Menge definiert und es dann mittels Karten  $d\kappa: U^{d\kappa} := \sqcup_{p \in U^\kappa} T_p M \rightarrow V^\kappa \times \mathbb{R}^m$  für Karten  $\kappa: U^\kappa \rightarrow V^\kappa$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit gemacht, vgl. Satz I.3.15. Seien  $(x^1, \dots, x^m)$  die zugehörigen Koordinaten, dann ist  $d\kappa^i = dx^i$ , vgl. Definition II.1.2.

Wir nennen  $\Phi_\kappa: U^\kappa \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\kappa \times \text{id}} V^\kappa \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{(d\kappa)^{-1}} U^{d\kappa} \subseteq TM$  eine *Trivialisierung* des Tangentialbündels  $TM$  und Vektorfelder sind glatte *Schnitte* von  $TM^\dagger$ . Der Vektorraum der glatten Schnitte von  $TM$  wird oft  $\Gamma(TM)$  bezeichnet - es ist also  $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$ .

Ganz analog kann man auch das Kotangentialbündel  $T^*M$  definieren:  $T^*M := \sqcup_p T_p^* M$  mit Karten

$$\begin{aligned} \delta\kappa: \sqcup_{p \in U^\kappa} T_p^* M &\rightarrow V^\kappa \times \mathbb{R}^m \\ (q, \alpha) &\mapsto \left( \kappa(q), \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_q\right), \dots, \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\bigg|_q\right) \right) \end{aligned}$$

(für  $\kappa: U^\kappa \rightarrow V^\kappa$  Karte von  $M$  wie oben) zu einer Mannigfaltigkeit machen. Die Einschränkung  $\delta\kappa$  auf  $T_p^* M$  bezeichnen wir - in Analogie zu  $d_p \kappa$  mit  $\delta_p \kappa$ .

Glatte Schnitte in  $T^*M$ , sogenannte *1-Formen* sind dann glatte Abbildungen  $\alpha: M \rightarrow T^*M$  mit  $\alpha(p) \in T_p^* M$  - in lokalen Koordinaten  $x^i$  auf  $U \subseteq M$  ist z.B.  $dx^i: p \in U \mapsto dx^i|_p$  eine 1-Form. Weiterhin ist für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung  $df: TM \rightarrow C^\infty(M)$  für jedes  $p \in M$  durch eine lineare Abbildung, nämlich die Tangentialabbildung  $d_p f: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Damit kann  $df$  als Schnitt in  $T^*M$  verstanden werden. Jeder Schnitt in  $T^*M$  kann als lokal<sup>‡</sup> endliche Summe  $\sum_i h_i df_i$  für glatte Funktionen  $f_i, h_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  geschrieben

\*So gilt z.B. für  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , dass  $\varphi_1 \otimes \beta \psi_1 + \alpha \varphi_2 \otimes \psi_1 = (\beta \varphi_1 + \alpha \varphi_2) \otimes \beta \psi_1$ .

†Das ist 'Bündelsprache' - mehr dazu (Bündeltheorie) in Diffgeo II.  $TM$  und die nachfolgenden Bündel gehören zur den sogenannten Vektorbündeln.

‡lokal endlich = für jedes  $p \in M$  sind höchstens endlich viele Summanden ungleich Null

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

werden (folgt direkt daraus, dass lokal die  $dx^i$  eine Basis bilden und man eine zugehörige Zerlegung der Eins verwenden kann).

Der Raum der 1-Formen  $\Gamma(T^*M)$  wird auch oft mit  $\Omega^1(M)$  bezeichnet.

Einer der wichtigsten Unterschiede zwischen Vektorfelder und 1-Formen ist das Transformationsverhalten unter Koordinatenwechsel:

Für Vektorfelder gilt  $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ , vgl. (I.3), für 1-Formen  $dy^i|_p = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) dx^j|_p$ , vgl. (II.2).

Aus mehreren Kopien von (Ko-)Tangentialbündeln kann man sich neue Bündel - sogenannte Tensorbündel bauen:

**Definition II.11.5.** Das  $(r, s)$ -Tensorbündel ist die Menge

$$T_s^r M := \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{s\text{-mal}} := \sqcup_{p \in M} \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s\text{-mal}}$$

als Mannigfaltigkeit mittels der Karten

$$\begin{aligned} \sqcup_{p \in U^\kappa} \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s\text{-mal}} &\rightarrow V^\kappa \times (\underbrace{\mathbb{R}^m \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^m}_{r+s\text{-mal}}) \\ (p, (v_1, \dots, v_r, u^1, \dots, u^s)) &\mapsto (\kappa(p), d_p \kappa(v_1) \otimes \dots \otimes d_p \kappa(v_r) \otimes \delta_p u^1 \otimes \dots \otimes \delta_p u^s) \end{aligned}$$

für Karten  $\kappa: U^\kappa \rightarrow V^\kappa$  des Atlases von  $M$ .

Wohldefiniertheit folgt aus der Linearität der Abbildungen  $d_p \kappa$  und  $\delta_p \kappa$ .

**Definition II.11.6.** Ein  $(r, s)$ -Tensor ist ein glatter Schnitt im Tensorbündel, also eine glatte Abbildung  $T: M \rightarrow T_s^r M$  mit  $T(p) \in \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s\text{-mal}}$ . Der Vektorraum aller  $(r, s)$ -Tensoren

bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_s^r M := \Gamma(T_s^r M)$ .

**Beispiel II.11.7.**

Vektorfeld	(1,0)-Tensor
$\nabla X$ für ein Vektorfeld $X$	(1,1)-Tensor
(semi-)Riemannsche Metrik	(0,2)-Tensor
Riemannsche Krümmung	(1,3)-Tensor

Eine (semi-)Riemannsche Metrik kann man alternativ auch direkt als (0,2)-Tensor  $g$  definieren, für den  $g(p)$  für jedes  $p \in M$  symmetrisch und nicht-degeneriert ist.

Die Aussage, dass  $\nabla X$  ein (1,1)-Tensor ist, kodiert z.B. die Eigenschaft, dass  $\nabla$  tensoriell in der ersten Komponente.

**Bemerkung II.11.8.** Wie man das von Vektorfeldern kennt hat man auf  $(r, s)$ -Tensoren, die folgenden Operationen:

- (i) Addition:  $\mathcal{T}_s^r M \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ ,  $(T + S)(p) := T(p) + S(p)$
- (ii) Multiplikation mit glatten (reellwertigen) Funktionen:  $C^\infty(M) \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ ,  $(f, T) \mapsto fT$  mit  $fT(p) := f(p)T(p)$ . Es gilt  $f_1(f_2T) = (f_1 f_2)T$  und  $(f_1 + f_2)T = f_1T + f_2T$ .

Das macht  $\mathcal{T}_s^r M$  zu einem  $C^\infty(M)$ -Modul.

Es kommt nun noch die Operation des Tensorprodukts hinzu  $\mathcal{T}_{s_1}^{r_1} M \otimes \mathcal{T}_{s_2}^{r_2} M \rightarrow \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2} M$ ,  $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ .

**Bemerkung II.11.9.** In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^m$  auf  $U \subseteq M$  bilden  $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$  für  $1 \leq i_k, j_l \leq m$  eine Basis des  $C^\infty(U)$ -Moduls aller  $(r, s)$ -Tensoren, d.h. jeder  $(r, s)$ -Tensor auf  $U$  kann als  $f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$  für glatte Funktionen  $f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  geschrieben werden.

**Bemerkung II.11.10.** Der Vektorraum  $V$  und sein Dual sind zwar isomorph, aber es gibt keinen natürlichen Isomorphismus zwischen beiden (anders als bei  $V$  und  $V^{**}$ ). Haben wir auf unserer Mannigfaltigkeit allerdings eine (semi-)Riemannsche Metrik, können wir mit dieser Zusatzstruktur einen solchen Isomorphismus zwischen  $T_p M$  und  $T_p^* M$  mittels  $T_p M \rightarrow T_p^* M$ ,  $v \mapsto g_p(\cdot, v)$  auszeichnen und damit auch einen zwischen Vektorfelder

und 1-Formen mittels  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ ,  $X \mapsto g(\cdot, X)$ . Man muss sich noch überlegen, dass dies wirklich ein Isomorphismus ist, folgt auch wieder lokal mittels einer Abbildung der Basen (definiert über Koordinaten) aufeinander abgebildet werden. Diese Konstruktion hatten wir im Spezialfall schon in Bemerkung II.3.2 ausgeführt, als wir für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  aus der 1-Form  $df$  das Vektorfeld  $\text{grad}_g f$  konstruiert hatten. In lokalen Koordinaten  $x^i$  auf  $U \subseteq M$  ist die Abbildung  $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  durch

$$f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto f^i g_{ij} dx^j$$

gegeben.\*

Ganz analog kann man die (semi-) Riemannsche Metrik  $g$  nutzen, um Tensoren aus  $\mathcal{T}_s^r(M)$  mit solchen aus  $\mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$  mit  $r + s = r' + s'$  zu identifizieren. In lokalen Koordinaten wird so z.B. aus einem  $(2, 0)$ -Tensor  $f_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$  ein  $(1, 1)$ -Tensor  $f^{ij} g_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$ .

Auch das haben wir eigentlich schon mal durchgeführt, als wir  $\text{Ric}(p): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet haben. Wegen Bilinearität ist Ric ein  $(0, 2)$ -Tensor - lokal gegeben durch  $\text{Ric}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Mittels der Metrik hatten wir daraus einen  $(1, 1)$ -Tensor gemacht - lokal gegeben durch  $\text{Ric}_k^j \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^j$  mit  $\text{Ric}_{ij} = g^{ik} \text{Ric}_k^j$ .

**Ableiten von Tensoren.** Das folgende gilt, sofern nicht anders gesagt, ist eine Definition für beliebige affine Zusammenhänge  $\nabla$ :

Wir nehmen an, wir haben einen affinen Zusammenhang auf Vektorfeldern (z.B. den Levi-Civita Zusammenhang für (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeiten) Ein Erweiterung dieses Zusammenhang auf Tensoren sollte:

- auf Vektorfelder mit dem ursprünglichen übereinstimmen
- Für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  sollte  $\nabla_X$  eine Abbildung von  $\mathcal{T}_s^r M$  in sich selbst sein.
- Wegen  $(fT) \otimes S = T \otimes (fS) = f(T \otimes S)$  für  $f \in C^\infty(M)$ ,  $T, S$  Tensoren, sollte  $\nabla$  die Leibnizregel erfüllen:

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S.$$

- Für  $\alpha \in \Omega^1(M)$  sollte  $\nabla$  kompatibel sein mit der Ableitung auf Vektorfeldern und Funktionen: Für  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  ist  $\alpha(Y) \in C^\infty(M)$  ( $\alpha_p \in T_p^* M$ ). Funktionen können wir in  $X$ -Richtung ableiten. Also fordern wir

$$X(\alpha(Y)) = (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y).$$

(Funktionen kann man als  $(0, 0)$ -Tensor betrachten. Dann wäre  $\nabla$  auf  $(0, 0)$ -Tensoren gegeben durch  $\nabla_X(f) = X(f) = df(X)$ .)

Mit diesen Forderungen ist die Erweiterung schon auf alle Tensoren erweitert und wir haben z.B.

**Bemerkung II.11.11.** Sei  $S$  ein  $(0, s)$ -Tensor. Dann ist  $\nabla S$  der  $(1, s)$ -Tensor gegeben durch

$$(\nabla_X S)(Y_1, \dots, Y_s) = X(S(Y_1, \dots, Y_s)) - \sum_{i=1}^s S(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s)$$

für alle  $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ . Analoge Formel gilt auch für  $(r, s)$ -Tensoren. Das kann man sich überlegen, in dem man sich das lokal auf sogenannte Elementartensoren, also Tensoren der Form aus Bemerkung II.11.9 überlegt und dann fortsetzt.

**Vorl. 27**

**Lemma II.11.12.** Ein affiner Zusammenhang ist genau dann metrisch bzgl. einer (semi-)Riemannschen Metrik  $g$ , wenn  $\nabla g = 0$  gilt (d.h.  $\nabla_X g = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ).

*Beweis.*  $(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2)$ . □

**Lemma II.11.13.** (2. Bianchi Identität)  $(\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0$

---

\*Auch  $f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto f^i dx^i$  ist ein Isomorphismus. Er ist aber keine gute Wahl, weil er stark von den gewählten Koordinaten abhängt - er hat nicht das nötige Transformationsverhalten, um in neuen Koordinaten ganz analog definiert zu sein.

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

*Beweis.*  $R$  ist ein  $(1, 3)$  Tensor. Es gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y)W &= \nabla_Z \left( \underbrace{R(X, Y)W}_{[\nabla_X, \nabla_Y]W - \nabla_{[X, Y]}W} \right) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - \underbrace{R(X, Y)\nabla_Z W}_{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z W - \nabla_{[X, Y]}\nabla_Z W} \\ &= [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]W - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W + R(\nabla_X Y, Z)W - \nabla_{[[X, Y], Z]}W. \end{aligned}$$

Hierbei ist in Anlehnung an die Lieklammer von Vektorfeldern  $[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$ .

Ist  $T$  eine Abbildung in die man 3 Vektorfelder einsetzt, setzen wir  $\mathfrak{S}T$  die Summe der zyklischen Permutationen, also  $\mathfrak{S}T(X, Y, Z) = T(X, Y, Z) + T(Z, X, Y) + T(Y, Z, X)$ . Z.B. ist  $\mathfrak{S}T$  für  $T(X, Y, Z) = [X, [Y, Z]]$  identisch Null - dank der Jacobi-Identität, vgl. ÜA 39(ii)(c). Desweiteren ist nach der (1.) Bianchi Identität, vgl. Satz II.7.2,  $\mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = 0$ . Damit ist

$$\mathfrak{S}((\nabla_Z R)(X, Y))W = (\mathfrak{S}[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]])(W).$$

Schreibt man jedoch  $(\mathfrak{S}[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]])$  einfach mal aus sieht man, dass dies identisch Null ist.  $\square$

**Bemerkung II.11.14.** In lokalen Koordinaten  $x^i$  schreibt man oft (mit  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ )  $(\nabla_{\partial_r} R)(\partial_j, \partial_k)\partial_\ell =: R_{jkl;r}^i \partial_i$ . In dieser Schreibweise ist dann  $R_{jkl;i}^s + R_{kil;j}^s + R_{ijl;k}^s = 0$  die zweite Bianchi Identität.

**Bemerkung II.11.15.** Eine  $(1, 1)$ -Kontraktion ist die eindeutige  $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung  $C: \mathcal{T}_1^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $C(X \otimes \alpha) = \alpha(X)$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\alpha \in \Omega^1(M)$ . Das induziert eine Kontraktion  $C_j^i: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$  durch

$$C_j^i(S)(X^1, \dots, X^{r-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) = C(S(X^1, \dots, X^{i-1}, \_, X^i, \dots, X^{r-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \_, \alpha_j, \dots, \alpha_{s-1})).$$

Kontraktionen, die wir schon kennen, sind  $\text{Ric} = C_2^1(R)$  und  $\text{scal} = C(\text{Ric}_j^i)$  mit  $\text{Ric}_j^i = g^{ik} \text{Ric}_{kj}$  (also:  $\text{scal} = g^{ij} \text{Ric}_{ij}$  - dies nennt man *metrische Kontraktion*). Man kann zeigen, dass das Bilden einer Kontraktion (metrisch oder 'normal') mit der Ableitung von Tensoren kommutiert.

### Divergenz.

**Definition II.11.16.** Die *Divergenz eines Vektorfeldes*  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ist die glatte Funktion  $\text{div}X := \text{Spur}(Y \mapsto \nabla_Y X)$ .

**Bemerkung II.11.17.** Im  $\mathbb{R}^n$  ist  $\text{div}X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$  genau die Divergenz, die man aus Analysis kennt, z.B. aus dem Divergenzatz: Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und  $\nu$  in jedem Punkt von  $\partial\Omega$  der innere Einheitsnormalenvektor. Dann ist

$$\int_{\Omega} \text{div}X = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle$$

$\rightsquigarrow$  'Divergenzfreie Größen haben immer etwas mit Erhaltungsgrößen zu tun'

Wir brauchen die Verallgemeinerung auf symmetrische  $(0, 2)$ -Tensoren:

**Definition II.11.18.** Sei  $S$  ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor. Dann ist  $\text{div}(S)$  ein  $(0, 1)$ -Tensor in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$(\text{div}S)_i = g^{jk} S_{ik;j} (= g^{jk} (\nabla_{\partial_j} S)_{ik}).$$

**Beispiel II.11.19.**  $(M, g)$  (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i)  $\text{div}g = 0$ , da schon  $\nabla g = 0$ .

(ii) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $\text{div}(fg) = df$ :

$$\text{div}(fg) = g^{jk} (\nabla_{\partial_j} (fg))_{ik} dx^i = g^{jk} g_{ik} \partial_j f dx^i = \partial_i f dx^i = df.$$

(iii) Zweite Bianchi-Identität:  $R_{jkl;i}^s + R_{kil;j}^s + R_{ijl;k}^s = 0$ .

Kontraktion über  $s$  und  $i$  liefert

$$\begin{aligned} 0 &= R_{jkl;s}^s + R_{ksl;j}^s + R_{sjl;k}^s = R_{jkl;s}^s + R_{ksl;j}^s - R_{jsl;k}^s \stackrel{[C, \nabla]=0}{=} R_{jkl;s}^s + \text{Ric}_{kl;j} - \text{Ric}_{jl;k} \\ 0 &= g^{jl} (R_{jkl;s}^s + \text{Ric}_{kl;j} - \text{Ric}_{jl;k}) \\ &\stackrel{[C, \nabla]=0}{=} g^{jl} g^{sr} R_{jklr;s} + \underbrace{g^{jl} \text{Ric}_{kl;j}}_{=(\text{divRic})_k} - \text{scal}_k \end{aligned}$$

Wegen  $g^{jl}g^{sr}R_{jklr;s} = g^{jl}g^{sr}R_{rlkj;s} = g^{sr}R^l_{rlk;s} = g^{sr}\text{Ric}_{rk;s} = (\text{div Ric})_k$ , folgt  $\text{div Ric} = \frac{1}{2}d\text{scal}$ .

Der *Einstein-Tensor*, gegeben durch  $G := \text{Ric} - \frac{\text{scal}}{2}g$ , ist dann divergenzfrei. (In Dimension 2 uninteressant, da dann identisch Null.)

### II.11.2. Allgemeine Relativitätstheorie

**Zur Motivation:** Man wollte eine Theorie die Gravitation mit der speziellen Relativitätstheorie (in der sich z.B. die Elektrodynamik formulieren lässt) zusammenbringen bzw. als Limes beide Theorien enthält:

#### Newtonsche Graviationstheorie:

- Allgemein in der Newtonschen Theorie: absolute Zeit
- (Newtonsches) Relativitätsprinzip: Alle Bezugssysteme (Bezugssystem = Festlegen der räumlichen Koordinaten und eines Zeitnullpunkts), die durch Translation, räumliche Rotation auseinander auseinander hervorgehen oder gleichförmig zueinander bewegt sind, sind äquivalent (= alle Naturgesetze haben für alle Beobachter die gleiche Form).
- Eine (sich möglicherweise zeitlich verändernde) Masseverteilung  $\rho(t, x)$  erzeugt ein Graviationspotential  $\psi$  bestimmt durch:  $\left(\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right)\psi = 4\pi G\rho$ . Ist unsere Masseverteilung einfach nur ein (idealisiertes) Punktteilchen der Masse  $M$  im Punkt  $y \in \mathbb{R}^3$ , ist  $\rho(t, x) = M\delta_y$  und  $\psi(t, x) = -\frac{GM}{r}$ , wobei  $r = |y - x|$  ist (=Newtonsches Gravitationsgesetz für ein Punktteilchen/Planet).

#### Spezielle Relativitätstheorie (SRT):

- Lichtgeschwindigkeit ist konstant (hängt insbesondere nicht von Geschwindigkeit der emitierenden Quelle ab). Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich.
- Während man in der Newtonschen Theorie, 'beliebig schnell' kommunizieren kann und damit einen Begriff von Gleichzeitigkeit hat (=alle Uhren zu einer Zeit 'beliebig genau' synchronisieren kann), ist Kommunikation nun durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt. Das bedeutet für die Synchronisation von Uhren: In einem Bezugssystem kann ich Uhren synchronisieren (ich weiß ja, wie lange das Licht irgendwo hin braucht), aber diese Synchronisation wird vom Bezugssystem abhängen.
- Es gibt immer noch das Relativitätsprinzip, aber es gibt kein absolutes System von Gleichzeitigkeit mehr.

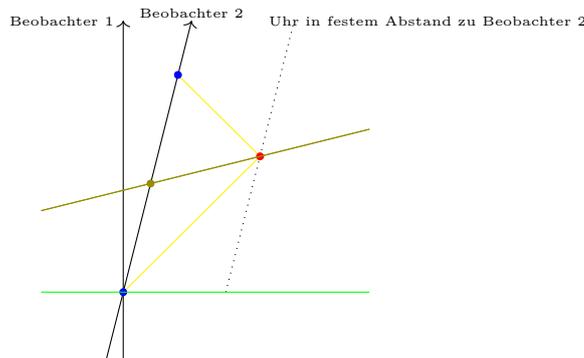


Abb. II.13.: Wie synchronisiert ein Beobachter seine Uhren? Hat ein Beobachter 2 eine Uhr in einem festen Abstand zu sich, schickt er einen Lichtstrahl (gelb im Bild) los zu dieser Uhr. In dem Moment, wo dieser Lichtstrahl an dieser Uhr ankommt (roter Punkt), wird er dort zurückgeschickt. Der Beobachter hat die Zeit gemessen, die zwischen Abschicken und Zurückkommen des Lichtes vergangen ist. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, hat das Licht die Hälfte dieser Zeit gebraucht, um zu Uhr zu gelangen. Zur Hälfte der verstrichenen Zeit, war der Beobachter gerade in dem olivenen Punkt. Also gibt die olivene Gerade das Jetzt des zweiten Beobachters zum olivenen Zeitpunkt an. Hat der Beobachter 2, den Geschwindigkeitsvektor  $x$ , so ist die olivene Gerade  $x^\perp = \{y \in M \mid \langle x, y \rangle_L = 0\}$ . Macht man das gleiche mit Beobachter 1 geben zur grünen Gerade parallele Geraden ein Jetzt des Beobachters.

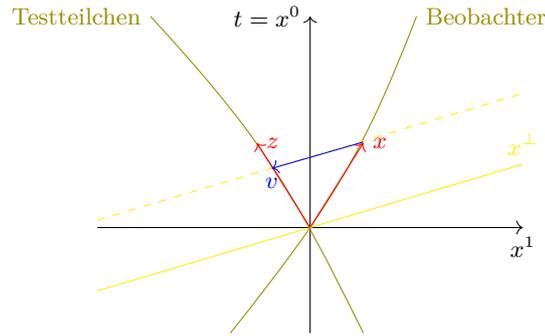


Abb. II.14.: Relativgeschwindigkeit  $v = -\frac{z}{\langle x, z \rangle_L} - x$  von  $z$  für den Beobachter mit Geschwindigkeit  $x$ . (Der Winkel von  $x$  zur  $t = 0$  Ebene ist immer der gleiche wie der der Zeitachse zur  $x^\perp$ .)

- SRT wird im Minkowskiraum  $M$  beschrieben. Ein Beobachter/ein Testteilchen ist eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  mit  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_L = -1$  (zeitartig:  $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_L < 0$  und zukunftsgerichtet:  $\dot{\gamma}^0(t) > 0$ ). Die Geschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  des Beobachters hat damit insbesondere nicht nur räumliche Komponenten sondern auch eine zeitliche ( $\nearrow$  'Vierervektorformalismus').
- Kinematik: Für einen Beobachter mit Geschwindigkeit  $x$  spielt sich das Jetzt (alles was sich für den Beobachter gleichzeitig ist) nicht in der  $t = const$  Ebene ab, sondern in  $x^\perp := \{y \in M \mid \langle x, y \rangle_L = 0\}$ . D.h. dass er die Geschwindigkeit  $z$  eines Teilchens i.A. nicht wie im Newtonschen als  $z - x$  wahrnimmt, da i.A.  $z - x \notin x^\perp$  ist, vgl. Abbildung II.14. Das heißt, was der Beobachter  $x$  mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  wahrnimmt, ist ein Teilchen mit der Geschwindigkeit:

$$z = \frac{x + v}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_L}}.$$

- Dynamik: Newtonsch wird Dynamik durch Kräfte/Impulse beschrieben – Impuls=Masse  $\times$  Geschwindigkeit. Definieren wir nun analog den Impuls mit der Geschwindigkeit  $z$  des Teilchens im Minkowskiraum als  $p = m_0 z$ , wobei  $m_0$  die Ruhemasse des Teilchens ist [Ist das Teilchen in Ruhe, also  $\gamma(t) = (t, \vec{0})$ , dann ist  $p = (m_0, \vec{0})$ ]. Der Impuls wird nun Energie-Impuls-Vektor genannt und oft statt als Vektor als 1-Form definiert:  $p := -m_0 \langle z, \cdot \rangle_L$ . Analog wie in der Kinematik kann der Beobachter mit Geschwindigkeit  $x$  nur in der  $x^\perp$ -Ebene beobachten. D.h. beobachtet er ein Teilchen mit Ruhemasse  $m_0$  und der Relativgeschwindigkeit  $v$  hat das Teilchen den Impuls:

$$p = -\frac{m_0 \langle x + v, \cdot \rangle_L}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_L}}.$$

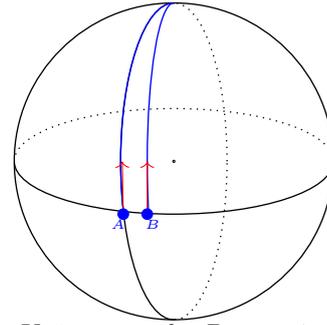
Ist das Teilchen relativ zum Beobachter in Ruhe, ist  $v = 0$  und damit  $E := p(x) = m_0$  ( $E$  ist die Energie, Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$ , in der Ruhe:  $E = m_0 c^2$ ). Im allgemeinen bewegten Zustand ist allerdings

$$E := p(x) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_L}}$$

– und damit abhängig von der Relativgeschwindigkeit. Die Energie ist der Teil des Energie-Impuls-Vektors der parallel zu  $x$  ist. Der Teil des Energie-Impuls-Vektors der in  $x^\perp$  liegt, ist der (Dreier)Impuls. Um also im Allgemeinen die Ruhemasse zu beobachten, muss neben der Energie auch der (Dreier)Impuls beobachtet werden.

**Allgemeine Relativitätstheorie (ART):**

Betrachte auf einer gekrümmten Raumzeit (= 4 dimensionale Lorentzmannigfaltigkeit) zwei nahe beieinanderliegende Teilchen  $A$  und  $B$ . Beginnend seien ihre Geschwindigkeiten parallel und gleich groß (macht Sinn als approximatives Konzept für Punkte die sehr nahe sind) und sie bewegen sich auf Geodätischen. Obwohl die Geschwindigkeiten am Anfang identische Vektoren sind, ändert sich der Abstand zwischen zwei Teilchen. Wenn man nun nicht weiß, dass der Raum gekrümmt ist, ist es als ob eine Kraft die Teilchen zusammen zieht – die Gravitationskraft.



Die Grundidee: Gravitation ist keine 'Kraft' an sich, aber ein Resultat der Krümmung der Raumzeit (wirklich der Raumzeit und nicht nur des Raumes).

- Wenn Raumzeit gekrümmt ist, macht das Konzept der relativen Geschwindigkeit nur noch im gleichen Punkt der Raumzeit Sinn.
- Da Gravitation durch Masse erzeugt wird, sollte die Raumzeit von der Masseverteilung abhängen.
- Jedoch ist schon in der SRT Masse kein absolutes Konzept, sondern vom Beobachter abhängig (vgl. Ruhemasse vs. relative Masse). Deshalb sollte die Raumzeit nicht nur von der Masseverteilung sondern der Masse- zusammen mit der Impulsverteilung (diese bildet zusammen den Energie-Impuls-Tensor) abhängen. (Umgedreht beeinflusst die Raumzeit dann aber noch in die Bewegungsgleichungen für die Materie-/Energieverteilung ein und beeinflusst so wieder den Energie-Impuls-Tensor.)

Wichtigste Frage: Wie kann so ein Energie-Impuls-Tensor aussehen - ist er beliebig/kann alles vorkommen?

**Vorl. 28**

I.A. nicht, da man irgendeine Form von Energie-Impuls-Erhaltung haben will.

Da die ART im Limes die Newtonsche Gravitationstheorie und spezielle Relativitätstheorie zurückgeben soll, macht es Sinn sich als Beispiel den Energie und Impuls (bzw. die zugehörigen Dichten) einer Strömung anzuschauen. (Alternativ geht z.B. auch Elektrodynamik.)

**Beispiel II.11.20.** Perfekte Flüssigkeit (keine Viskosität, kein Wärmeaustausch, nur Druck) [Das Beispiel soll zeigen, dass das relevante Objekt, was die Kraft/den Impulsfluss beschreibt, durch einen  $(0, 2)$ -Tensor gegeben ist. Das ist nichts Spezielles für Flüssigkeit sondern stimmt ganz analog für die Kontinuumsmechanik - da ist es der Spannungstensor.]

- Newtonsch (nichtrelativistisch): Strömungsvektor  $v$ , Druck  $\mathbf{p}$ , Dichte  $\rho$  (alles orts- und zeitabhängig),  $j = \rho v$  ist die Impulsdichte. Ist die Dichte variabel so strömt aus dem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  die Masse

$$\int_{\partial\Omega} \rho v d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho v).$$

Wegen Massenerhaltung ist also die Änderung der in  $\Omega$  enthaltene Masse

$$\int_{\Omega} -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho v)$$

und wir erhalten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}).$$

Also ist  $j$  eine Art 'Massenstromdichte'. Wegen Inkompressibilität ist  $\operatorname{div} v = 0$ . Der Druck  $\mathbf{p}$  erzeugt eine Kraft auf die Flüssigkeit\* und damit erzeugt eine Druckänderung eine Änderung der Kraft pro Fläche(=einer Impulsdichtenänderung). Impulserhaltung ergibt<sup>†</sup>

$$\frac{d(\rho v)}{dt} = -\operatorname{grad} \mathbf{p}, \quad (\text{Eulergleichung})$$

\*für mehr dazu siehe:

<sup>†</sup> Meistens wird die Eulergleichung als  $\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} \mathbf{p}$  geschrieben, folgt aus der Gleichung hier zusammen mit der Kontinuitätsgleichung.

## II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

wobei  $v = v(t, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$  und  $\frac{d}{dt}$  die totale Ableitung ( $\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + v^i \frac{\partial X}{\partial x^i}$ ) ist.

Für die Änderung der  $k$ -ten Impulskomponente haben wir dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v^k &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial t} \stackrel{\text{Eulergl.}}{=} - \int_{\Omega} v^i \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^i} - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} \\ &= - \int_{\Omega} \text{div}(v^k \rho v) - \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial x^k}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} (\rho v^k v + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial x^k}) d\vec{\sigma} =: \int_{\partial\Omega} P_i^k v^i \end{aligned}$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} \rho v^1 v^1 + \mathbf{p} & \rho v^1 v^2 & \rho v^1 v^3 \\ \rho v^2 v^1 & \rho v^2 v^2 + \mathbf{p} & \rho v^2 v^3 \\ \rho v^3 v^1 & \rho v^3 v^2 & \rho v^3 v^3 + \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Aus der Matrix  $P_i^k$  definieren wir  $P(x, y) = \rho \langle v, x \rangle \langle v, y \rangle + \mathbf{p} \langle x, y \rangle$  – einen  $(0, 2)$ -Tensor. Analog wie  $j$  oben eine Massestromdichte ist, ist  $P$  der Impulsstromdichtetensor. (Die 1-Form  $P(x, \cdot)$  gibt den Impuls an, der pro Zeit- und Flächeneinheit durch eine Fläche mit Normalenvektor  $x$  fließt.) Obwohl die Indizes von  $P$  apriori eine andere Bedeutung haben, der eine kommt mit der Stromrichtung und der andere mit der Impulskomponente, ist  $P$  symmetrisch (hier klar wegen Newton 3).

Die Energie der Flüssigkeit setzt sich aus der kinetischen Energie plus der Ruheenergie, die aus der Masse kommt\*. Die Energiedichte ist dann  $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho$  und die Energiestromdichte  $(\frac{\rho v^2}{2} + \rho)v$ .

- Relativistisch: Nicht der Impulsvektor alleine muss behandelt werden, sondern er zusammen mit der Energie/Masse (vgl. SRT oben). Entsprechend fassen wir den Impulsstromdichtetensor und Energiestromdicht zum Energie-Impuls-Tensor  $T$  zusammen: Beobachter  $x$  misst am Energie-Impuls-Tensor Impuls und Energie, wobei das Messen wieder in  $x^\perp$  verläuft. Für  $u \in x^\perp$  sollt  $T(u, \cdot)$  also wieder die Impulsform sein, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche mit Normale  $u$  fließt. Also soll  $-T(u, \cdot)$  eingeschränkt auf  $x^\perp$  wieder den (Dreier)Impuls geben.

Ist der Beobachter  $x$  selbst der Strömungsvektor, darf für diesen keine Energie fließen:

$$\begin{aligned} T(z, x) &= 0 \quad \text{falls } z \in x^\perp \\ T(x, x) &= \rho \\ T(z, w) &= -\mathbf{p} \langle z, w \rangle_L \quad \text{falls } z, w \in x^\perp. \end{aligned}$$

Da  $T$  noch immer ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor werden soll, bestimmt das  $T$  als

$$T(X, Y) = (\rho + p) \langle X, V \rangle_L \langle Y, V \rangle_L - \mathbf{p} \langle X, Y \rangle_L,$$

wobei  $V$  das Strömungsvektorfeld ist.

Test für den Fall oben (Beobachter= $V$ ):

$$\begin{aligned} T(Z, V) &= 0 \quad \text{falls } Z \in V^\perp \\ T(V, V) &= (\rho + \mathbf{p}) - \mathbf{p} = \rho \\ T(Z, W) &= -\mathbf{p} \langle Z, W \rangle_L \quad \text{falls } Z, W \in V^\perp. \end{aligned}$$

Wegen Energie- und Impulserhaltung ist  $T$  divergenzfrei!

Erhaltung von Energie und Impuls  $\leftrightarrow \text{div} T = 0$ . Wollen wir also eine vernünftige Gleichung der Form

$$\text{Krümmungsgrößen} = T$$

muss auch die linke Seite ein divergenzfreier  $(0, 2)$ -Tensor sein.

Die naheliegendste Möglichkeit ist:

---

\*Normalerweise ist Energie immer nur bis auf eine Konstante bestimmt, so dass man eigentlich die Ruheenergie einfach weglassen möchte. Aber im relativistischen ist  $E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_L}} \sim m_0 + \frac{m_0 |v|^2}{2}$  für kleine Geschwindigkeiten  $v$ . Will man, dass Massen im nichtrelativistischen Limes Gravitation erzeugen, kann man die Konstante  $m_0$  nicht einfach weglassen.

**Definition II.11.21.** Die *Einsteingleichungen* sind  $\text{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{\text{scal}}{2}g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$  für einen Energie-Impuls-Tensor  $T_{\alpha\beta}$ .

**Bemerkung II.11.22.** (i) Das ist erst einmal nur eine Wahl / ein Modell, aber man kann zeigen, dass man im Limes (Gravitationseffekte sind klein, Geschwindigkeiten sind viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit) die Newtonsche Gravitationstheorie erhält und die SRT als flache Lösung wieder erhält.

(ii) Die Einsteingleichungen sind ein System von 10 partiellen Differentialgleichungen. Sie kodieren aber i.A. nicht, dass der Energie-Impuls-Tensor selbst einer Bewegungsgleichung gehören muss, die i.A. von  $g$  wieder abhängt. In einfachen Fällen bzw. für gewisse Näherungen reichen die Einsteingleichungen aus, z.B. für Vakuum ( $T = 0$ ) oder Staub (=perfekte Flüssigkeit mit  $\mathbf{p} = 0$  (da entspräche die zusätzliche Bewegungsgleichung der Masseerhaltung und die ist schon in  $T_{ij}$  eingebaut.)). Manchmal gibt Näherungen/Modelle, wo man zwar zusätzliche Bewegungsgleichungen braucht, die aber in 'guter' Näherung nicht von  $g$  abhängen, z.B. erfüllen in einer perfekten Flüssigkeit  $\mathbf{p}$  und  $\rho$  eine zusätzliche Bewegungsgleichung, die aber oft nur eine algebraische Gleichung in  $\mathbf{p}$  und  $\rho$  ist.

**Beispiel II.11.23.** (für Lösungen der Einsteingleichungen)

(i) Vakuumslösungen:

Betrachten wir Vakuum (keine Massen, Impulse, Energien), verschwindet der Energieimpulstensor. Die Einsteingleichung ist dann  $\text{Ric} - \frac{\text{scal}}{2}g = 0$ . Es gilt

$$0 = g^{ij} \left( \text{Ric} - \frac{\text{scal}}{2}g \right)_{ij} = -\text{scal}.$$

Also muss für eine Vakuumlösung schon  $\text{Ric} = 0$  gelten. Die bekanntesten Vakuumlösungen sind

- Schwarzschildlösung (vgl. Appendix C)
- Kerr-Lösung (rotierend)

(ii) Ultrastatische Lösungen

Eine Raumzeit  $(M, g)$  heißt *ultrastatisch*, falls  $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$  für eine (dreidimensionale) Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(N, h)$  ist. Eine ultrastatische Vakuumlösung muss schon  $\text{Ric}_h = 0$  erfüllen.

(iii) Robertson-Walker Raumzeiten: Sei  $(N, h)$  eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $k \in \{0, +1, -1\}$ . Sei  $f$  eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $M(k, f) := I \times_f N$ ; also  $I \times N$  mit der Metrik  $-dt^2 + f(t)h$  eine Robertson-Walker Raumzeit.

(a) Ultrastatische Raumzeiten sind ein Spezialfall von Robertson-Walker ( $f = 1$ ).

(b) De-Sitter Raumzeit:  $M = \mathbb{H}^4_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^{4,1} \mid \langle x, x \rangle_L = 1\}$ , das einschalige Hyperboloid mit induzierter Metrik, vgl. Bsp. I.1.6.ii und Bsp. II.1.7. Das ist eine Vakuumlösung zur kosmologischen Konstante  $\Lambda = \frac{3}{2}$

Man kann de-Sitter auf verschiedene Arten als Robertson-Walker Raumzeit interpretieren:

- 'globale Koordinaten'  $M = \mathbb{R} \times_f S^3$  mit  $f(t) = \cosh(t)$ , hier ist  $t$  einfach die  $x^0$ -Koordinate in  $\mathbb{R}^{4,1}$
- Beim 'flat slicing' sind die Koordinaten durch  $x^0 = \sinh t + \frac{r^2}{2}e^t$ ,  $x^1 = \cosh t - \frac{r^2}{2}e^t$  und  $x^{i=2,3,4} = e^t y^i$  (mit  $r^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$ ) und die Metrik nimmt in diesen Koordinaten die Form  $-dt^2 + e^{2t} g_{eucl}$  mit  $g_{eucl} = \sum_{i>1} (dy^i)^2$  an.
- 'Hyperbolic slicing': Wählt man die Koordinaten  $x^0 = \sinh t \cosh \xi$ ,  $x^1 = \cosh t$  und  $x^{i=2,3,4} = \sinh t \sinh \xi z^i$ , dann ist  $\sum_i (z^i)^2 = 1$  und die Metrik nimmt in diesen Koordinaten die Form  $-dt^2 + \sinh(t)^2 g_{\mathbb{H}^3}$  mit  $g_{\mathbb{H}^3} = d\xi^2 + \sinh^2 \xi g_{S^2}$  an.

Wir haben also die de-Sitter-Raumzeit auf drei verschiedene Arten als Robertson-Walker Raumzeit dargestellt:  $M(1, \cosh^2(t))$ ,  $M(0, e^{2t})$  und  $M(-1, \sinh^2(t))$ .

- (c) Jede Robertson-Walker Raumzeit erfüllt die Einsteingleichungen für den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit aus Beispiel II.11.20 mit  $g$  statt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  und  $V = \partial_t^*$ , [5, p.346],

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\rho &= \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} \\ -\mathbf{p} &= 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

(Die erste Gleichung nennt man in diesem Rahmen *Energiegleichung* und die zweite *Bewegungsgleichung*.)

Diese Sichtweise lässt allerdings außer Acht, dass für ein physikalisches Modell  $\rho$  und  $\mathbf{p}$  selbst noch Gleichungen erfüllen muss. Robertson-Walker Raumzeit sind die meistgenutzten Modelle in der Kosmologie und da geht die Logik anders herum. Hier gibt die statistische Mechanik vor was, die Beziehung von  $\rho$  und  $\mathbf{p}$  ist.

Wir schauen uns hier einmal, dass Beispiel von Staub an, d.h.  $\mathbf{p} = 0$ . In diesem Fall ist es die Masseerhaltung (das ist analog zur Kontinuitätsgleichung eine Differentialgleichung in  $\rho$ ) und schon in  $T$  eingebaut.

Insgesamt gilt:

**Satz II.11.24.** *Im Fall  $\mathbf{p} = 0$  ist in der Robertson-Walker Raumzeit das Produkt  $C := \rho(t)f^3(t)$  konstant und es gilt die Friedmannsche Differentialgleichung*

$$(f')^2 + k = \frac{C}{3f}.$$

*Inbesondere gibt es damit eine eindeutige Lösung der Friedmannschen Differentialgleichung bei gegebenen Anfangswerten  $\rho(t_0)$  und  $f(t_0)$ .*

*Beweis.* Für  $\mathbf{p} = 0$  sind die obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\rho f^2 &= (f')^2 + k \\ 0 &= 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} \end{aligned}$$

Hiervon gibt die erste Gleichung direkt die Friedmanngleichung sobald man weiß das  $\rho f^3$  konstant ist. Differentiation der ersten Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{3}\rho' f^2 + \frac{2}{3}\rho f f' = 2f' f''.$$

Andererseits ist

$$2f f' f'' \stackrel{\text{Bwg-gl}}{=} -f^2 f' \left( \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) = -(f')^3 - k f' \stackrel{\text{Ener-gl}}{=} -f' \frac{1}{3}\rho f^2$$

und ergibt zusammen mit der letzten Gleichung

$$0 = \rho' f^3 + 3\rho f^2 f' = (\rho f^3)'$$

und damit  $C := \rho f^3$  konstant. □

Allgemein sind die Gleichungen (II.14) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \rho' &= -3\frac{f'}{f}(\rho + \mathbf{p}) \\ \frac{f''}{f} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3\mathbf{p}) \end{aligned}$$

---

\*also  $T_{\alpha\beta} = \begin{cases} \rho & \alpha = \beta = t \\ -\mathbf{p}g_{\alpha\beta} & \alpha, \beta \neq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

wovon die erste Gleichung auch aus thermodynamischen Überlegungen\* folgt (Im Stauffall von oben ist das  $\rho f^3 = \text{konstant}$  und gleich der Massenerhaltung.) Die zweite Gleichung sagt aus, dass sowohl die Energiedichte  $\rho$  als auch der Druck  $\mathbf{p}$  die Expansionsrate des Raumes, also  $f''$  verkleinert. Das interpretiert man als Wirkung der Gravitation – Masse zieht sich an und in der ART hat Druck eine ähnliche Rolle wie eine Energie-/Massedichte, vgl. den Energie-Impuls-Tensor.

**Bemerkung II.11.25.** ('Astronomische Daten') Für Galaxien  $p, q \in N$  ist der Abstand zum Zeitpunkt  $t$  gleich  $f(t)d_N(p, q)$ . Diesen Abstand und seine zeitliche Änderung kann man messen und man kann die sogenannte Hubble-Konstante<sup>‡</sup>  $H_0(t) := \frac{f'(t)}{f(t)}$  definieren. Der aktuelle Wert (2016<sup>‡</sup> - Es gibt verschiedene Werte je nach Messmethode.) liegt bei ungefähr  $67,7 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ <sup>§</sup> (Also im Moment  $f' > 0$  - 'expandierendes Universum').

Man kann dann nachrechnen, vgl. [5, p.348]: Ist  $M = I \times_f N$ ,  $t_0 \in I$ ,  $H_0(t_0) > 0$  und  $\rho + 3\mathbf{p} > 0$ , dann ist  $\inf I = t^*$  mit  $t_0 - H_0(t_0)^{-1} < t^* < t_0$  und entweder ist  $f' > 0$  oder  $I$  ist endliches Intervall.

**Bemerkung II.11.26.** Für ultrastatische Staublösungen muss nach (II.14) schon  $k = 0$  gelten.

Um mehr ultrastatische Lösungen zuzulassen, hat Einstein die kosmologische Konstante eingeführt:

Die *Einsteingleichungen mit kosmologischer Konstante*  $\Lambda$  sind gegeben als  $\text{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{\text{scal}}{2}g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ . (Beachte die linke Seite der Gleichung ist noch immer divergenzfrei).

- (Einsteins statisches Universum)  $M = \mathbb{R} \times S^3$ ,  $g = -dt^2 + g_{st}$  erfüllt  $\text{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{\text{scal}}{2}g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$  für  $\Lambda = -1$  und Staub.
- Analog ist  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ ,  $g = -dt^2 + g_{st}$ , eine Staublösung für  $\Lambda = 1$ .

Allgemein erhält man durch Umdefinition von  $\rho \rightarrow \rho + \Lambda$  und  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \Lambda$  erhält man aus einer Lösung mit  $\Lambda = 0$  auch eine Lösung der Einsteingleichungen mit kosmologischer Konstante  $\Lambda$ <sup>¶</sup>.

### Erfolge der ART:

- In schwachen Gravitationsfeldern liefert die ART kleine Korrekturen zur Newtonschen Theorien:
  - Ablenkung des Lichts durch die Sonne, vgl. Appendix B. [Auch die Newtonsche Gravitationstheorie kann eine Ablenkung des Lichtes (in gewissem Sinne) vorhersagen, liefert aber den falschen Wert.]
  - Periheldrehung des Merkurs:** Man hat das Newtonsche Orbit des Merkurs mit den ganzen Newtonschen Korrekturen wegen der Störungen der anderen Planeten und hinzu kommt die ART-Korrektur: die Periheldrehung.
  - Shapiro-Verzögerung:** Laufzeitkorrekturen für Licht wegen Rotation der Sonne
- Zeitdehnungseffekte
  - Änderungen der Ganggeschwindigkeit von Uhren (wichtig für GPS)
  - Gravitative Rotverschiebung des Lichts (direkte Folgerung der unterschiedlichen Ganggeschwindigkeit von Uhren)
- Gravitationswellen** [In der newtonschen Gravitationstheorie breiten sich Veränderungen der Quellen des Gravitationsfeldes instantan im gesamten Raum aus. In der ART entfaltet sich jede Wirkung maximal mit Lichtgeschwindigkeit.]

\*Diese Gleichung ist dann der erste Hauptsatz der Thermodynamik.

†die entgegen dem Namen zeitabhängig ist.

‡<https://de.wikipedia.org/wiki/Hubble-Konstante>

§Mpc=Megaparsec. 1 parsec ist die Entfernung, aus welcher der mittlere Erdbahnradius (= 1 AE, Astronomische Einheit), also der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde, unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint und entspricht etwa 3,26 Lichtjahren bzw. 200000 Astronomischen Einheiten oder  $\sim 3,1 \cdot 10^{16}$  Meter.

¶Dann wird  $\Lambda$  oft als eine Art von Energie interpretiert mit negativem Druck und geht unter dem Namen der 'dunklen Materie' [https://en.wikipedia.org/wiki/Dark\\_energy](https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_energy)



# A. Wdh: Lineare Abbildungen und Bilinearformen

Sei  $V$  ein Vektorraum mit nichtdegenerierter Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seien  $e_i$  und  $f_i$  zwei Basen von  $V$  mit Transformationsmatrix  $Q \in GL(V)$ , d.h.  $f_i = Q_i^j e_j$ .

- (i) Sei  $B^e$  die darstellende Matrix der Bilinearform bzgl  $e_i$ , d.h.  $(B^e)_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ , und analog  $B^f$  die darstellende Matrix. Also ist z.B.  $\langle x, y \rangle = \langle x^i e_i, y^j e_j \rangle = x^i (B^e)_{ij} y^j$ . und  $(B^f)_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle = \langle Q_i^k e_k, Q_j^l e_l \rangle = Q_i^k (B^e)_{kl} Q_j^l = (QB^eQ^T)_{ij}$ , also

$$B^f = QB^eQ^T.$$

- (ii) Sei  $h: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung.

Sei  $A^e$  die darstellende Matrix bzgl.  $e_i$  und  $A^f$  die bzgl.  $f_i$ , d.h.  $Ae_i = (A^e)_i^j e_j$ . Wegen  $Af_i = AQ_i^j e_j = Q_i^j Ae_j = Q_i^j (A^e)_j^k e_k = (QA^e)_i^k (Q^{-1})_k^l f_l = (QA^eQ^{-1})_i^l f_l$ , ist

$$A^f = QA^eQ^{-1}.$$

- (iii) *Spur einer linearen Abbildung  $h: V \rightarrow V$  bzgl der gegebenen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$*  ist gegeben durch:

$$\text{Spur}(h) = (A^e)_i^i.$$

Das ist unabhängig von der Wahl der Basis, denn

$$\begin{aligned} (A^e)_i^i &= (Q^{-1}A^fQ)_i^i = (Q^{-1})_i^j (A^f)_j^k Q_k^i \\ &= \underbrace{(Q_k^i Q^{-1})_i^j}_{\delta_k^j} (A^f)_j^k = (A^f)_k^k. \end{aligned}$$

- (iv) Die *Determinante einer linearen Abbildung  $h: V \rightarrow V$*   $= \det A^e$  ist unabhängig von der Basis, da  $\det A^e = \det Q^{-1}A^fQ = \det A^f$ .

- (v) Die Determinante der darstellenden Matrix einer Bilinearform ist basisabhängig, da

$$\det B^f = \det QB^eQ^T = (\det Q)^2 \det B^e.$$

- (vi) Die Spur einer Bilinearform ist abhängig von der Wahl einer nichtdegenerierten Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ , die man benutzt um aus der Bilinearform eine lineare Abbildung zu machen:

$$\langle v, a(w) \rangle_2 \stackrel{!}{=} \langle v, w \rangle \text{ für } a: V \rightarrow V.$$

Sei  $\tilde{B}^e$  die darstellende Matrix von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  bzgl der Basis  $e_i$ . Dann ist  $\tilde{A}^e$  die darstellende Matrix von  $a$  bzgl  $e_i$ . Dann ist  $(B^e)_{ij} = (\tilde{B}^e)_{ik} (\tilde{A}^e)_j^k$

$$\text{Spur}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_2} \langle \cdot, \cdot \rangle := \text{Spur}(a) = (\tilde{A}^e)_j^j = (B^e)_{ij} ((\tilde{B}^e)^{-1})^{ij}.$$

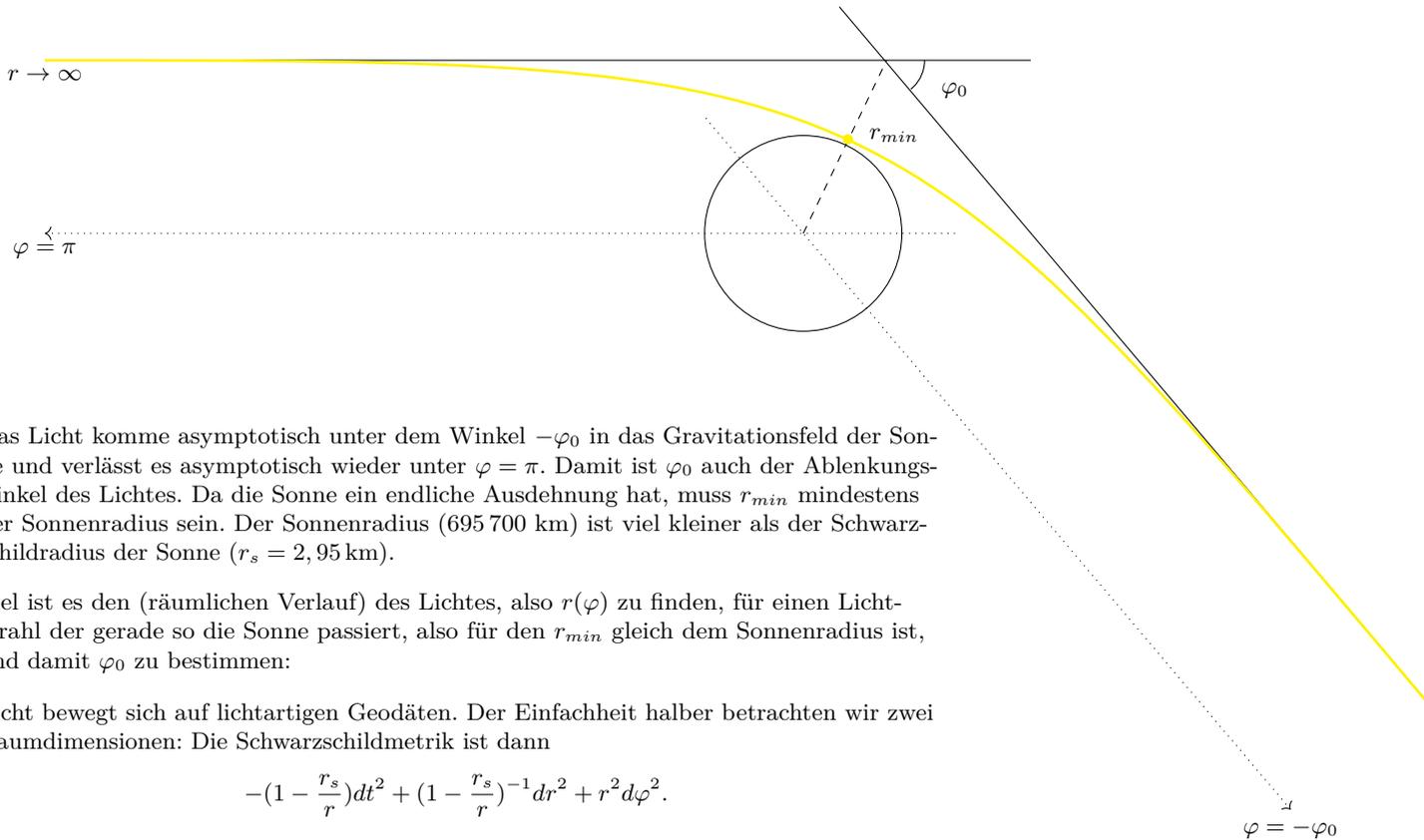
Sowohl Bilinearform als auch lineare Abbildungen werden bzgl. einer Basis durch Matrizen dargestellt, aber diese Matrizen haben andere Transformationsverhalten bezüglich Basiswechsel.



## B. Lichtablenkung

Die Schwarzschild-Metrik ist eine Lösung der Einsteinschen Vakuumlösung, die das Gravitationsfeld einer homogenen, nicht geladenen und nicht rotierenden Kugel beschreibt, vgl. Appendix C. Sie beschreibt in guter Näherung die Raumzeit um unsere Sonne.

Vorl. 19



Das Licht komme asymptotisch unter dem Winkel  $-\varphi_0$  in das Gravitationsfeld der Sonne und verlässt es asymptotisch wieder unter  $\varphi = \pi$ . Damit ist  $\varphi_0$  auch der Ablenkungswinkel des Lichtes. Da die Sonne ein endliche Ausdehnung hat, muss  $r_{min}$  mindestens der Sonnenradius sein. Der Sonnenradius (695 700 km) ist viel kleiner als der Schwarzschildradius der Sonne ( $r_s = 2,95$  km).

Ziel ist es den (räumlichen Verlauf) des Lichtes, also  $r(\varphi)$  zu finden, für einen Lichtstrahl der gerade so die Sonne passiert, also für den  $r_{min}$  gleich dem Sonnenradius ist, und damit  $\varphi_0$  zu bestimmen:

Licht bewegt sich auf lichtartigen Geodäten. Der Einfachheit halber betrachten wir zwei Raumdimensionen: Die Schwarzschildmetrik ist dann

$$-(1 - \frac{r_s}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2.$$

Sei  $x(s) = (t(s), r(s), \varphi(s))$ . Die Kurve soll lichtartig sein, also  $0 = -(1 - \frac{r_s}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ . Weiterhin ist  $T = \frac{1}{2}(-(1 - \frac{r_s}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ . Da  $T$  nicht explizit von  $t$  und  $\varphi$  abhängt, folgt aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, dass

$$p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = C_1 \quad \text{und} \quad p_t = -(1 - \frac{r_s}{r})\dot{t} = C_2$$

für Konstanten  $C_i$  ist. Damit ist

$$0 = -(1 - \frac{r_s}{r})^{-1}C_2^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}\dot{r}^2 + r^{-2}C_1^2. \quad (\text{B.1})$$

Wie oben gesagt suchen wir  $r(\varphi) := r(\varphi(s))$ . Im Folgenden seien  $'$  Ableitungen nach  $\varphi$  und  $\dot{\phantom{x}}$  Ableitungen nach  $s$ . Es ist  $\dot{r} = r'\dot{\varphi} = C_1 \frac{r'}{r^2}$  und damit

$$0 = -C_2^2 + C_1^2 \frac{(r')^2}{r^4} + r^{-2}(1 - \frac{r_s}{r})C_1^2$$

$$(r')^2 = r^4 \frac{C_2^2}{C_1^2} - r^2(1 - \frac{r_s}{r})$$

## B. Lichtablenkung

Damit erfüllt  $\varphi_0$ :

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{C_2^2}{C_1^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}} = \int_{\varphi_m := \frac{\pi + \varphi_0}{2}}^{\pi} d\varphi = \frac{\pi - \varphi_0}{2} \quad (\text{B.2})$$

In  $r_{\min}$  ist  $\dot{r} = 0$ , also folgt mit (B.1)

$$0 = -\left(1 - \frac{r_s}{r_{\min}}\right) \dot{t}_m^2 + r_{\min}^2 \dot{\varphi}_m^2 = -\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r_{\min}}} C_2^2 + \frac{1}{r_{\min}^2} C_1^2,$$

und damit

$$\frac{1}{b^2} := \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{1}{r_{\min}^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_{\min}}\right).^*$$

Damit haben wir  $\varphi_0$  durch ein elliptisches Integral<sup>†</sup> vollständig bestimmt. Wir setzen  $a := \frac{r_s}{r_{\min}}$  und schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_{\min}^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_{\min}}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}} & \stackrel{x = \frac{r_{\min}}{r}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - a - x^2 + ax^3}} dx \\ & =: a P(x) = \underbrace{(x-1)(ax^2 + (a-1)x + a - 1)}_{= a(x-x_0)(x-x_1)} \\ & = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} + a \frac{x^2 + x + 1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} a^2 f(\xi_a) \right) dx \end{aligned}$$

mit  $x_0 < 0 < 1 < x_1$ ,  $f(\xi_a) = \frac{3}{4} \frac{(x^2 + x + 1)^2}{(-\xi_a x^2 - (\xi_a - 1)x + 1 - \xi_a)^{\frac{5}{2}}}$  mit  $\xi_a \in [0, 1]$ . Da der Nenner von  $f$  für  $x \in [0, 1]$  keine Nullstellen hat, gilt  $|f(\xi_a)| \leq C$  und wir haben

$$\begin{aligned} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_{\min}^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_{\min}}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}} & = \frac{\pi}{2} + a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{x^2 + x + 1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx + O(a^2) \\ & = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(x + \frac{1}{1+x}\right) dx + O(a^2) \\ & = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \left( -\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \Big|_0^1 + O(a^2) \\ & = \frac{\pi + 2a}{2} + O(a^2) \end{aligned}$$

Um eine Näherungslösung für  $\varphi_0$  zu erhalten, verwenden wir, dass der Sonnenradius  $\gg$  Schwarzschildradius und damit  $a$  klein ist. Also ist  $\varphi_0 \sim \frac{2r_s}{r_{\min}}$ .

Unter Verwendung der Daten für die Sonne ergibt sich (unter Verwendung der richtigen Naturkonstanten (wir haben in unserer Schwarzschildmetrik z.B. die Lichtgeschwindigkeit auf 1 gesetzt)) für Licht was nahe an unserer Sonne vorbeigeht eine Ablenkung um  $\sim 1,75$  Bogensekunden (Zum Vergleich der scheinbare Monddurchmesser ist 31 Bogenminuten). Dieser Effekt ist messbar und wird auch als 'gravitational lensing' bezeichnet.

\*Das Verhältnis  $b := \frac{C_1}{C_2}$  wird Stoßparameter genannt.

†[https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptisches\\_Integral](https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptisches_Integral)

## C. Ableitung der Schwarzschildlösung mittels des Computeralgebrasystems Maxima

Maxima ist ein Computeralgebra-System (OpenSource, [maxima.sourceforge.net](http://maxima.sourceforge.net)). Das Folgende ist die Ausgabe (exportiert in  $\text{\TeX}$ ) von [http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Diffgeo-Schwarzschild\\_maxima.wxm](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Diffgeo-Schwarzschild_maxima.wxm). Dieses 'Arbeitsblatt' rechnet nach, dass die Schwarzschildlösung die einzige statische Vakuumlösung im  $\mathbb{R}^4$  (Signatur:  $-+++$ ) ist, die invariant unter räumlichen Rotationen ist: in Vorl. 21

```

--> /* Ableiten der Schwarzschild-Metrik aus den Bedingungen:
Eine statische (= alle Metrikkoeffizienten sind zeitunabhängig) Raumzeit
(Signatur = (-,+,+,+)) auf dem  $\mathbb{R}^4$ , die invariant unter räumlichen Rotationen ist
und die Einsteinvakuumgleichungen (Ric=0) erfüllt.
*/;

(%i4) /* Parametrisierung der Kugel durch Kugelkoordinaten */
x: cos(theta[1])*cos(theta[2]);
y: cos(theta[1])*sin(theta[2]);
z: sin(theta[1]);
F: [x,y,z];

(%o1) cos( $\theta_1$ ) * cos( $\theta_2$ )
(%o2) cos( $\theta_1$ ) * sin( $\theta_2$ )
(%o3) sin( $\theta_1$ )
(%o4) [cos( $\theta_1$ ) * cos( $\theta_2$ ), cos( $\theta_1$ ) * sin( $\theta_2$ ), sin( $\theta_1$ )]

--> /* Die induzierten Metrik*/
g[i,j]:= diff(F, theta[i]).diff(F, theta[j]);

(%o5)  $g_{i,j} := \text{diff}(F, \theta_i) \cdot \text{diff}(F, \theta_j)$ 

(%i6) /* Gibt die zugehörige Matrix der induzierten Metrik aus
-- trigsimp performs simplifications that use the Pythagorean identity
-- genmatrix (a, i_2, j_2, i_1, j_1): Generiert eine Matrix aus einem Array a.
Das erste Element der Matrix ist der Wert a[i_1,j_1] und das letzte Element der Matrix
ist a[i_2,j_2].
*/
A:trigsimp(genmatrix(g,2,2,1,1));

(%o6)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta_1) \end{pmatrix}$ 

(%i9) /* Ansatz: Statische Metrik in  $\mathbb{R}^4$  mit Rotationssymmetrie
-- h1 und h2 sollen Funktionen von r sein
*/

depends([h1, h2],r);
dependencies;

lg: matrix ([-h1(r), 0,0,0], [0, h2(r),0,0], [0,0, r^2*A[1,1], r^2*A[1,2]],
[0,0, r^2*A[2,1], r^2*A[2,2]]);

```

```

(%o7) [h1(r), h2(r)]
(%o8) [h1(r), h2(r)]
(%o9) (
  (-h1(r)  0  0  0)
  (  0  h2(r)  0  0)
  (  0  0  r^2  0)
  (  0  0  0  cos(theta_1)^2 * r^2)
)

(%i10) /* Setzt ug auf die inverse Matrix von lg*/
ug:invert(lg);

(%o10) (
  (-1/h1(r)  0  0  0)
  (  0  1/h2(r)  0  0)
  (  0  0  1/r^2  0)
  (  0  0  0  1/cos(theta_1)^2 * r^2)
)

(%i13) /* Laden des ctensor-Pakets - das ist ein Paket zum Manipulieren von Tensoren
(wie Metrik, Krümmungstensor...)
Anleitung unter http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima\_26.html
-- ausserdem uebergeben wir die Dimension und die Koordinaten */
load(ctensor);
dim:4;
ct_coords:[t,r,theta[1], theta[2]];

(%o11)

/usr/share/maxima/5.37.2/share/tensor/ctensor.mac

(%o12) 4

(%o13) [t, r, theta_1, theta_2]

(%i14) /*Ricci tensor (es werden nur die Komponenten ungleich 0 angezeigt)*/
uricci(1);

(%t14) uric1,1 = -  $\frac{\frac{d}{dr} \cdot h1(r)}{r \cdot h2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot h1(r) \cdot h2(r)} + \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot h2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{4 \cdot h2(r)^2}$ 

$$\frac{h1(r)}{h1(r)}$$


(%t15) uric2,2 =  $\frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot h1(r)^2} - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot h1(r)} + \frac{\frac{d}{dr} \cdot h2(r)}{r \cdot h2(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{4 \cdot h1(r) \cdot h2(r)}$ 

$$\frac{h2(r)}{h2(r)}$$


(%t16) uric3,3 =  $\frac{1 - \frac{1}{h2(r)} - \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot h1(r) \cdot h2(r)} + \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{2 \cdot h2(r)^2}}{r^2}$ 

(%t17) uric4,4 =  $\frac{\cos(\theta_1)^2 - \frac{\cos(\theta_1)^2}{h2(r)} - \frac{\cos(\theta_1)^2 \cdot r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot h1(r) \cdot h2(r)} + \frac{\cos(\theta_1)^2 \cdot r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{2 \cdot h2(r)^2}}{\cos(\theta_1)^2 \cdot r^2}$ 

(%o17) done

--> /* uric[3,3]=uric[4,4], Ziel alle uric[i,j]=0*/;

(%i18) /* also auch: uric[1,1]-uric[2,2]=0*/
expand(-r*h2(r)^2*h1(r)*(uric[1,1]-uric[2,2]));

(%o18) h1(r) *  $\left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right) + h2(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)$ 

```

```
(%i21) /* 0 = d(h1*h2)/dr -- also h2=a/h1 für eine Konstante a*/
e1:subst(a/h1(r), h2(r), uric[1,1]);
e2:subst(a/h1(r), h2(r), uric[2,2]);
e3:subst(a/h1(r), h2(r), uric[3,3]);
```

$$(\%o19) \quad - \frac{\frac{h1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{a \cdot r} - \frac{h1(r)^2 \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h1(r)}\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{4 \cdot a^2} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot a} + \frac{h1(r) \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot a}}{h1(r)}$$

$$(\%o20) \quad \frac{h1(r) \cdot \left( \frac{h1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h1(r)}\right)}{a \cdot r} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h1(r)}\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{4 \cdot a} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot h1(r)^2} - \frac{d^2}{2 \cdot h1(r)} \right)}{a}$$

$$(\%o21) \quad \frac{1 - \frac{h1(r)}{a} + \frac{r \cdot h1(r)^2 \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h1(r)}\right)}{2 \cdot a^2} - \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot a}}{r^2}$$

```
(%i22) ev(e1, nouns);
/* nouns vs. verbs see:
http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_6.html#Item_003a-Nouns-and-Verbs */;
```

$$(\%o22) \quad - \frac{\frac{h1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{a \cdot r} + \frac{h1(r) \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot a}}{h1(r)}$$

```
(%i25) /* nounify und zusammenfassen */
f1:expand(ev(e1, nouns));
f2:expand(ev(e2, nouns));
f3:expand(ev(e3, nouns));
```

$$(\%o23) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h1(r)}{a \cdot r}$$

$$(\%o24) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h1(r)}{a \cdot r}$$

$$(\%o25) \quad - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h1(r)}{a \cdot r} - \frac{h1(r)}{a \cdot r^2} + \frac{1}{r^2}$$

```
(%i26) /*ode2 kann ODEs zweiter Ordnung lösen*/;
ode2(r^2*f3=0, h1(r),r);
```

$$(\%o26) \quad h1(r) = \frac{\%c + a \cdot r}{r}$$

```
(%i29) z1:subst((b+a*r)/r, h1(r), f1);
z2:subst((b+a*r)/r, h1(r), f2);
z3:subst((b+a*r)/r, h1(r), f3);
```

$$(\%o27) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r}$$

$$(\%o28) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r}$$

$$(\%o29) \quad - \frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r} - \frac{b + a \cdot r}{a \cdot r^3} + \frac{1}{r^2}$$

```
(%i32) expand(ev(z1, nouns));
expand(ev(z2, nouns));
expand(ev(z3, nouns));
```

```
(%o30) 0
(%o31) 0
(%o32) 0

--> /* Also ist die allgemeine Metrik:
-(a+b/r)*dt^2 +1/(a+b/r)*dr^2 + r^2 Metrik(S^2)*;/

--> /* a entspricht der Lichtgeschwindigkeit c:
sieht man, wenn man sich lichtartige Geodäten für die asymptotische Metrik
(r\to infy) anschaut:
\gamma: \tau \mapsto (\tau , c\tau, 0,0) ist lichtartig für c^2=a^2*/;

--> /* b=-r_S der Schwarzschildradius
für r_S=0 kommt wieder die Minkowskimetrik raus,
r_S\in (0, infy) ist die Schwarzschild-Metrik,
und r_S <0 ? ->
*/;
```

## D. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 1.** Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten? Begründen Sie und geben Sie ggf. lokale Parametrisierungen an. Skizzieren Sie die Mengen (Wählen Sie ggf.  $m = 2$ ).

- (i)  $S^m = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = 1\}$
- (ii)  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$
- (iii)  $G = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^{m+1} = f(x^1, \dots, x^m)\}$  für eine glatte Funktion  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Übungsaufgabe 2.** (i) Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 - 3ax - y^2$ . Finden Sie alle Werte  $b$ , so dass  $f^{-1}(b)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  ist. Skizzieren Sie  $f^{-1}(b)$  für einige Werte  $a$  und  $b$ , so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen  $f^{-1}(b)$  abgebildet werden.

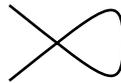
(ii) Zeigen Sie mittels des Kriteriums vom regulären Wert, dass

$$T^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^{2n-1}, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \dots = (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{2n}$  ist.

**Übungsaufgabe 3.** Sei  $c: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt (Man nennt  $c$  dann eine (glatte) *parametrisierte Kurve* im  $\mathbb{R}^n$ ). Entscheiden Sie in welchen Fällen, die *Spur* der Kurve (= Bild( $c$ )) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(i) Sei  $n = 2$  und die Spur von  $c$  sei:



(ii) Sei  $n = 2$  und die Spur von  $c$  sei:



wobei das Bild so verstehen ist, dass  $c$  injektiv ist, aber  $\lim_{t \rightarrow b} c(t) = c(s)$  für ein  $s \in (a, b)$  ist.

- (iii) Sei  $c$  ein Homöomorphismus aufs Bild und sei  $c$  *regulär* (d.h.  $|c'(t)| \neq 0$  für alle  $t \in I$ ).
- (iv) Sei  $I = \mathbb{R}$  und sei  $c$  eine reguläre periodische\* Kurve, die eine einfach geschlossene † Kurve parametrisiert.

**Übungsaufgabe 4.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine nichtleere Teilmenge. Wir setzen

$$\mathcal{T} = \{V \cap M \mid V \text{ ist offene Teilmenge von } \mathbb{R}^m\}.$$

Zeigen Sie, dass  $(M, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum ist. ‡

\*periodisch = Es gibt ein  $a > 0$ , so dass  $c(t + a) = c(t)$  für alle  $t$  ist ( $a$  heißt *Periode* von  $c$ ).

†Sei  $c$  periodisch und sei  $a_0$  die kleinste Periode von  $c$ . Dann heißt  $c$  *einfach geschlossen*, falls  $c|_{[t, t+a_0)}$  für alle  $t$  injektiv ist.

‡Die gleiche Aufgabe/Lösung funktioniert auch für  $M \subseteq X$ ,  $(X, \hat{\mathcal{T}})$  topologischer Raum und

$$\mathcal{T} = \{V \cap M \mid V \in \hat{\mathcal{T}}\}$$

Dann heißt  $\mathcal{T}$  die von  $(X, \hat{\mathcal{T}})$  *induzierte Topologie* auf  $M$ .

D. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 5.** Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $Z \subseteq \mathbb{R}^\ell$  beliebige Teilmengen und  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  glatt.

- (i) Zeigen Sie, dass  $g \circ f: X \rightarrow Z$  glatt ist.
- (ii) Ist  $\text{id}: X \rightarrow X$  eine glatte Abbildung? Begründen Sie.
- (iii) Sei  $X = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$(x, y)^T \mapsto \begin{cases} \frac{1-y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ist  $f$  glatt? Begründen Sie.

**Übungsaufgabe 6.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, seien  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeiten  $M_h = \text{Graph}(h)$  und  $M_g = \text{Graph}(g)$ . Sei  $f: M_h \rightarrow M_g$  gegeben durch

$$(u, h(u))^T \mapsto (u, g(u))^T.$$

- (i) Zeigen Sie einmal mittels der Definition und einmal mittels der zweiten Bedingung in Folgerung ? aus der Vorlesung, dass  $f$  glatt ist.
- (ii) Berechnen Sie  $T_p M_h \subseteq \mathbb{R}^3$  für  $p \in M_h$  und geben Sie explizit eine Basis an.
- (iii) Berechnen Sie  $d_p f$  in der Basis aus (ii) für  $T_p M_h$  und  $T_p M_g$ .

**Übungsaufgabe 7.** Sei  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Wir definieren die *Hamiltonsche Funktion* (=kinetische + potentielle Energie) durch

$$H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x, y) := \frac{1}{2}|y|^2 + V(x).$$

Zeigen Sie:

- (i)  $c \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein regulärer Wert von  $H$ , wenn es ein regulärer Wert von  $V$  ist.
- (ii) Sei  $c$  regulärer Wert von  $H$  und  $(x, y) \in M := H^{-1}(c)$ . Dann gilt

$$T_{(x,y)} M = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla V(x), \xi \rangle + \langle y, \eta \rangle = 0\},$$

wobei  $\nabla V := \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x^n}\right): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  der *Gradient* von  $V$  ist.

**Übungsaufgabe 8.** Sei  $K_n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = (x^{n+1})^2, x^{n+1} \geq 0\}$  für

- (i)  $n = 1$
- (ii)  $n = 2$ .

Skizzieren Sie  $K_n$  und zeigen Sie, dass  $K_n$  keine Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Übungsaufgabe 9.** Sei  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Sei  $p \in M$  und seien  $F: U \rightarrow V$  bzw.  $\tilde{F}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  lokale Parametrisierungen um  $p$  bzw.  $f(p)$ . Seien  $a_i^j \in \mathbb{R}$  gegeben, so dass

$$d_p f \left( \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) \right) = \sum_j a_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0) \in T_{\tilde{p}=f(p)} N$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann in lokalen Koordinaten

$$D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$$

gilt, s. Bemerkung 2.20.c.\*

---

\*Der Grund ist natürlich, dass die gewählten Basen in  $u_0$  und  $p$  bzw.  $\tilde{u}_0$  und  $f(p)$  mittels der lokalen Parametrisierung kompatibel sind.

**Übungsaufgabe 10.** Sei  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und nicht die Nullmatrix. Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x) = x^T A x$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $M = f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = c\}$  für alle  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist.
- (ii) Berechnen Sie  $T_x M$  für die  $M$  aus (i).
- (iii) Wenden Sie (i) und (ii) auf

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = c\}$$

an.

**Übungsaufgabe 11.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^{n=m+1}$  eine Hyperfläche. Zeigen Sie:  $M^m$  ist genau dann orientierbar, falls es lokale Parametrisierungen  $F_i: U_i \rightarrow V_i$  von  $M$  gibt, die  $M$  überdecken (d.h. es gilt  $M \subseteq \cup_i V_i$ ) und für alle  $i, j$  und  $p \in V_i \cap V_j \cap M$  ist  $\det D_{F_i^{-1}(p)}(F_j^{-1} \circ F_i) > 0$ .\*

(Hinweis: Erweitern Sie  $\frac{\partial F_i}{\partial u^k}(u)$  mittels eines Einheitsnormalenvektors  $\nu_i(p = F(u))$  zu einer positiv orientierten Basis und diskutieren Sie, wann  $\nu_i(p) = \nu_j(p)$  ist.)

**Übungsaufgabe 12.** Zeigen Sie, dass jede Untermannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  versehen mit der vom  $\mathbb{R}^n$  induzierten Topologie eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

**Übungsaufgabe 13.** Zeigen Sie, dass der Torus  $S^1 \times S^1 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R}^4\}$  diffeomorph zum Rotationstor

$$\mathbb{T}^2 = \{((2 + \cos \varphi) \cos \psi, (2 + \cos \varphi) \sin \psi, \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist.

**Übungsaufgabe 14.** Sei  $M := ([-1, 1] \times \{-1\}) \cup ([-1, 1] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times [-1, 1]) \cup (\{1\} \times [-1, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $M$  homöomorph zu  $S^1$  ist. Folgern Sie daraus, dass  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit ist.
- (ii) Ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ ? Begründen Sie.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $M$  für geeignete Wahl der Karten eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

**Übungsaufgabe 15.** Sei  $X = [0, 1]$ . Wir identifizieren  $0 \sim 1$  und betrachten, die sich dadurch ergebene Äquivalenzrelation. Setze  $Y = X / \sim$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $Y$  eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $Y$  diffeomorph zu  $S^1$  ist.†

**Übungsaufgabe 16.** Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Sei  $Z$  eine beliebige Menge.

- (i) Sei  $q: X \rightarrow Z$  surjektiv. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie  $\mathcal{T}' = \{U \subseteq Z \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$  eine Topologie auf  $Z$  ist. Benötigt man die Surjektivität? Begründen Sie.
- (ii)  $U \subseteq X$  ist genau dann kompakt als Teilmenge in  $X^\ddagger$ , wenn es kompakt bezüglich der durch  $\mathcal{T}_X$  auf  $U$  induzierten Topologie ist.
- (iii) Ist  $U \subseteq X$  kompakt, so ist auch  $f(U) \subseteq Y$  kompakt.
- (iv) Sei  $X$  kompakt, sei  $Y$  Hausdorffsch und sei  $f$  bijektiv. Dann ist  $f$  bereits ein Homoöomorphismus.
- (v) Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  ist genau dann hausdorffsch, wenn  $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{T}, x \in U} \bar{U}$  für alle  $x \in X$  gilt.

\*Während wir Orientierbarkeit nur für Hyperflächen definiert haben, kann man dieses Kriterium als Definition verwenden und so den Begriff der Orientierbarkeit für Untermannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension bzw. abstrakte Mannigfaltigkeiten (mit Karten  $\kappa$  statt lokaler Parametrisierung) verallgemeinern.

†  $X = [0, 1]^2$  mit der Identifikation  $(x, 0) \sim (x, 1)$  und  $(y, 0) \sim (y, 1)$  geht analog - man braucht nur mehr Karten.  $X$  ist dann diffeomorph zu  $S^1 \times S^1$ .

‡  $U \subseteq X$  ist kompakt, wenn jede offene Überdeckung von  $U$  eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., für alle  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$  mit  $\cup_{U \in \mathcal{U}} U = X$  gibt es eine endliche Teilmenge  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  mit  $\cup_{U \in \mathcal{V}} U = X$ .

## D. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 17.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . Sei  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0)^T \mid a \geq 0\}$ ,  $V = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ . Dann definiert  $\kappa^{-1}(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$  eine Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  von  $M$  (Polarkoordinaten). Desweiteren betrachten wir die Karte  $\kappa' = \text{id}: (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  auf  $M$ . Auf  $U$  betrachten wir die Vektorfelder  $X := r \frac{\partial}{\partial r}$  und  $Y := \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von  $X$  und  $Y$  bzgl. der Karte  $\kappa'$  und skizzieren Sie die Vektorfelder.

**Übungsaufgabe 18.** Sei  $f: M^m \rightarrow N^n$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

- (i) Zeigen Sie, dass  $d_p f$  eine glatte Abbildung ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$df: TM \rightarrow TN, (p, v) \mapsto (f(p), d_p f(v))$$

glatt ist.

**Übungsaufgabe 19.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (i) Ist  $M$  kompakt, dann ist  $f: M \rightarrow N$  genau dann eine Einbettung, wenn  $f$  eine injektive Immersion ist.

Das stimmt nicht, wenn  $M$  nichtkompakt ist, siehe Übungsaufgabe 3(ii).

- (ii) Eine Abbildung heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Teilmengen wieder kompakt sind. Zeigen Sie, dass jede eigentliche injektive Immersion eine Einbettung ist.

**Definition D.0.27.** Eine Gruppe  $G$  heißt *Liegruppe*, falls  $G$  eine glatte Mannigfaltigkeit ist, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatt sind.

**Übungsaufgabe 20.** (i) Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  wieder eine Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  mit gleicher Kodimension ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass  $GL(n) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  eine Liegruppe ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $O(n) \subseteq GL(n)$  und  $SO(n) \subseteq GL(n)$  Liegruppen sind.

(Hinweis: Für das Nachweisen der Glattheit der Abbildungen in der Liegruppensdefinition am besten die Fortsetzungsbedingung (siehe Bedingung 1 in Folgerung I.2.12) statt die Karten nutzen.)

**Übungsaufgabe 21.** Betrachten Sie die stereographische Projektion des hyperbolischen Raumes  $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  auf den Einheitsball  $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$\varphi: \mathbb{H}^n \rightarrow B_1(0), \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1+x^1} \begin{pmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Sei  $g$  die auf  $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  durch die Lorentz-Metrik des  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierte Riemannsche Metrik. Berechnen Sie  $(\varphi^{-1})^* g$ .

Man nennt  $(B_1(0), (\varphi^{-1})^* g)$  das Poincarésche Ballmodell des hyperbolischen Raumes.

**Übungsaufgabe 22.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass  $g$  genau dann eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$  ist, falls  $g$  jedem Punkt  $p \in M$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform  $g_p$  auf  $T_p M$  zuordnet und für je zwei glatte Vektorfelder  $X, Y: M \rightarrow TM$  die Funktion  $g(X, Y): M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(X, Y)(p) := g_p(X(p), Y(p))$  glatt ist.

**Übungsaufgabe 23.** (i) Nach Aufgabe 15 ist  $Y = [0, 2\pi]/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit  $0 \sim 2\pi$  eine zu  $S^1$  diffeomorphe Mannigfaltigkeit. Nach Satz II.1.20 der Vorlesung induziert  $(dt)^2$  auf  $\mathbb{R}$  ( $t$  sei die Koordinate auf  $\mathbb{R}$ ) eine Riemannsche Metrik auf  $Y$ , die wir auch mit  $(dt)^2$  bezeichnen. Zeigen Sie, dass  $Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  eine isometrische Einbettung ist, d.h.  $\varphi$  ist Einbettung und  $\varphi^*h = (dt)^2$ , wobei  $h$  die von  $g_E$  auf  $\varphi(Y) = S^1$  induzierte Riemannsche Metrik (=1. Fundamentalform) ist.

(ii) Sei  $\varphi: S^{n-1} \times (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $(x, r) \mapsto rx$ . Es gilt  $T_{(x,r)}(S^{n-1} \times (0, \infty)) \cong T_x S^{n-1} \times T_r(0, \infty)$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $d_{(x,r)}\varphi(v + a\frac{\partial}{\partial r}) = ax + rv$  gilt, wobei  $a \in \mathbb{R}$  und  $v \in T_x S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  ist. \*

(b) Berechnen Sie  $\varphi^*g_E$  in Termen von  $r, dr$  und der Standardmetrik auf  $S^{n-1}$  (=die auf der Untermannigfaltigkeit  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  von euklidischen Skalarprodukt induzierten Metrik = 1. Fundamentalform).

**Übungsaufgabe 24.** (i) Berechnen Sie  $T_{\text{Id}_n}GL(n), T_{\text{Id}_n}O(n), T_{\text{Id}_n}SO(n) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ .

(ii) Sei  $G$  eine Liegruppe,  $h \in G$  und  $R_h: G \rightarrow G, g \mapsto g \cdot h$ . Zeigen Sie, dass  $d_g R_h: T_g G \rightarrow T_{gh} G$  ein Vektorraumisomorphismus ist.

(iii) Berechnen Sie  $d_g R_h$  explizit für Liegruppen  $G$ , die Matrixgruppen sind, also für die  $G$  eine Teilmenge der (reellen bzw. komplexen)  $n \times n$ -Matrizen ist und bei denen  $g \cdot h$  durch Matrixmultiplikation der beiden Matrizen  $g$  und  $h$  gegeben ist (Z.B:  $G = GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C}), O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ).

(iv\*) Sei  $G$  Matrixgruppe wie oben. Sei  $\varphi: G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ . Berechnen Sie  $d_g \varphi$ .

(Hinweis: Die Rechnungen für (iii) und (iv) für  $GL(n, \mathbb{R})$  als offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n^2}$  durchführen.)

**Übungsaufgabe 25.** (Christoffelsymbole der  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit der Standardmetrik) Wir betrachten die lokale Parametrisierung

$$(\varphi, \psi)^T \mapsto (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie die induzierte Metrik in diesen Koordinaten (Zum Vergleich:  $g = (d\varphi)^2 + \cos^2 \varphi (d\psi)^2$ ).

(ii) Berechnen Sie die Christoffelsymbole bzgl. dieser Koordinaten und stellen Sie die Geodätengleichung  $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$  in diesen Koordinaten auf.

(iii) Berechnen Sie noch einmal die Geodätengleichung, dieses Mal mittels der Lagrangegleichung (II.5).

**Übungsaufgabe 26.** (i) Sei  $M$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $c: t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow c(t) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung. Berechnen Sie  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}$  (hierbei ist  $\frac{\partial}{\partial t} := \frac{\partial c}{\partial t}$ ). Sei zusätzlich  $c$  derart, dass  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  für alle  $t$  ist<sup>†</sup>. Zeigen Sie, dass dann  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0$  ist.

(ii) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion und  $M = \text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sei  $g$  die induzierte Metrik auf  $M$ . Wir betrachten die Parametrisierung  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x^1, x^2)^T \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))^T$ .

(a) Berechnen Sie  $g_{ij}$  in den Koordinaten  $x^i$ .

(b) Berechnen Sie das Einheitsnormalenfeld  $\nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(c) Zerlegen Sie  $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \left( = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x) \right)$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  bezüglich der Basis  $\frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \frac{\partial F}{\partial x^2}(x)$  und  $\nu(x)$ .

**Übungsaufgabe 27.** Zeigen Sie, dass die Lagrangegleichung (II.5) äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (II.6) ist.

\*Ich würde hier  $d\varphi$  wieder durch Erweiterung  $\bar{\varphi}$  von  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ausrechnen: Also  $\bar{\varphi}(x, r) = rx$  und dann ganz normal Richtungsableitung. Man kann aber natürlich auch eine Karte auf  $S^{n-1}$  wählen.

<sup>†</sup>Da  $c$  lokale Parametrisierung ist, ist  $\dot{c}(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Also ist  $c$  eine reguläre Kurve und es gibt immer eine Umparametrisierung, so dass  $\|\dot{c}\| = 1$  ist.

**Übungsaufgabe 28.** (Teilchen im 2D-Zentralkraftfeld) Eine große Masse  $m_2$  befindet sich fest im Ursprung von  $\mathbb{R}^2$  und übt auf eine kleine Masse  $m_1$  eine Kraft  $F = -\nabla V$  mit  $V = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$  aus, wobei  $\gamma$  die Gravitationskonstante und  $r$  der Abstand zum Ursprung ist. Hier ist die Bewegung von  $m_1$  nicht a priori eingeschränkt, d.h. es gilt  $M = \mathbb{R}^2$ .

- (i) Benutzen Sie Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse und die Hamiltonfunktion.
- (ii) Berechnen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Dann folgt  $p_\varphi = \text{const.}$  \*

**Übungsaufgabe 29.** Es sei der Rotationstorus gegeben:

$$\{F(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- (i)  $F|_{u, v \in (0, 2\pi)}$  ist eine lokale Parametrisierung. Berechnen Sie die Geodätengleichung in diesen Koordinaten.
- (ii) Bestimmen Sie, welche der Koordinatenlinien  $u = \text{const}$  bzw.  $v = \text{const}$  Geodätische sind.
  - (a) Einmal mittels der in (i) aufgestellten Geodätengleichung.
  - (b) Einmal mittels des Geodätenkriteriums für Hyperflächen, vgl. (II.7) im Skript.

**Übungsaufgabe 30.** (Schwarzschild-Außenraum) Sei  $M := \mathbb{R} \times (2m, \infty)$ ,  $g := -h(r)(dt)^2 + \frac{1}{h(r)}(dr)^2$ , wobei  $h(r) = 1 - \frac{2m}{r}$  und  $m > 0$  ist.

- (i) Skizzieren Sie die Lichtkegel in Abhängigkeit des Punktes auf  $M$ , also für  $p \in M$  die Menge  $C_p := \{v \in T_p M \mid g_p(v, v) = 0\}$ . †
- (ii) Berechnen Sie die Geodätengleichung.
- (iii) Sei  $c(s)$  eine Geodäte, so dass  $c'(0)$  lichtartig ist, d.h.  $g_{c(0)}(c'(0), c'(0)) = 0$ . In Koordinaten sei  $c$  gegeben durch  $c(s) = (t(s), r(s))$ . Zeigen Sie, dass dann  $r'(s)^2 = h^2(r)t'(s)^2$  für alle  $s$  gilt.
- (iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass für lichtartige Geodäten  $r' = \text{const} = c$  und  $t'(s)^2 = \frac{c^2(r(0)+sc)^2}{(r(0)+sc-2m)^2}$  gilt. Bestimmen Sie  $c(s)$  und zeichnen Sie die Lösungen qualitativ in  $M$  ein.

**Definition D.0.28.** Eine *Derivation*  $\delta$  auf  $M$  ist eine lineare Abbildung  $\delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , welche die Produktregel  $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$  erfüllt.

**Übungsaufgabe 31.** (i) Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Zeigen Sie, dass  $\delta_X: f \in C^\infty(M) \mapsto X(f) = df(X) \in C^\infty(M)$  eine Derivation ist.

- (ii) Sei  $\kappa: U \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  mit Koordinatenfunktionen  $x^i$  und  $\delta: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  eine Derivation auf  $U$ . Sei  $a^i := \delta(x^i)$ . Zeigen Sie, dass  $\delta = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  gilt.
- (iii) Sei nun  $\{\kappa_i: U_i \rightarrow V_i\}$  ein Atlas von  $M$  mit untergeordneter Zerlegung der Eins  $\rho_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $\delta$  eine Derivation auf  $M$ .
  - (a) Zeigen Sie, dass  $\rho_i \delta$  für jedes  $i$  eine Derivation auf  $M$  und die Einschränkung  $\rho_i|_{U_i} \delta|_{C^\infty(U_i)}$  eine Derivation auf  $U_i$  ist.
  - (b) Zeigen Sie, dass es für  $\delta$  genau ein glattes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gibt, so dass  $\delta = \delta_X$  gilt.

Alles in allem haben Sie dann gezeigt, dass  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M)) = \text{Menge der Derivationen auf } M, X \mapsto \delta_X$ , ein Isomorphismus ist.

\*Das ist das zweite Keplersche Gesetz [https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's\\_laws\\_of\\_planetary\\_motion](https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler's_laws_of_planetary_motion).

†Das Bild in <http://physics.stackexchange.com/questions/105078/direction-of-future-time-cone-inside-schwarzschild-horizon> zeigt auf der senkrechten Achse  $t$  auf der waagerechten  $r$  und  $2m = 3$ . Das Bild zeigt auch noch den Schwarzschild-Innenraum:  $r \in (0, 2m)$ . Da muss man beachten, dass  $h(r) < 0$  für  $r < 2m$  ist und sich damit die Rollen von  $r$  und  $t$  vertauschen, in dem Sinne, dass dann  $r$  die Zeitvariable und  $t$  die räumliche Variable ist.

**Übungsaufgabe 32.** Seien  $(M, g), (N, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sei  $f: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Wir schreiben  $f_*X := df(X)$  (=Push-Forward des Vektorfeldes  $X$ ), d.h.  $(f^*(X))(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$ . Sei  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $(M, g)$  und  $\bar{\nabla}$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $(N, h)$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$  genau dann für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  gilt, wenn  $\nabla$  auch der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik  $f^*h$  ist.
- (ii) Seien die Levi-Civita-Zusammenhänge zu zwei Metriken  $g$  und  $\hat{g}$  auf  $M$  gleich. Folgt daraus schon, dass  $g = \hat{g}$  ist? Begründen Sie.

**Übungsaufgabe 33.** Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit  $(M \times N, g + h)$ . Sei  $\nabla^g, \nabla^h$  bzw.  $\nabla^{g+h}$  jeweils der Levi-Civita Zusammenhang auf  $M, N$  bzw.  $M \times N$ . Sei  $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$  und  $Y, W \in \mathfrak{X}(N)$ . Dann ist  $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M \times N)$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $\nabla_{(X,Y)}^{g+h}(Z, W) = (\nabla_X^g Z, \nabla_Y^h W)$  gilt.
- (ii) Sei  $c(t) = (c_M(t), c_N(t))$  eine Kurve in  $M \times N$ . Folgern Sie mittels (i), dass  $c$  genau dann Geodätische in  $M \times N$  ist, falls  $c_M(t)$  eine Geodätische in  $M$  und  $c_N(t)$  eine Geodätische in  $N$  ist.\*

**Übungsaufgabe 34.** Wir betrachten  $G = GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  als Liegruppe.

- (i) Zeigen Sie, dass  $g_x(v, w) = \frac{vw}{x^2}$  eine Riemannsche Metrik auf  $G$  definiert.
- (ii) Zeigen Sie, dass dieses  $g$  *biinvariant* ist, d.h.  $g_{L_h(x)}(d_x L_h(v), d_x L_h(w)) = g_{R_h(x)}(d_x R_h(v), d_x R_h(w)) = g_x(v, w)$  für alle  $x \in G, v, w \in T_x G$ , wobei  $L_h: G \rightarrow G, x \mapsto hx$  bzw.  $R_h: G \rightarrow G, x \mapsto xh$  ist. (Hinweis: ÜA 24)
- (iii) Berechnen Sie die Geodätischen.† (Hinweis: Verwenden Sie, dass die Hamiltonfunktion erhalten bleibt.)

**Übungsaufgabe 35.** (i) Sei  $(M = \mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$  der Minkowskiraum. Für  $p, q \in M$  definieren wir

$$\hat{d}(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale } \ddagger \text{ Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Infimum der leeren Menge  $\infty$  setzen. Zeigen Sie, dass  $\hat{d}$  nur die Werte 0 und  $\infty$  annimmt.

- (ii) Wir definieren für Lorentzsche Mannigfaltigkeiten den Lorentzischen Abstand

$$d(p, q) = \sup\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale zukunftsgerichtete Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Supremum der leeren Menge 0 setzen. Wir betrachten die Lorentzmannigfaltigkeit  $(M = S^1 \times \mathbb{R}, g)$  mit  $g = d\varphi^2 - dt^2$ , wobei  $(\varphi, t) \mapsto (\sin \varphi, \cos \varphi, t) \in M$  Koordinaten auf  $M$  sind. Welche Punkte auf  $M$  kann man von  $(0, 0)$  durch glatte kausale Kurven erreichen? Bestimmen Sie zu allen diesen Punkten den Lorentzischen Abstand.

- (iii) Finden Sie ein Beispiel einer Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit  $d(p, p) = \infty$  für alle Punkte  $p \in M$ .
- (iv\*) Was hat (i) mit dem Zwillingsparadoxon zu tun?

**Übungsaufgabe 36.** (i) Sei  $U$  eine offene Teilmenge einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M^m, g)$  um  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass es ein  $C > 0$  gibt, so dass für jede Kurve  $c$  von  $p$  zu einem Punkt  $q \notin U$  gilt, dass  $L(c) > C$  ist. (Hinweis: Benutzen Sie eine Karte  $\kappa: U' \subseteq U \rightarrow B_r(0)$  um  $p$  ( $\kappa(p) = 0$ )).

- (ii) Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  die zugehörige Riemannsche Abstandsfunktion. Zeigen Sie, dass  $(M, d)$  ein metrischer Raum ist.

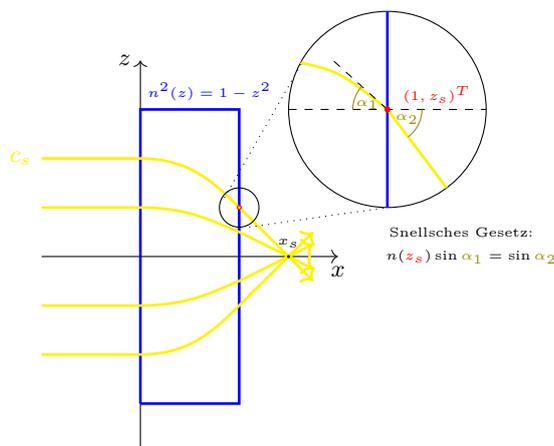
\*Ist  $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Fläche aus einem lichtleitendem Material. Dann ist  $M$  mit induzierter Metrik Riemannsch. Wir betrachten  $(N = \mathbb{R}, -(dt)^2)$  und  $M \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$  (Lokal ist  $\mathbb{R}^{3,1}$  eine gute Näherung für die Raumzeit (=Lorentzmannigfaltigkeit), in der wir leben.). Sendet eine Quelle in  $p \in M$  in Richtung  $v \in T_p M$  dann einen Lichtstrahl aus, dann bewegt sich das Licht in  $M \times \mathbb{R}$  auf einer Geodäten. (ii) heißt also, dass die räumliche Bewegung des Lichtes, die wir dann sehen, eine Geodäte in  $M$  ist.

†Das ist das einfachste Beispiel zu: Warum die Exponentialabbildung so heißt, wie sie heißt?

‡Das heißt  $\dot{c}$  ist für jedes  $t$  ein kausaler Vektor, also  $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \leq 0$  für alle  $t$ . Im Minkowskiraum gilt für kausale Vektoren die inverse Dreiecksungleichung:

- Aufgabe 37/38.** (i) Sei eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben als verzerrtes Produkt:  $f^2(y)(dx)^2 + (dy)^2$ . Zeigen Sie, dass für eine Geodätische  $c(t) = (x(t), y(t))$  die beiden Größen  $f^2(y)\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = C_2$  und  $f^2(y)\dot{x} = C_1$  konstant in  $t$  ist.\* Folgern Sie daraus, dass eine Geodätische  $\dot{y}^2 = C_2 - C_1^2 f^{-2}(y)$  erfüllt.
- (ii) Wir betrachten eine Rotationsfläche in  $\mathbb{R}^3$ , die dadurch entsteht, dass die Kurve  $s \mapsto (r(s), 0, h(s))^T \in \mathbb{R}^3$  um die  $z$ -Achse rotiert wird. Die Kurve sei nach Bogenlänge parametrisiert. Geben Sie eine Parametrisierung  $F$  der Fläche an, die die Koordinaten  $s$  und den Drehwinkel  $\varphi$  nutzt. Zeigen Sie, dass die induzierte Metrik in den Koordinaten  $(s, \varphi)$  ein verzerrtes Produkt wie in (i) ist und das für eine Geodätische  $c(t) = F(s(t), \varphi(t))$  das Produkt aus  $r(s)$  und dem Kosinus des Winkels zwischen  $\dot{c}(t)$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi}|_{c(t)}$  konstant in  $t$  sind. †
- (iii) Sei eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben als verzerrtes Produkt:  $n^2(z)((dx)^2 + (dz)^2)$  Analog wie in (i) erhält man, dass für eine Geodätische  $c(t) = (x(t), z(t))$  die beiden Größen  $n^2(z)(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = C_2$  und  $n^2(z)\dot{x} = C_1$  konstant in  $t$  sind und damit eine Geodätische  $\dot{z}^2 = \frac{1}{n^2(z)}(C_2 - C_1^2 n^{-2}(z))$  erfüllt. Betrachten Sie die Geodätische als Graph über  $x$ , also  $\tilde{z}(x(t)) = z(t)$ . Zeigen Sie, dass dann  $(\tilde{z}')^2 = \frac{C_2}{C_1^2} n^2(\tilde{z}) - 1$  gilt.
- (iv) (Gradientenlinse‡)

Licht (nach Bogenlänge parametrisiert) bewege sich parallel zur  $x$ -Achse auf eine Gradientenlinse ( $M = [0, 1] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  (Koordinaten  $(x, z)$ ) gegeben mit  $g = n^2(z)g_E$  mit  $n^2(z) = 1 - z^2$  zu, also  $c_s(0) = (0, s)^T$  und  $\dot{c}_s(0) = (\frac{1}{n(s)}, 0)^T$ . Berechnen Sie  $c_s$  (in der Linse) unter Nutzung von (iii). Bei  $x = 1$  tritt  $c_s$  wieder aus der Linse aus und befolgt dort das Snellsche Brechungsgesetz, siehe Abbildung. Der ausgetretene Lichtstrahl schneide die  $x$ -Achse in  $x_s$ . Rechnen Sie nach, dass  $x_s = \text{const} + O(s^2)$  gilt.



- (v) Sei eine Metrik  $g$  einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es lokal genau dann Koordinaten  $(x, y)$  gibt mit  $g = f(x)^2((dx)^2 + (dy)^2)$ , wenn es lokal Koordinaten  $(x', y')$  mit  $g = (dx')^2 + \tilde{f}(x')(dy')^2$  gibt.

**Aufgabe 39/40.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (i) Für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  definieren wir  $T_{X,Y} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  durch  $T_{X,Y}(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ . Zeigen Sie, dass  $T_{[X,Y]}$  eine Derivation ist und damit nach Übungsaufgabe 31 eindeutig ein Element in  $\mathfrak{X}(M)$  definiert, welches wir *Lieklammer* von  $X$  und  $Y$  nennen und mit  $[X, Y]$  bezeichnen.
- (ii) Zeigen Sie, dass für die Lieklammer  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  folgende Eigenschaften gelten:
- Bilinearität
  - Antisymmetrie, d.h.  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
  - Jacobiidentität, d.h. für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .  
(Hinweis: Aus Übungsaufgabe 31 folgt, dass ein  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $X(f) = 0$  für alle  $f \in C^\infty(M)$  schon das Nullvektorfeld sein muss.)
- (iii) Zeigen Sie, dass für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  die folgenden Identitäten für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gelten:
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
  - (Koszul-Formel)  $2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])$

\*Die erste Erhaltungsgröße ist  $H$  (= parametrisiert prop. der Bogenlänge) und die zweite ist  $p_x$  (= Translationsinvarianz in  $x$ -Richtung).

†Das diese Größe konstant ist, ist die Interpretation der Erhaltung von  $p_\varphi$ .

‡[https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index\\_optics](https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics)

**Übungsaufgabe 41.** Sei  $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Sei  $\nabla$  bzw.  $R$  der zur induzierten Metrik gehörige Levi-Civita Zusammenhang bzw. Riemannsche Krümmungstensor. Sei  $II$  die zweite Fundamentalf orm, also  $II(X, Y) := D_X Y - \nabla_X Y$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Zeigen Sie die Gaußgleichung

$$\langle R(X, Y)W, Z \rangle = \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle.$$

**Übungsaufgabe 42.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  eine Hyperfläche. Sei  $II(X, Y) := D_X Y - \nabla_X Y$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $II$  symmetrisch ist und in jedem Punkt  $p \in M$  eine Abbildung  $S: T_p M \rightarrow T_p M$  mit  $g(S(X(p)), Y(p)) = II(X(p), Y(p))$  induziert, die sogenannte *Weingartenabbildung*.
- (ii) Folgern Sie, dass die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist und damit diagonalisierbar ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass jede Hauptkrümmungsrichtung (=Eigenvektor der Weingartenabbildung) einer Hyperfläche  $M$  im Punkt  $p \in M$  ein Eigenvektor der Ricci-Krümmung  $\text{Ric}: T_p M \rightarrow T_p M$  ist.

**Übungsaufgabe 43/44.** Sei  $G \subseteq O(n)$  eine Liegruppe. Wir setzen  $\langle v, w \rangle := \text{Spur}(v^T w)$  für  $v, w \in T_g G$  und  $g \in G$ . Sei  $L_g: G \rightarrow G$  gegeben durch  $h \mapsto gh$  (vgl. ÜA 24 für  $R_g$ , die analogen Aussagen gelten für  $L_g$ ). Ein Vektorfeld auf  $G$  heißt *linksinvariant*, falls  $X(g) = d_e L_g(X(e))$  für alle  $g \in G$  gilt. Für alle linksinvarianten Vektorfelder  $X, Y$  gilt  $[X, Y] = XY - YX$ , wobei die rechte Seite als Matrixmultiplikation und -subtraktion zu verstehen ist (für die Definition der Lieklammer  $[X, Y]$  siehe ÜA 39/40(i))\* . Zeigen Sie, die folgenden Aussagen.

- (i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist eine Riemannsche Metrik auf  $G$  und biinvariant (vgl. ÜA. 34(ii))
- (ii) Für linksinvariante Vektorfelder  $X, Y$  ist  $\langle X, Y \rangle$  eine auf  $G$  konstante Funktion.
- (iii) Es ist  $T_e G \subseteq \{v \in M_{\mathbb{R}}(n) \mid v^T = -v\}$  und für alle linksinvarianten Vektorfelder  $X, Y, Z$  gilt  $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$ .
- (iv) Sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann gilt  $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$  für alle linksinvarianten Vektorfelder  $X, Y$ . (Hinweis: Verwenden Sie die Koszulformel aus ÜA 39/40(iii)(b))
- (v) Die Krümmung der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist durch  $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$  gegeben.

**Übungsaufgabe 45.** (i) Betrachten Sie  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit induzierter Metrik. Sei  $p \in S^2$ . Sei  $c: [0, \pi] \rightarrow S^2$  eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $-p$ . Bestimmen Sie die Menge der  $v \in T_{-p} S^2$  für die es ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = 0$  und  $J(\pi) = v$  gibt.

- (ii) Betrachten Sie den Zylinder  $Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  mit induzierter Metrik und die Geodätische  $c: t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \in Z$ . Bestimmen Sie alle periodischen Jacobifelder  $J$  längs  $c$  (also  $J(t + 2\pi) = J(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ). Geben Sie zu diesen periodischen Jacobifeldern jeweils eine zugehörige geodätische Variation von  $c$  an.

**Übungsaufgabe 46.** Sei  $(M, g)$  eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Sei  $\delta > 0$  derart, dass  $\exp_p: B_\delta(0) \subseteq T_p M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei  $v: S^1 \rightarrow \partial T_p M$  eine Parametrisierung von  $S_1(0) := \{v \in T_p M \mid g_p(v, v) = 1\}$ . Sei  $F: (\rho, \theta) \in (0, \delta) \times (-\pi, \pi) \rightarrow M$  gegeben als  $F(\rho, \theta) = \exp_p(\rho v(\theta))$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $F$  eine Parametrisierung der Fläche ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass für die Metrik  $g$  in den lokalen Koordinaten  $g_{\rho\rho} = 1, g_{\rho\theta} = 0$  gilt. (Hinweis: Verwenden Sie Lemma II.9.21).
- (iii) Sei  $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit induzierter Metrik. Sei  $p$  der Nordpol. Geben Sie die Abbildung  $F$  explizit an (für maximal mögliches  $\delta > 0$ ). Berechnen Sie die Metrikoeffizienten in den Koordinaten  $(\rho, \theta)$ .

---

\*Dies gilt sogar für linksinvariante Vektorfelder auf  $GL(n)$ .

**Übungsaufgabe 47.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die zwischen je zwei Punkten  $p, q \in M$  mindestens eine minimale Geodätische  $c: [a, b] \rightarrow M$  ( $c(a) = p$  und  $c(b) = q$ ) existiert, d.h.  $d(c(t_1), c(t_2)) = L(c: [t_1, t_2] \rightarrow M)$  für alle  $t_{1,2} \in [a, b]$ . Sei  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  derart, dass  $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$  für alle  $t \in [0, 1]$  eine minimale Geodätische ist. Weiterhin sei  $\gamma_v$  nicht mehr minimierend für  $t > 1$ .

(i) Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle eintreten muss:

- (a) Es existiert ein  $w \in T_p M$  mit  $v \neq w$ ,  $|v| = |w|$  und  $\exp_p(v) = \exp_p(w)$ .
- (b)  $p$  und  $\exp_p(v)$  sind konjugierte Punkte längs  $\gamma_v$ .

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall (a) auch  $\gamma_w(t)$  auf  $[0, 1]$  eine minimierende Geodäte ist.

(iii) Seien  $w_1, w_2 \in T_p M$  derart, dass  $w_1 \neq w_2$  und beide  $\exp_p(tw_i)$  auf  $[0, 1]$  minimierende Geodätische mit  $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2)$  sind. Zeigen Sie, dass für  $t > 1$  keine dieser beiden Geodätische minimierend sein kann. (Hinweis: Verwenden Sie, dass Geodätische immer glatt sind.)

**Übungsaufgabe 48.** Sei  $p \in M$  und  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ . Sei  $w \in T_v T_p M$  mit  $|w| = 1$  und sei  $J$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$ . Zeigen Sie:

- (i)  $(\frac{\nabla}{dt})^2 J(0) = 0$
- (ii)  $(\frac{\nabla}{dt})^3 J(0) = -R(v, w)v$
- (iii) Die Taylorentwicklung von  $|J(t)|^2$  um  $t = 0$  ist gegeben durch:

$$|J(t)|^2 = t^2 + \frac{1}{3}g(R(v, w)w, v)t^4 + O(t^5).$$

**Übungsaufgabe 49.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$ . Für  $v \in T_p M$  mit  $g_p(v, v) = 1$  definieren wir

$$\rho(v) := \sup\{t \geq 0 \mid d(p, c_v(t) := \exp_p(tv)) = t\} \in [0, \infty]$$

und setzen

$$\text{Schnittort}(p) := \text{Cut}_p := \{c_v(\rho(v)) \mid v \in T_p M, g_p(v, v) = 1\}$$

sowie

$$D_p := \{tv \mid 0 \leq t < \rho(v), v \in T_p M, g_p(v, v) = 1\}.$$

Sei  $(M, g)$  eine geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- (i) Für alle  $0 < t < \rho(v)$  ist  $c_v$  die eindeutige minimale Geodäte von  $p$  nach  $c_v(t)$ .
- (ii)  $\rho(v) \geq \text{inj}(p)$
- (iii)  $\text{inj}(p) = d(p, \text{Cut}_p)$
- (iv)  $M = \exp_p(D_p) \sqcup \text{Cut}_p$  ( $\sqcup$  steht für die disjunkte Vereinigung)

Hinweis: Verwenden Sie ÜA 47.

**Übungsaufgabe 50.** Finden Sie (mit Begründung)  $\text{Cut}_p$  für

- (i)  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $p = (0, 0, 1)^T$ ,
- (ii)  $\mathbb{R}P^2$  mit der Fubini-Study Metrik, vgl. Bsp. II.1.22, und  $p = \pi((0, 0, 1)^T)$ , wobei  $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  die kanonische Projektion ist, vgl. Bsp. I.3.3.
- (iii)  $Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $p = (1, 0, 0)$ ,
- (iv)  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  mit der flachen Metrik von  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , vgl. Satz II.1.20 und Bsp. I.3.41, und  $p = \pi((0.5, 1)^T)$ .

**Übungsaufgabe 51.** Sei  $(M, g)$  geodätisch vollständig Riemannsche Mannigfaltigkeit und nicht kompakt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt  $p \in M$  ein  $v \in T_p M$  gibt, so dass  $c_v(t) := \exp_p(tv)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  minimal ist (es gibt also einen längenminimierenden geodätischen Strahl nach unendlich).

**Übungsaufgabe 52.** Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung.

- (i) Sei  $(N, h)$  geodätisch vollständig und es gebe ein  $c > 0$  derart, dass  $g_p(v, v) \geq c \cdot h_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(v))$  für alle  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  gilt. Zeigen Sie, dass dann auch  $(M, g)$  geodätisch vollständig ist. (Hinweis: Verwenden Sie Eigenschaft (3) in Hopf-Rinow.)
- (ii) Sei  $(M, g)$  geodätisch vollständig und  $f$  eine lokale Isometrie. Weiterhin gebe es zwischen je zwei Punkten in  $N$  eine eindeutige Geodätische. Zeigen Sie, dass  $f$  dann schon bijektiv und damit eine Isometrie ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] AMANN, H., AND ESCHER, J. *Analysis. III*. Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [2] BRENDLE, S. Der Sphärensatz in der Riemannschen Geometrie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 113, 3 (2011), 123–138.
- [3] CHEEGER, J., AND EBIN, D. G. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2008. Revised reprint of the 1975 original.
- [4] GROSSE, N. Elementargeometrie, [http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/ElemGeo\\_SS-16\\_Skript.pdf](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/ElemGeo_SS-16_Skript.pdf), Skript, 2016. .
- [5] O'NEILL, B. *Elementary differential geometry*, second ed. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [6] WHITNEY, H. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.