

Differentialgeometrie I

Universität Freiburg, WS 2023/24

Nadine Große

Skript - Version vom 7. Februar 2024

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

I. Mannigfaltigkeiten	1
I.1. Untermannigfaltigkeiten	1
I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum	11
I.2.1. Wechsel lokaler Parametrisierungen	12
I.2.2. Tangentialvektoren und Tangentialraum	13
I.2.3. Abbildungen von M aus	16
I.2.4. Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten und die Tangentialabbildung	18
I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten	19
I.3.1. Tangentialraum und Tangentialabbildung	25
I.3.2. Ist der Begriff der Mannigfaltigkeit wirklich allgemeiner?	31
I.3.3. Konstruktion von Mannigfaltigkeiten - Quotienten	35
II. (Semi-)Riemannsche Geometrie	39
II.1. Semi-Riemannsche Metriken	39
II.2. Geodätische	50
II.3. Parallelverschiebung	61
II.4. Geodätische als Spezialfall von Bewegungsgleichungen zu einem Potential	64
II.5. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen	67
II.6. Krümmung	73
II.7. Die Exponentialabbildung	78
II.8. Jacobifelder	81
II.9. Mehr zur Riemannschen Geometrie	87
II.9.1. Injektivitätsradius	87
II.9.2. Vollständigkeit	89
II.9.3. Zweite Variation des Energiefunktionals	93
II.9.4. Satz von Bonnet-Myers	94
II.9.5. Weitere Beispiele für Sätze der Vergleichsgeometrie	96
II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten	97
II.10.1. Orientierbarkeit	98
II.10.2. Mannigfaltigkeit mit Rand	100
II.10.3. Differentialformen	101
II.10.4. Satz von Stokes	114
II.10.5. Gauß-Bonnet	116
A. Interpretation: Riemannsche Krümmung mittels Paralleltransport	127

Inhaltsverzeichnis

B. Wdh: Lineare Abbildungen und Bilinearformen	131
Literatur	133

I. Mannigfaltigkeiten

Um eine Idee für ein intrinsisches Beschreiben/Definieren von Mannigfaltigkeiten ('~ gekrümmten Räume') zu erhalten, überlegen wir uns erst, was Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n sein sollten. Vorl. 1 - 17.10.

I.1. Untermannigfaltigkeiten

Der Begriff der Untermannigfaltigkeit soll z.B. die Erdoberfläche umfassen. Dazu wollen wir einen Atlas simulieren:

Definition I.1.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m \leq n$. Dann heißt M *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n , falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine glatte* Abbildung $F: U \rightarrow V$ gibt, so dass gilt:

(i) $F(U) = M \cap V$ und $F: U \rightarrow M \cap V$ ist ein Homöomorphismus.†

(ii) Die Jacobimatrix

$$D_u F = \left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u^1}(u) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u^m}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u^1}(u) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u^m}(u) \end{pmatrix} \quad (n \times m\text{-Matrix})$$

hat für alle $u = (u^1, \dots, u^m)^T \in U$ maximalen Rang, also Rang m (wobei $F(u) = (F_1(u), \dots, F_n(u))^T$).

Die Abbildung F ist eine *lokale Parametrisierung* von M . Die Umkehrabbildung $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$ nennt man *Karte* von M . Man nennt $n - m$ die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit und $u = (u^1, \dots, u^m)^T$ *lokale Koordinaten* von M .

*glatt = unendlich oft differenzierbar

†Homöomorphismus = stetige Abbildung, die eine stetige Umkehrabbildung besitzt

Die Umkehrabbildung $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$ ist hier eine Abbildung von $M \cap V$, was als Teilmenge von \mathbb{R}^n selbst wieder ein metrischer Raum ist. D.h. wir wissen, was hier Stetigkeit bedeutet.

Allerdings ist es i.A. leichter, dass in konkreten Situation wie folgt zu überprüfen: F^{-1} ist stetig, falls es eine stetige Abbildung $G: V \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m}$ mit $G|_{M \cap V} = F$ gibt. Oder in dem man schon direkt F fortsetzt zu einem Homöomorphismus $\tilde{F}: W \subset U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow f(W) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{F}|_{U \times \{0\}} = F$, denn dann ist $F: U \rightarrow F(U)$ automatisch auch ein Homöomorphismus.

I. Mannigfaltigkeiten

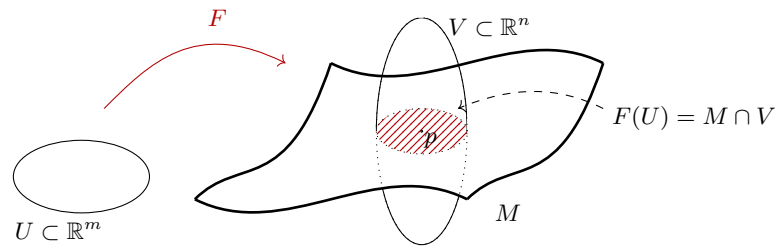


Abb. I.1.: lokale Parametrisierung

Bemerkung I.1.2.

- (i) Wir werden später sehen, dass die Bedingungen so gewählt sind, dass auch die Umkehrabbildungen der Parametrisierungen $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$ glatt sind. Weil aber $M \cap V$ keine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, müssen wir uns dazu zuvor überlegen, was glatt da überhaupt heißen soll, s. Definition I.2.10. Insbesondere werden wir uns zuvor erst einmal überlegen, dass die Wechsel der lokalen Parametrisierungen glatt sind, d.h. für zwei lokale Parametrisierungen $F_i: U_i \rightarrow V_i$ um p für $i = 1, 2$, ist $F_1^{-1} \circ F_2: F_2^{-1}(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \subset \mathbb{R}^m$ glatt, siehe Folg. I.2.2.
- (ii) In der elementaren Differentialgeometrie definiert man den Begriff der *regulären Fläche*. In unserer Sprache ist eine reguläre Fläche eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$, für die eine lokale Parametrisierung $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ mit $M = F(U)$ existiert.
- (iii) Wir werden oft die Kurzschreibweise $M^m \subset \mathbb{R}^n$ verwenden. Das bedeutet, dass M m -dimensional ist und nicht $\underbrace{M \times \dots \times M}_{m\text{-mal}}$ – im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$.
- (iv) (LinAlg-Wdh) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Jacobimatrix $D_u f$ eine $m \times n$ -Matrix, bzw. eine lineare Abbildung $D_u f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist $D_u f$ injektiv (bzw. surjektiv), dann ist der Rang von $D_u f$ gleich n (bzw. m). Im Falle von Definition I.1.1 ist $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m \leq n$. Damit bedeutet: $D_u F$ habe maximalen Rang, dass $D_u F$ injektiv sein muss. Man sagt, dass F eine *Immersion* in u ist.

Beispiel I.1.3. (Beispiele für Untermannigfaltigkeiten)

- (i) **Ebene H im \mathbb{R}^3 :** Die Ebene H gehe durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ und werde durch die linear unabhängigen Vektoren X_1, X_2 aufgespannt:

$$H = \{p + u^1 X_1 + u^2 X_2 \mid u^i \in \mathbb{R}\}.$$

Hier reicht eine lokale Parametrisierung

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, u = (u^1, u^2) \mapsto p + \sum_i u^i X_i.$$

I.1. Untermannigfaltigkeiten

Dabei ist F glatt und ein Homöomorphismus aufs Bild $F(\mathbb{R}^2) = H$ und

$$D_u F = (X_1, X_2)$$

hat Rang 2, da die Vektoren linear unabhängig sind.

- (ii) $S^1 = \{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$: Wir geben hier nur lokale Parametrisierungen um $(0, 1)^T$ an, um alle jeweils fehlenden Punkte findet man analog eine lokale Parametrisierung. Natürlich reicht es eine lokale Parametrisierung um jeden Punkt von S^1 zu finden, aber wir wollen hier sehen, wie unterschiedlich solche Parametrisierungen aussehen können:

- (a) (Mittels Winkeln)

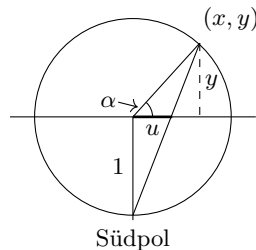
$$F: (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)^T\}), \quad \alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

($D_\alpha F = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ hat Rang 1) Hier ist F sogar für alle $p \in S^1 \setminus \{(0, -1)^T\}$ eine lokale Parametrisierung. Um $\{(0, -1)^T\}$ kann man ganz analog eine Parametrisierung bauen. Also ist S^1 eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 .

- (b) (Mittels Auflösung) $F: (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \{(x, y) \mid y > 0\}$, $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})^T$

($D_x F = (1, \partial_x \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^T$ hat Rang 1) Analog erhält man mittels $F: (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \{(x, y)^T \mid y < 0\}$, $x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2})^T$. Damit hat man schon um alle Punkte in $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T, (1, 0)^T\}$ eine lokale Parametrisierung (vgl. Präsenzübungsblatt). Auflösen nach y (statt x wie bisher) liefert dann ganz analog lokale Parametrisierungen für die verbleibenden Punkte.

- (c) (Mittels stereographischer Projektion)



$$F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto (x = \sin \alpha, y = \cos \alpha)^T$$

Mittels ähnlicher Dreiecke erhalten wir $\frac{y}{1} = \frac{x-u}{u}$. Zusammen mit $x^2 + y^2 = 1$ ergibt sich $F(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^T$. Nachrechnen von $D_u F$ zeigt, dass F eine lokale Parametrisierung ist.

- (iii) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f: u = (u^1, \dots, u^m) \in U \rightarrow f(u) = f(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^k$ glatt. Dann ist der **Funktionsgraph** $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine Untermannigfaltigkeit, vgl. ÜA 1(ii).

Um herauszufinden, ob eine Menge eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es verschiedene äquivalente Kriterien. Zum Beispiel muss eine Untermannigfaltigkeit in einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes immer als Funktionsgraph, vgl. Beispiel I.1.3(iib), oder als Nullstellenmenge einer geeigneten Funktion geschrieben werden können. Dies zeigt der folgende Satz. Zuvor benötigen wir noch den Begriff des regulären Wertes:

I. Mannigfaltigkeiten

Definition I.1.4. $a \in \mathbb{R}^k$ ist *regulärer Wert* einer glatten Funktion $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k \leq n$, falls für jeden Punkt $x = (x^1, \dots, x^n) \in V$ mit $f(x) = a$ die Ableitung $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ (eine $k \times n$ -Matrix) maximalen Rang hat.

In der obigen Situation ist $D_x f$ surjektiv. Man sagt, dass f eine Surjektion in x ist.

Satz I.1.5. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (a) (' M ist lokal eine Immersion') $M^m \subset \mathbb{R}^n$ ist eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .
- (b) (' M ist lokal ein Funktionsgraph') Für jedes $p \in M$ existiert (ggf. nach Vertauschen der Koordinatenreihenfolge) eine offene Umgebung $U \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Abbildung $g: U \rightarrow W$ so dass

$$\forall (u, w) \in U \times W: (u, w) \in M \iff g(u) = w,$$

anders formuliert

$$M \cap (U \times W) = \text{Graph}(g).$$

- (c) (' M ist lokal eine Nullstellenmenge') Für jeden Punkt $p \in M^m$ gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$ und eine glatte Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $0 \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert ist und $f^{-1}(0) = V \cap M$.
- (d) (' M ist lokal euklidisch') Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p und einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} h: V &\rightarrow W \\ h(M \cap V) &= W \cap (\mathbb{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\}) \\ &= \{h(p) \mid p \in M \cap V\} \end{aligned}$$

d.h. für $p \in M \cap V$ gilt

$$h(p) = (h_1(p), \dots, h_m(p), 0, \dots, 0),$$

vgl. Abbildung I.2.

Das Kriterium vom regulären Wert (Satz I.1.5.c) liefert schnell viele Beispiele für Untermannigfaltigkeiten, vgl. z.B. ÜA 2. Bevor wir dann Satz I.1.5 vollständig beweisen, schauen wir uns einige Beispiele für die Verwendung von (c) an.

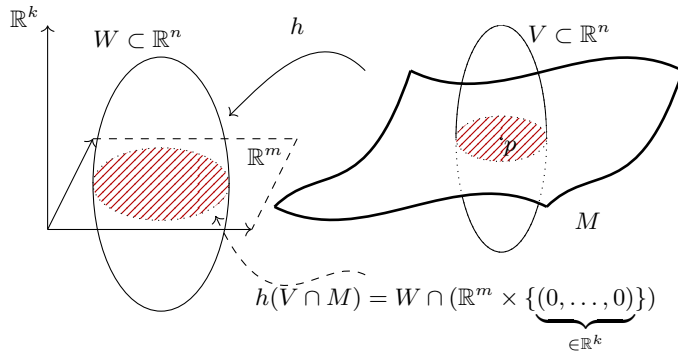


Abb. I.2.: 'M' ist lokal euklidisch

Beispiel I.1.6. (Beispiele für die Anwendung von Satz I.1.5.c)

(i) Die m -dimensionale Sphäre

$$S^m = \left\{ x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{j=1}^{m+1} (x^j)^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

ist das Urbild $S^m = f^{-1}(0)$ der Funktion $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x^1, \dots, x^{m+1}) = \sum_{j=1}^{m+1} (x^j)^2 - 1$. Wegen

$$D_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}}(x) \right) = 2(x^1, \dots, x^{m+1}) = 2x^T$$

hat $D_x f$ genau dann maximalen Rang, wenn $x \neq 0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ ist. Da jedoch $0 \notin f^{-1}(0)$ ist, ist 0 regulärer Wert von f und damit $S^m = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{m+1} .

(ii) $S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$: Wir wissen schon, dass S^1 eine Untermannigfaltigkeit ist. Wählt man aber

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2,$$

dann ist zwar $f^{-1}(0) = S^1$, aber

$$D_{(x,y)^T} f = (2x(x^2 + y^2 - 1), 2y(x^2 + y^2 - 1))$$

ist die Nullmatrix für $(x, y)^T \in S^1$. Für dieses f ist also 0 kein regulärer Wert und unsere Rechnung hier, sagt nichts darüber aus, ob S^1 nun eine Untermannigfaltigkeit ist oder nicht. Daran sieht man sehr schön, dass das Kriterium zwar sehr gut, dazu geeignet ist, zu zeigen, dass etwas eine Untermannigfaltigkeit ist – doch muss man ggf. das f richtig 'raten'.

I. Mannigfaltigkeiten

(iii) Das Lorentz-Produkt auf $\mathbb{R}^{n=m+1}$ ist ein indefinites Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle_L &= -x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^{m+1} y^{m+1} \\ \langle x, x \rangle_L &= -(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{m+1})^2.\end{aligned}$$

Man nennt $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ *Minkowskiraum*. Dies ist der Raum auf dem spezielle Relativitätstheorie modelliert wird. Mehr dazu noch später auf S. 40. Der *Lichtkegel* ist $C := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x \rangle_L = 0\}$. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \langle x, x \rangle_L,$$

und für $c \in \mathbb{R}$ setzen wir $M_c = f^{-1}(c)$.

$$D_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}}(x) \right) = 2(-x^1, x^2, \dots, x^{m+1}).$$

$D_x f$ hat maximalen Rang für alle $x \in M_c$ mit $c \neq 0$, d.h. jeder Wert $c \neq 0$ ist regulär.

Es folgt, dass für $c \neq 0$

$$M_c = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid f(x) = c\}$$

eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{m+1} ist. Es bleibt die Frage für

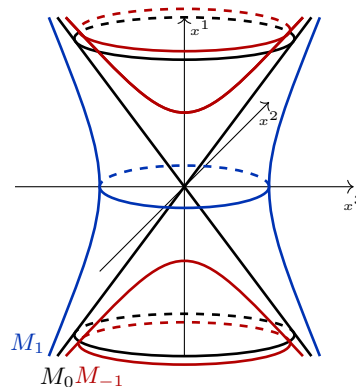


Abb. I.3.: M_0 - Lichtkegel, M_1 - einschaliges Hyperboloid, M_{-1} - zweischaliges Hyperboloid

$c = 0$: Nur, weil $D_x f$ hier nicht maximalen Rang hat, heißt das nicht, dass $f^{-1}(0)$ nicht doch eine Untermannigfaltigkeit sein könnte, s. letztes Beispiel.

Aus obigen Überlegungen wissen wir, dass nur $0 \in M_0$ ein Problem darstellen könnte (also das insbesondere $M_0 \setminus \{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit ist). Im Bild I.3

I.1. Untermannigfaltigkeiten

erkennt man schon, dass der Lichtkegel um $0 \in M_0$ nicht aussieht wie ein Funktionsgraph. Noch nicht von einmal von einer stetigen Funktion – sondern eher wie zwei an der 0 zusammengeklebten Funktionsgraphen stetiger Funktionen. Daraus wollen wir einen Beweis basteln, dass $M_0 = f^{-1}(0)$ keine Untermannigfaltigkeit ist.

Beweis. Annahme: M_0 ist eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in M_0$ einen Homöomorphismus $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_0 \cap V$ mit $p \in V \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Wähle $p = 0$ (denn dort ging das Reguläre-Wert-Argument von oben schief). Sei $u = F^{-1}(0)$. Durch Verkleinerung von V und Translation von U können wir o.B.d.A. annehmen, dass $u = 0$ und $U = B_\epsilon(0)$ für ein $\epsilon > 0$ ist. Dann ist

$$F|_{U \setminus \{u\}}: U \setminus \{u\} = B_\epsilon(0) \setminus \{0\} \rightarrow (M_0 \setminus \{0\}) \cap V$$

noch immer ein Homöomorphismus. Wähle einen Punkt $p_+ \in (M_0 \setminus \{0\}) \cap V \cap \{x^{m+1} > 0\}$ und analog einen Punkt $p_- \in (M_0 \setminus \{0\}) \cap V \cap \{x^{m+1} < 0\}$. Seien $u_\pm := F^{-1}(p_\pm)$. Wir wählen eine Kurve c in $U \setminus \{u\} = B_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ von u_+ nach u_- . Dann muss wegen Stetigkeit auch $F \circ c$ eine Kurve in $(M_0 \setminus \{0\}) \cap V$ von p_+ nach p_- sein. Eine solche Kurve gibt es nicht in $M_0 \setminus \{0\}$, da die x^{m+1} -Koordinate von $F \circ c$ irgendwann durch die Null gehen müsste und dieser Punkt aber nicht in $M_0 \setminus \{0\}$ liegen kann.* \square

- (iv) Bis jetzt haben wir nur Beispiele von *Hyperflächen* (= Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n der Dimension $n-1 = \text{Kodimension-1-Untermannigfaltigkeiten}$) betrachtet. Als nächstes kommt ein Beispiel mit höherer Kodimension:

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1)^T$$

Denn f ist glatt, Homöomorphismus auf Bild und

$$D_{(x,y,z)^T} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, also insbesondere für alle $(x, y, z)^T \in M$.

Man kann auch Objekte, die aus ganz anderen Kontexten bekannt sind, als Untermannigfaltigkeiten auffassen.

*Man sagt M_0 hat zwei Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponente = maximal zusammenhängende Teilmenge (wobei eine Teilmenge (weg-)zusammenhängend heißt, falls je zwei Punkte der Teilmenge durch einen stetigen Weg miteinander verbunden werden können.) [Im Allgemeinen sind zusammenhängend und wegzusammenhängend zwar verschiedene Begriffe. In unserer Situation fallen diese aber zusammen und es spielt nur wegzusammenhängend eine Rolle, vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space]

I. Mannigfaltigkeiten

- (v) Die orthogonale Gruppe $\mathbb{O}(n)$ enthält alle längenerhaltenden linearen Abbildungen im \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{O}(n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear, } \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

also alle Drehungen um den Ursprung, alle Spiegelungen an Hyperebenen* durch den Ursprung und Hintereinanderausführungen davon. Sei $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ die Menge der reellen $n \times n$ -Matrizen und Id_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Falls A eine Matrixdarstellung von f ist, gilt

$$\mathbb{O}(n) = \{A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid AA^T = \text{Id}_n\}.$$

Es ist $\det A \in \{\pm 1\}$.

Wir werden zeigen, dass die Gruppe $\mathbb{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} der Dimension $\frac{n}{2}(n-1)$ ist.

Beweis. Wir betrachten

$$f: M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n), \quad A \mapsto f(A) = AA^T - \text{Id},$$

wobei $\text{Sym}(n) = \{A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid A = A^T\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ die reellen symmetrischen Matrizen sind. Dann ist $\mathbb{O}(n) = f^{-1}(0)$. Wir müssen zeigen, dass $0 \in \text{Sym}(n)$ ein regulärer Wert ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} D_A f(H) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A + sH) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A + sH)(A + sH)^T - AA^T}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (AA^T + s(HA^T + AH^T) + s^2HH^T - AA^T) \\ &= HA^T + AH^T. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $D_A f: M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n)$ surjektiv ist und damit maximalen Rang hat. Sei $A \in \mathbb{O}(n)$, $S \in \text{Sym}(n)$. Wir wählen $H = \frac{1}{2}S(A^{-1})^T$. Dann ist

$$\begin{aligned} D_A f(H) &= \frac{1}{2} D_A f \left(S(A^{-1})^T \right) = \frac{1}{2} \left(S(A^{-1})^T A^T + A \left(S(A^{-1})^T \right)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(S \underbrace{(AA^{-1})^T}_{\text{Id}_n} + \underbrace{AA^{-1}}_{\text{Id}_n} \cdot S^T \right) = S. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\dim \mathbb{O}(n) = \dim M_{\mathbb{R}}(n, n) - \dim \text{Sym}(n) = n^2 - \frac{n}{2}. \quad \square$$

*Eine Hyperebene im \mathbb{R}^n ist ein Untervektorraum der Dimension $n-1$, z.B. Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^2 und Ursprungsebenen im \mathbb{R}^3 .

I.1. Untermannigfaltigkeiten

Ähnlich kann man auch für andere Matrixgruppen (Untergruppen von $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ und $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$), wie z.B. $U(n)$, $SU(n)$, ... , zeigen, dass dies Untermannigfaltigkeiten von $M_{\mathbb{C}}(n, n)$, ... sind.

Beweis von Satz I.1.5. (Vgl. Beweisschema in Abb. I.4) Sei pr_m (bzw. pr^m): $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten (bzw. letzten) m Koordinaten ($n \geq m$). Beweis in Vorl. 4

'(a) \implies (b)' Wir wollen aus einer lokalen Parametrisierung eine Beschreibung als Funktionsgraph machen. Die Idee ist, dass man dabei einfach das Bild der Parametrisierung selbst als Funktionsgraph über eine geeignete Teilmenge der Koordinaten versteht.

Sei $p \in M$ beliebig und $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$ eine lokale Parametrisierung. O.B.d.A. habe V die Form $V_1 \times V_2$ mit $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ und $V_2 \subset \mathbb{R}^k$ (Das kann durch Verkleinern von U immer erreicht werden.).

Setze $u := F^{-1}(p)$. Da der Rang von $D_u F$ gleich m ist, es also m linear unabhängige Spalten geben muss, können wir o.B.d.A. (durch Umordnung der Koordinaten direkt am Anfang) annehmen, dass

$$\det D_u(\text{pr}_m \circ F) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial u^j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Wir definieren $\hat{F}: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^m$ durch $\hat{F} := \text{pr}_m \circ F = (F_1, \dots, F_m)$. Wenden wir nun den Umkehrsatz auf \hat{F} an. Dann existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von u und $V'_1 \subset V_1$ von $\text{pr}_m(p) \in V_1$, so dass die Einschränkung $\hat{F}: U' \rightarrow V'_1$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen das Inverse mit $\phi: V'_1 \rightarrow U'$ und definieren $G := F \circ \phi: V'_1 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U') \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $v \in V'_1$

$$\begin{aligned} G(v) &= (F \circ \phi)(v) = (\text{pr}_m(F(\phi(v))), \text{pr}^k(F(\phi(v)))) \\ &= (\hat{F}(\phi(v)), \text{pr}^k(G(v))) = (v, \underbrace{\text{pr}^k \circ G}_{=: g})(v). \end{aligned}$$

Die Abbildung $g: V'_1 \rightarrow \text{pr}^k(F(U')) := V'_2 \subset \mathbb{R}^k$ hat alle gewünschten Eigenschaften: Sei $(v, w) \in V'_1 \times V'_2$ mit $g(v) = w$. Dann gilt

$$(v, w) = (v, g(v)) = G(v) = F(\phi(v)) \in F(U') \subset F(U) = M \cap V \subset M.$$

Sei andererseits $(v, w) \in M \cap (V'_1 \times V'_2)$. Da $F: U' \rightarrow V'_1 \times V'_2$ ein Homöomorphismus ist, existiert genau ein $u \in U'$ mit $(v, w) = F(u)$. Also ist $v = \hat{F}(u)$ und $\phi(v) = u$. Damit gilt

$$(v, w) = F(u) = F(\phi(v)) = G(v) = (v, g(v)),$$

also $g(v) = w$.

'(b) \implies (c)': Sei $g: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^k$ und $p \in U \times W$ wie in (b). Wir definieren $f: V := U \times W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch

$$f(u, w) := w - g(u).$$

I. Mannigfaltigkeiten

Dann ist $f^{-1}(0) = \text{Graph}(g) = M \cap (U \times W)$. Außerdem ist

$$\underbrace{D_{(u,w)}f}_{k \times n\text{-Matrix}} = \left(\underbrace{-D_u g}_{k \times m}, \underbrace{\text{Id}_k}_{k \times k} \right)$$

Also ist $\text{Rang}(D_{(u,w)}f) = k$, und damit ist 0 regulärer Wert von f .

'(c) \implies (d)': Sei $f: V \subset \mathbb{R}^{n=m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ wie in (c). Sei $U \times W \subset V$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^k$ offen, so dass $p = (u_0, w_0) \in U \times W$ ist. Nach Umbenennung der Koordinaten (falls nötig) können wir annehmen, dass

$$\det \left(\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p = (u_0, w_0))}_{=: D_{w_0}f(p)} \right)_{1 \leq i \leq k, n-k+1 \leq j \leq n} \neq 0.$$

Wir definieren

$$h: U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n, (u, w) \mapsto (u, f(u, w)).$$

und berechnen

$$\det D_p(h) = \det \begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0_{m \times k} \\ * & D_{w_0}f(p) \end{pmatrix} = \det D_{w_0}f(p) \neq 0.$$

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit liefert eine offene Umgebung $V' \subset U \times W$ von $p = (u_0, w_0)$, eine offene Umgebung C' von $q := h(p)$, so dass die Einschränkung $h: V' \rightarrow C'$ ein Diffeomorphismus ist. Die Abbildung h erfüllt dann:

$$(u, w) \in M \cap V' \iff f(u, w) = 0 \iff h(u, w) = (u, f(u, w)) = (u, 0) \in C'.$$

'(d) \implies (a)': Sei $h: V \rightarrow W$ wie in (d) gegeben. Dann ist h und damit auch h^{-1} insbesondere auch ein Homöomorphismus und damit ist auch

$$F := h^{-1}|_{U_F := W \cap (\mathbb{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\})}: U_F \rightarrow V$$

ein Homöomorphismus aufs Bild. Da h Diffeomorphismus ist, ist F noch immer glatt und eine Immersion. \square

Zusammenfassung und Ausblick

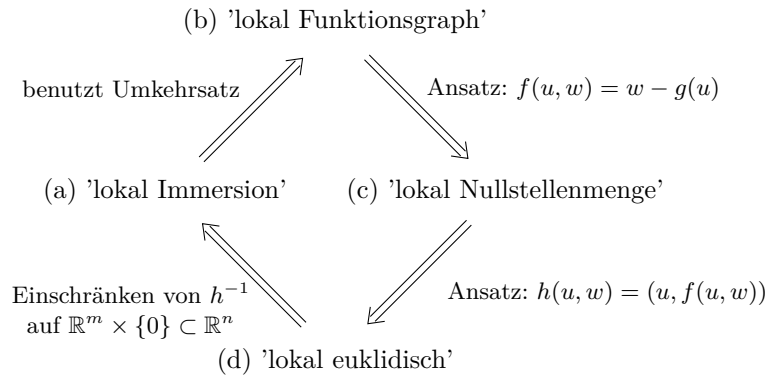
Was ist eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit? Sehr grob gesprochen: Eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n , die um jeden Punkt, wenn man nah genug rein zoomt, aussieht wie der \mathbb{R}^m (Oder auch: die um jeden Punkt aussieht wie der Graph einer \mathbb{R}^m -wertigen Funktion in $\mathbb{R}^{k=n-k}$ Variablen). Alles auf glatte Art und Weise.

Um jeden Punkt führt man mittels lokaler Parametrisierungen dann lokale Koordinaten ein – wie die Koordinaten auf der Landkarte, die auch Teilgebiete der Erde beschreiben.

Wichtigste Methode zu zeigen, dass eine implizit gegebene Menge eine Untermannigfaltigkeit ist, ist das Kriterium vom regulärem Wert ('Stichwort: Höhenlinien').

Ziele im Weiteren:

I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum



(wobei $(u, w) \in U \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$).

Abb. I.4.: Beweisschema zu Satz I.1.5

1. Einführen von Konzepten der Analysis auf der Untermannigfaltigkeit, z.B. Ableitungen, Metriken, etc.
2. Dabei soll jedes dieser 'Konzepte' auch immer mittels den lokalen Koordinaten beschrieben werden.
Nach dem Motto: Wenn man eine Reiseroute planen will, setzt man sich auch zu Hause mit der Landkarte hin und geht nicht raus und läuft alle Möglichkeiten auf der Erde ab.
 Dieses Motto ist insbesondere für das nächste Ziel entscheidend.
3. Verallgemeinerung auf abstrakte Mannigfaltigkeiten ('Untermannigfaltigkeiten ohne (a priori gegebenen) umliegenden Raum')

I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum

Eine grundlegende Idee der Analysis ist es, sofern möglich, Abbildungen durch einfachere, zunächst zumeist lineare Abbildungen zu approximieren, um analytische Probleme auf linear-algebraische zurückzuführen. Die lineare Approximation einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ bei x ist das Differential $D_x f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, definiert durch $f(x+v) = f(x) + D_x f(v) + o(v)$ mit $\lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{o(v)}{|v|} = 0$. Zur Hauptaufgabe dieses Abschnittes gehört die Frage, wie man das Differential auf Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern kann.

I.2.1. Wechsel lokaler Parametrisierungen

Zuerst wollen wir die Frage untersuchen, ob die Wechsel lokaler Parametrisierungen, wie in Bemerkung I.1.2 behauptet, glatt sein. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma I.2.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M . Sei $W \subset \mathbb{R}^\ell$ eine offene Menge und $\phi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\phi(W) \subset M \cap V$. Dann ist ϕ als Abbildung von W nach \mathbb{R}^n genau dann glatt, wenn $F^{-1} \circ \phi: W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ glatt ist.*

Das letzte Lemma sagt uns, dass bei der Frage der Differenzierbarkeit einer Abbildung mit Werten in M egal ist, ob wir diese Abbildung als eine nach \mathbb{R}^n oder mittels Koordinaten als eine Abbildung mit Werten in \mathbb{R}^m auffassen. Insbesondere muss man das wirklich zeigen, weil wir im Moment noch nicht wissen, ob F^{-1} glatt ist, bzw. was das für $F^{-1}: V \cap M \rightarrow U$ überhaupt heißen soll.

Beweis. Ist $F^{-1} \circ \phi$ glatt, dann ist $\phi = F \circ (F^{-1} \circ \phi)$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt.

Sei nun $\phi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt.

Idee: Glatte Erweiterung von F zu einer Funktion G von $U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass G^{-1} dann im Analysissinne glatt ist.

Sei $p \in W$. Dann ist $q := \phi(p) \in M \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(q) \in U$. Sei $F = (F_1, \dots, F_n)^T$. Das Differential $D_{u_0} F$ hat maximalen Rang. O.B.d.A. habe $(D_{u_0}(F_1, \dots, F_m))^T$ maximalen Rang. Wir definieren

$$G: U \times \mathbb{R}^{k:=n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G_j(u^1, \dots, u^m, t^{m+1}, \dots, t^n) = \begin{cases} F_j(u^1, \dots, u^m) & j \leq m \\ F_j(u^1, \dots, u^m) + t^j & j > m \end{cases}$$

und berechnen

$$D_{(u_0^1, \dots, u_0^m, 0, \dots, 0)} G = \left(D_{(u_0^1, \dots, u_0^m)} F \mid \begin{array}{c} 0 \\ \text{Id}_k \end{array} \right).$$

Dann ist

$$\det D_{(u_0, 0) = (u_0^1, \dots, u_0^m, 0, \dots, 0)} G = \det D_{u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^m)} (F_1, \dots, F_m)^T \neq 0,$$

und damit gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}^k$ von $(u_0^1, \dots, u_0^m, 0, \dots, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subset V$ von q , so dass

$$G|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$$

ein Diffeomorphismus ist. Sei $W_1 := \phi^{-1}(V_1)$. Dann ist W_1 eine offene Umgebung von p . Für $p' \in W_1$ gilt

$$G^{-1} \circ \phi(p') = (F^{-1} \circ \phi(p'), 0, \dots, 0).$$

Da $G^{-1} \circ \phi$ glatt ist, gilt das auch für $F^{-1} \circ \phi$. □

I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum

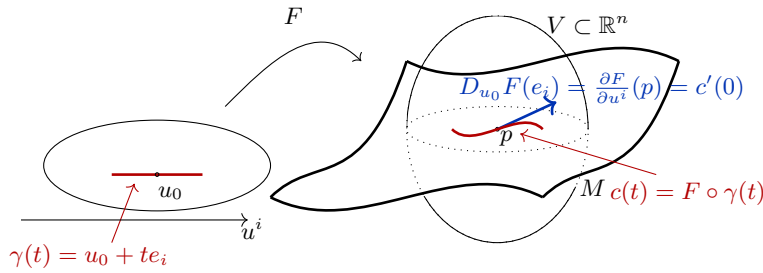


Abb. I.5.: Tangentialvektor

Folgerung I.2.2. Sei M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n zusammen mit zwei lokalen Parametrisierungen $F_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $F_2: U_2 \rightarrow V_2$. Sei $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann ist

$$F_2^{-1} \circ F_1: F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

Beweis. Wir verwenden Lemma I.2.1 auf $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $\phi = F_1$ und $F = F_2$ an. \square

I.2.2. Tangentialvektoren und Tangentialraum

Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M um $p = F(u_0)$. Die Bedingung, dass $D_{u_0} F = \left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0) \right)$ Rang m hat, bedeutet, dass die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

Anschauung von $\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$. (Vgl. Abbildung I.5)

Es ist $\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) = D_{u_0} F(e_i)$, wobei $e_i := e_i|_{u_0}$ den Einheitsvektor im Punkt u_0 zur Koordinate u^i darstellt. Dann ist

$$e_i := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \dots, u_0^m)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) = D_{u_0} F(e_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(u_0 + t e_i).$$

Hierbei ist $\gamma(t) := u_0 + t e_i$ eine Kurve (sogar eine Gerade) in \mathbb{R}^m und $c(t) := F \circ \gamma(t) = F(u_0 + t e_i)$ eine Kurve in $M \subset \mathbb{R}^n$, also insbesondere eine Kurve in \mathbb{R}^n . Also ist $c'(0) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ der Tangentialvektor an c in $p = c(0) = F(u_0)$.

Da für t klein genug $\text{Spur}(c) := \text{Bild}(c) \subset M$ ist, nennt man $c'(0) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ auch *tangential* an M in $p = c(0)$.

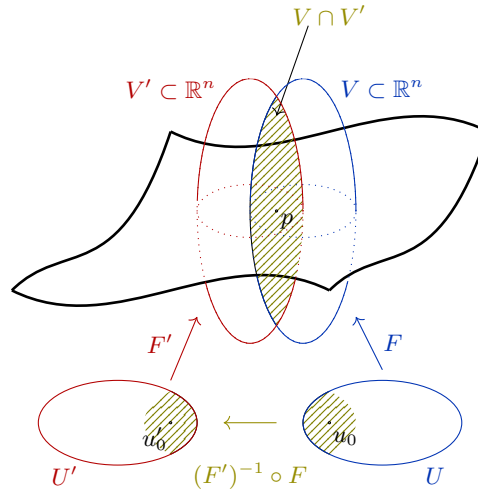


Abb. I.6.: Wechsel der lokalen Parametrisierung

Lemma und Definition I.2.3. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M um $p = F(u_0)$. Dann ist der durch

$$T_p M := D_{u_0} F(\mathbb{R}^m)$$

definierte Untervektorraum von \mathbb{R}^n unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung und heißt Tangentialraum von M an p .

Beweis. Sei $F': U' \rightarrow V'$ eine weitere lokale Parametrisierung um $p = F'(u'_0)$. Nach Folgerung I.2.2 ist $w := (F')^{-1} \circ F: F^{-1}(V \cap V') \rightarrow (F')^{-1}(V \cap V')$ ein Diffeomorphismus. Damit ist $F = F' \circ w: F^{-1}(V \cap V') \rightarrow V \cap V'$ und nach Kettenregel

$$D_{u_0} F = D_{w(u_0)=F^{-1}(p)=u'_0} F' \circ D_{u_0} w.$$

Also ist

$$D_{u_0} F(\mathbb{R}^m) = D_{u'_0} F'(D_{u_0} w(\mathbb{R}^m)) = D_{u'_0} F'(\mathbb{R}^m),$$

wobei die zweite Gleichheit folgt, da w und damit auch $D_{u_0} w$ ein Diffeomorphismus ist. \square

Bemerkung I.2.4.

- (i) $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u^m}(u_0)$ ist eine Basis von $T_p M$ (wobei $F(u_0) = p$).
- (ii) Sei $v \in T_p M$. Dann gibt es eine glatte Kurve $c: I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$: Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung um $p = F(u_0)$ und

I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum

sei $v = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$. Wähle für $c = F \circ \gamma$ mit $\gamma(t) = u_0 + t \sum_{i=1}^m a^i e_i$. Wegen Linearität der Ableitung gilt

$$c'(0) = D_{u_0} F(\gamma'(0)) = \sum_{i=1}^m a^i D_{u_0} F(e_i) = v.$$

Die Kurve c (und damit γ) ist durch $c'(0) = v$ natürlich nicht eindeutig bestimmt, sondern jede Kurve γ in \mathbb{R}^n mit $\gamma(0) = u_0$ und $\gamma'(0) = \sum_{i=1}^m a^i e_i$ funktioniert.

Andersherum liefert jede Kurve glatte Kurve $c: I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ durch $c'(0)$ ein Element in $T_p M$: Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung um $p = F(u_0)$. Für ϵ klein genug gibt es ein $\gamma: I \rightarrow U$ mit $c = F \circ \gamma$. Dann ist $c'(0) = (F \circ \gamma)'(0) = D_{u_0} F(\gamma'(0)) \in T_p M$.

Wir haben also gesehen, dass jeder Tangentialvektor von M in p der Geschwindigkeitsvektor am Punkt p einer Kurve in M ist. Natürlich ist diese Kurve nicht eindeutig bestimmt. Dennoch ist dies eine wichtige Beobachtung mit der wir immer wieder arbeiten werden und mit deren Hilfe wir das Konzept des Tangentialraumes auch auf abstrakte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern werden (s. Definition I.3.16) oder die uns ab und zu auch bei der Berechnung von Ableitungen helfen wird (z.B. Beweis von Lemma I.2.15).

Notation I.2.5 (Einsteinsche Summenkonvention). Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention bei der in einem Produkt über wiederkehrende obere und untere Indizes automatisch summiert wird, z.B.: $a^i b_i := \sum_i a^i b_i$. Die Grenzen der Summation ergeben sich aus dem Kontext – oft die Dimension der Mannigfaltigkeit. Steht ein oberer/unterer Index unterm Bruchstrich, so wird er für die Summenkonvention zum unteren/oberen Index: $x^i \frac{\partial F}{\partial x^i} := \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial F}{\partial x^i}$. Ein komplizierteres Beispiel wäre $a_{k\ell}^j g_{ij} x^k = \sum_{k,j} a_{k\ell}^j g_{ij} x^k$ und wäre in der Summe auch nicht nur skalar sondern hätte zwei untere Indizes i, ℓ übrig.

Definition I.2.6 (Tangentialbündel, Normalenraum, Normalenbündel). Wir nennen die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit das *Tangentialbündel**

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M := \{(p, v) \mid v \in T_p M, p \in M\}$$

von M . Der *Normalenraum* von M an p ist definiert als

$$N_p M := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in T_p M \subset \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0\}$$

und das *Normalenbündel* von M also

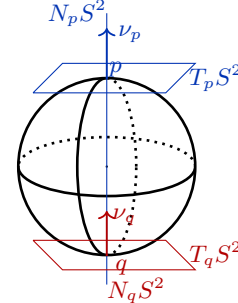
$$NM := \bigsqcup_{p \in M} N_p M.$$

*Streng genommen ist das der Totalraum des Tangentialbündels (Das Bündel selbst kommt mit mehr Struktur). Aber hier benutzen wir das erst einmal nur als Name und führen hier nicht den Begriff eines Bündels ein.

Bemerkung I.2.7. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit. Dann gilt für alle $p \in M$: $T_p M \oplus N_p M = \mathbb{R}^n$.

Beispiel I.2.8.

- (i) S^2 : Als Untervektorraum vom \mathbb{R}^3 sind $T_p S^2$ und $T_q S^2$ gleich, als Teilmenge von TS^2 jedoch verschieden. In TS^2 merken wir uns für jeden Tangentialvektor noch seinen Fußpunkt auf S^2 . Analoges gilt für $N_p S^2$ und $N_q S^2$.



- (ii) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$: $T\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^2} \{p\} \times T_p \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^2} \{p\} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Berechnung von $T_p M$ für implizit gegebene Untermannigfaltigkeiten Sei $M = f^{-1}(0)$ für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt und der Rang von $D_p f$ sei maximal für alle $p \in M$. Dann ist also nach Satz I.1.5 (Kriterium vom regulären Wert) M eine $(m:=n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M . Sei $u \in U$. Dann ist

$$f \circ F = 0, \text{ also } 0 = D_u(f \circ F) = D_{F(u)} f \circ D_u F.$$

Damit ist $\text{Bild}(D_u F) \subset \ker(D_{F(u)} f)$. Da $\text{Rang}(D_{F(u)} f) = k$ ist, ist $\dim \ker(D_{F(u)} f) = n - k = m$. Wegen $\dim D_u F(\mathbb{R}^m) = m$, folgt

$$T_{F(u)} M = D_u F(\mathbb{R}^m) = \ker(D_{F(u)} f) \tag{I.1}$$

und damit $N_{F(u)}(M) = (\ker(D_{F(u)} f))^\perp$.

Beispiel I.2.9. $M = S^2$, $f = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1$, $D_x f = 2(x^1, x^2, x^3)$, also ist nach (I.1) $T_x S^2 = \ker D_x f = \ker 2(x^1, x^2, x^3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v \rangle = 0\} = (\mathbb{R} \cdot x)^\perp$.

I.2.3. Abbildungen von M aus

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Wir wollen einen Begriff von Glattheit für f einführen. Da gibt es verschiedenen Möglichkeiten. Man kann z.B. fordern, dass es lokal immer eine glatte Fortsetzung in den umgebenden Raum geben soll oder aber auch, dass die Abbildung in lokalen Koordinaten ausgedrückt immer glatt ist. Wir werden folgend die erste Definition wählen und dann zeigen, dass sie zur zweiten äquivalent ist. Die zweite Variante ist die, die auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten noch Sinn machen wird.

Definition I.2.10. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ heißt *glatt*, falls es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $\tilde{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ gibt, so dass

$$f|_{S \cap W} = \tilde{f}|_{S \cap W}.$$

I.2. Differenzierbare Abbildungen und der Tangentialraum

Lemma I.2.11. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $F^{-1}: V \cap M \rightarrow U$ glatt.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus dem Beweis von Lemma I.2.1. Die dort konstruierte Funktion G^{-1} ist eine glatte Fortsetzung von F^{-1} in einer Umgebung von p . \square

Lemma I.2.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M um p . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. ('Lokale Existenz einer glatten Fortsetzung') Es gibt eine offene Umgebung W von p in \mathbb{R}^n und eine Fortsetzung \bar{f} von $f|_{M \cap W}$ auf W , die glatt ist.

2. ('glatt in lokaler Parametrisierung') Die Abbildung $f \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ist glatt.

Beweis. '1 \implies 2': Sei $u_0 \in U$ beliebig und $p := f(u_0)$. Da nach Voraussetzung f in p glatt ist, gibt es eine offene Umgebung W von p und eine glatte Funktion $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mit $f|_{M \cap W} = \bar{f}|_{M \cap W}$. Dann gilt für alle $u \in F^{-1}(V)$:

$$f \circ F(u) = \bar{f} \circ F(u).$$

Nun ist $\bar{f} \circ F$ als Verkettung zweier glatter (im ursprünglichen Sinne der Analysis) Funktionen wieder glatt*. Damit ist auch $f \circ F$ auf $F^{-1}(V)$ glatt, also insbesondere auch in u_0 .

'2 \implies 1': Sei $p \in M$. Nach Lemma I.2.11 ist F^{-1} glatt, d.h. es gibt eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $G: W \rightarrow U$ mit $G|_{M \cap W} = F^{-1}|_{M \cap W}$. Setze

$$\bar{f} = f \circ F \circ G: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell.$$

Dann ist \bar{f} als Hintereinanderausführung von glatten Abbildungen (hier wieder glatt im Sinne der Analysis) glatt und $\bar{f}|_{W \cap M} = f \circ F \circ G|_{W \cap M} = f \circ F \circ F^{-1}|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$. \square

Bemerkung I.2.13. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten $M^m \subset \mathbb{R}^k$ und $N^n \subset \mathbb{R}^\ell$. Sei $p \in M$. Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M um p und sei $F': U' \rightarrow V'$ eine lokale Parametrisierung von N um $f(p)$. Dann ist nach Lemmata I.2.1 und I.2.12 f um p genau dann glatt, wenn $(F')^{-1} \circ f \circ F: f^{-1}(U') \cap U \rightarrow V'$ glatt um $u := F^{-1}(p)$ ist (also f in lokalen Koordinaten glatt ist).

Beispiel I.2.14. (i) $\text{id}: M \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ ist glatt.

(ii) Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$. Ein (glattes) Vektorfeld ist eine (glatte) Abbildung $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Gilt zusätzlich $X(p) \in T_p M$ (bzw. $X(p) \in N_p M$) für alle $p \in M$, so ist X ein (glattes) tangenciales Vektorfeld oder Tangentialfeld (bzw. normales Vektorfeld oder Normalenfeld) auf M . Falls $\|X(p)\| = 1$ für alle $p \in M$ ist, heißt X Einheitsvektorfeld.

*gilt aber auch für den Glattheitsbegriff aus Definition I.2.10

I.2.4. Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten und die Tangentialabbildung

Seien $M^m \subset \mathbb{R}^k$ und $N^n \subset \mathbb{R}^\ell$ Untermannigfaltigkeiten. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, sei $p \in M$. Wir suchen einen geeigneten Begriff für die erste Ableitung von f an der Stelle p . Dies sollte eine Abbildung von $T_p M$ nach $T_{f(p)} N$ sein.

Nach Definition gibt es eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^k$ von p und eine glatte Abbildung $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, so dass $f|_{W \cap M} = \bar{f}|_{W \cap M}$. Die Erweiterung \bar{f} ist in p differenzierbar: $D_p \bar{f}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Die Idee ist, diese Abbildung auf $T_p M$ einzuschränken und so die erste Ableitung zu definieren. Es gibt zwei Sachen, die man sich da überlegen muss: Es muss wirklich nach $T_{f(p)} N$ abbilden und unabhängig von der Wahl der Erweiterung \bar{f} sein.

Lemma I.2.15. $D_p \bar{f}(T_p M) \subset T_{f(p)} N$

Beweis. Sei $v \in T_p M$ gegeben. Wir wählen eine Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Dann gilt

$$D_p \bar{f}(v) = D_{c(0)} \bar{f}(c'(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\bar{f} \circ c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\underbrace{f \circ c(t)}_{\text{Kurve in } N}) \in T_{f(p)} N. \quad (\text{I.2})$$

□

Wegen (I.2) hängt diese Definition nicht von der Wahl von \bar{f} ab und wir können definieren:

Definition I.2.16. Das *Differential von f an der Stelle p* sei

$$d_p f := D_p \bar{f}|_{T_p M}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N.$$

Diese Abbildung wird *Tangentialabbildung* von f in p genannt.

Bemerkung I.2.17. (i) $d_p f$ ist linear.

(ii) Für glatte Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten $M^m \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{g} P^p$ gilt die Kettenregel

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)} g) \circ (d_p f).$$

(iii) In lokalen Koordinaten (vgl. Abb. I.7): Es sei $F(u_0) = p$, $f(p) = \tilde{p}$, $\tilde{F}(\tilde{u}_0) = \tilde{p}$. Es gibt $a_i^j \in \mathbb{R}$ mit

$$d_p f \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) \right) = a_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0) \in T_{\tilde{p}} N.$$

Dann gilt

$$D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) = a_i^j e_j,$$

wobei $(e_i)_i$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n (hier einmal im Punkt u_0 als Basis von $T_{u_0} \mathbb{R}^n$ und einmal im Punkt \tilde{u}_0 als Basis von $T_{\tilde{u}_0} \mathbb{R}^m$) bezeichnet:

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Sei dazu $D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) = b_i^j e_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0) &= d_p f \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) \right) = D_p \tilde{f} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0) \right) = D_{u_0}(\tilde{f} \circ F)(e_i) \\ &= D_{u_0}(\tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ \tilde{f} \circ F))(e_i) = D_{\tilde{u}_0} \tilde{F} \circ D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) \\ &= D_{\tilde{u}_0} \tilde{F}(b_i^j e_j) = b_i^j D_{\tilde{u}_0} \tilde{F}(e_j) = b_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert damit $a_i^j = b_i^j$.

Insbesondere haben wir so auch gesehen, dass $d_p f$ unabhängig von der Wahl der Fortsetzung \tilde{f} ist.

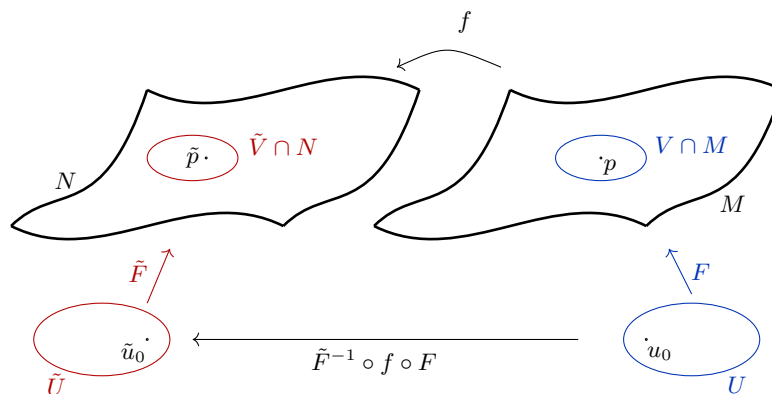


Abb. I.7.: $f: M \rightarrow N$ in lokalen Parametrisierungen. O.B.d.A. sei $f(V \cap M) = \tilde{V} \cap N$

Notation I.2.18. Abkürzend verwendet man auch häufig:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p := \frac{\partial F}{\partial u^i}(F^{-1}(p)).$$

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Ziel: Verallgemeinerung des Untermannigfaltigkeitsbegriffs für eine Menge M ohne umliegenden Raum \mathbb{R}^n . **Vorl. 4 - 26.10.**

Wir wollen um jeden Punkt bijektive Abbildungen $\kappa_\alpha: U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ für $\alpha \in A$, A eine Indexmenge, so dass

- (I) die U_α die Menge M überdecken, d.h. $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Für unsere Untermannigfaltigkeiten entspricht κ_α^{-1} der lokalen Parametrisierungen. Das Problem ist nun das U_α nur eine beliebige Teilmenge ist, wir also schlecht fordern können, dass die *lokalen Karten* κ_α glatt sind. Deshalb fordern wir das für die Kartenwechsel:

I. Mannigfaltigkeiten

- (II) die Mengen $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ seien offen in \mathbb{R}^m für alle $\alpha, \beta \in A$ und die Kartenwechsel $\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}: \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ seien für alle $\alpha, \beta \in A$ glatt.

Dies sind Eigenschaften, die wir auf alle Fälle wollen. Die Frage ist nun, ob das schon eine gute Definition ausmachen würde. Die Antwort ist leider nein, da dann auch Mengen eingeschlossen werden, die wir eher nicht als gute Verallgemeinerung von Untermannigfaltigkeiten betrachten wollen:

Beispiel I.3.1. (Eine Menge, die 'keine Mannigfaltigkeit sein sollte') Sei $X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$. Sei $(x, y) \sim (x', y')$ genau dann, wenn beide gleich sind oder $x = x' > 0$ ist. Wir setzen $M = X / \sim$ und $\kappa_\pm: U_\pm := \mathbb{R} \times \{\pm 1\} / \sim \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [(x, \pm 1)] \mapsto x$. Dann gelten die obigen Eigenschaften, vgl. ÜA 7. Allerdings entspricht das nicht so sehr unserer Vorstellung von einer Untermannigfaltigkeit, weil $(0, 1)$ und $(0, -1)$ zwei verschiedene Punkte von X sind, die in geeignetem Sinne beliebig nah beieinander liegen.

Das obige Beispiel müssen wir irgendwie ausschließen. Der relevante Begriff dabei ist der einer *Hausdorffschen Topologie*:

Dazu wiederholen wir zuerst den Begriff der Topologie und einige wichtige Beispiele:

Definition I.3.2. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* \mathcal{T} auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (die leere und die gesamte Menge liegen in \mathcal{T})
- (ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder eine offene Menge.
- (iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder eine offene Menge.

(X, \mathcal{T}) heißt *topologischer Raum*. Elemente in \mathcal{T} nennt man *offene Mengen* in X .

Beispiel I.3.3. Die Familie aller offenen Teilmengen des \mathbb{R}^m ('offen' hier wie in Analysis definiert) liefert eine Topologie auf \mathbb{R}^m – die sogenannte *Standardtopologie* des \mathbb{R}^m . Das ist das Standardbeispiel nach dem der Topologiebegriff gebaut wurde, und deshalb heißen Elemente einer allgemeinen Topologie auch offene Mengen.

Aus der Analysis wissen wir, dass man Stetigkeit von Abbildungen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ alternativ zum $\epsilon - \delta$ -Kriterium auch durch Untersuchung der Urbilder offener Mengen definieren kann. Man übernimmt dieses Kriterium als Definition für stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen.

Definition I.3.4. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{T}) und $(Y, \hat{\mathcal{T}})$ heißt *stetig*, falls $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ für alle $O \in \hat{\mathcal{T}}$ ist (also Urbilder offener Mengen wieder offen sind).

Beispiel I.3.5. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

- (i) Sei $M \subset X$ und $\hat{\mathcal{T}} = \{V \cap M \mid V \in \mathcal{T}\}$. Dann ist $\hat{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf M und heißt die von (X, \mathcal{T}) *induzierte Topologie* auf M .

So erhält man insbesondere auf Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ eine induzierte Topologie.

- (ii) Sei Y eine Menge und $q: X \rightarrow Y$ surjektiv. Dann ist $\mathcal{T}' = \{\mathcal{O} \mid q^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y – die sogenannte *Quotiententopologie*.

Wichtiger Spezialfall: Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X , (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $\text{pr}: X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion. Dann betrachtet man auf X/\sim meist ohne weiteren Kommentar die Quotiententopologie.

Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf Y , so dass q bzgl. dieser Topologien stetig ist ('feinste' = jede andere Topologie mit dieser Eigenschaft (= q ist stetig) ist in dieser Topologie enthalten). Für weitere Eigenschaften siehe ÜA 9.

Beispiel I.3.6. Sei M eine Menge. Seien bijektive Abbildungen $\kappa_\alpha: U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ für $\alpha \in A$, A eine Indexmenge, gegeben, so dass (I) und (II) gelten. Dann trägt M genau eine Topologie \mathcal{T} bzgl. derer alle U_α offene Mengen und alle κ_α Homöomorphismen (bzgl. der auf U_α durch \mathcal{T} induzierten Topologie) sind.

Beweis. Eindeutigkeit Sei \mathcal{T} eine solche Topologie auf M . Dann ist $U_\alpha \in \mathcal{T}$. Wir zeigen, dass

$$\mathcal{T} = \{W \subset M \mid \kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \text{ offen für alle } \alpha \in A\}$$

gelten muss: Sei $U \in \mathcal{T}$. Dann ist auch $U_\alpha \cap U \in \mathcal{T}$ und damit auch $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U)$ offen für alle $\alpha \in A$. Also gilt $\mathcal{T} \subset \{W \subset M \mid \kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \text{ offen für alle } \alpha \in A\}$. Für die andere Inklusion sei nun $W \subset M$ eine Teilmenge, für die $\kappa_\alpha(W \cap U_\alpha)$ in \mathbb{R}^m für alle $\alpha \in A$ offen ist. Dann ist $W \cap U_\alpha$ in U_α offen und somit, da U_α selbst offen ist, auch offen in M . Wegen (I) ist dann auch $W = \cup_{\alpha \in A} (W \cap U_\alpha)$ offen in M .

Existenz Sei $\mathcal{T} = \{W \subset M \mid \kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \text{ offen für alle } \alpha \in A\}$ wie oben. Es reicht zu zeigen, dass \mathcal{T} eine Topologie ist und die geforderten Eigenschaften hat, also $U_\alpha \in \mathcal{T}$ ist und die κ_α Homöomorphismen sind:

- Topologie: Es ist $\emptyset, M \in \mathcal{T}$ (klar für leere Menge und für M folgt es aus $\kappa_\alpha(M \cap U_\alpha) = \cup_{\beta \in A} \kappa_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)$). Seien $W_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$. Dann ist $\kappa_\alpha((\cup_i W_i) \cap U_\alpha) = \kappa_\alpha(\cup_i (W_i \cap U_\alpha)) = \cup_i \kappa_\alpha(W_i \cap U_\alpha)$ als Vereinigung der offenen Mengen $\kappa_\alpha(W_i \cap U_\alpha)$ wieder offen in \mathbb{R}^m . Analog rechnet man die Bedingung an endliche Schnitte nach und erhält, dass \mathcal{T} eine Topologie ist.
- $U_\alpha \in \mathcal{T}$ folgt direkt aus der Definition von \mathcal{T} und (II).
- $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ ist offen, da $V_\alpha = \kappa_\alpha(U_\alpha) = \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\alpha)$ nach Definition der Topologie offen ist.
- κ_α Homöo: Sei nun $W \subset U_\alpha$ offen. Nach Definition von \mathcal{T} ist damit $\kappa_\alpha(W \cap U_\alpha) = \kappa_\alpha(W)$ offen in \mathbb{R}^m und damit, da V_α selbst offen ist, auch in V_α . Also ist κ_α^{-1} stetig.

Sei nun $Z \subset V_\alpha$ offen. Wegen (II) ist $(\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta^{-1})^{-1}(Z \cap \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) = \kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(Z) \cap U_\alpha \cap U_\beta) = \kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(Z) \cap U_\beta)$ offen für alle β . Nach Definition von \mathcal{T} ist dann $\kappa_\alpha^{-1}(Z) \subset U_\alpha$ offen in M und damit in U_α . Also ist κ_α stetig. \square

I. Mannigfaltigkeiten

Definition I.3.7. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Falls für je zwei Punkte $p, q \in X$ mit $p \neq q$ offene Mengen $U, V \subset X$ mit $p \in U, q \in V$ mit $U \cap V = \emptyset$ existieren, dann nennen wir den Raum *Hausdorff*. ('Punkte kann man trennen')

In Beispiel I.3.1 ist die Topologie, die unsere Karten induzieren, genau die Quotienten-topologie von $X \rightarrow X/\sim$ und diese Topologie ist nicht Hausdorffsch, ÜA 7.

Vorl. 5 - 31.10.

Definition I.3.8. Sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Wir nennen M eine *topologische m -dimensionale Mannigfaltigkeit*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Topologie ist Hausdorffsch.
- (ii) Die Topologie von M besitzt eine *abzählbare Basis*, d.h. es gibt eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass für alle $U \in \mathcal{T}$ es Mengen $B_i \in \mathcal{B}$ mit $U = \cup_i B_i$ gibt.*
- (iii) M ist lokal homöomorph zu \mathbb{R}^m , d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ um p , eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\kappa: U \rightarrow V$, so dass κ ein Homöomorphismus (bzgl. der durch \mathcal{T} auf U induzierten Topologie) ist. Die Abbildung κ heißt *Karte* von M um p .

Sind die Kartenwechsel zusätzlich glatt, d.h. für zwei Karten $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$, mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, ist

$$\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}: \kappa_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \kappa_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$$

glatt, so nennen wir die Menge \mathcal{A} aller dieser Karten einen *glatten Atlas* von M .

Auf der Menge der Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit führen wir eine Äquivalenzrelation ein: Seien \mathcal{A}_i glatte Atlanten für (M, \mathcal{T}) . Dann ist $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ gdw. $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ein glatter Atlas für (M, \mathcal{T}) ist.

Eine *glatte Mannigfaltigkeit* $(M, \mathcal{T}, [\mathcal{A}])$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{T}) zusammen mit einer Äquivalenzklasse von glatten Atlanten $[\mathcal{A}]$. Wir nennen $[\mathcal{A}]$ dann eine *differenzierbare Struktur* auf M .

Notation I.3.9. Da wir oft mit einem konkreten Atlas arbeiten, schreiben wir kurz: (M, \mathcal{A}) oder direkt M , wenn es keinen Zweifel an der differenzierbaren Struktur gibt, statt $(M, \mathcal{T}, [\mathcal{A}])$.

Beispiel I.3.10.

- (i) Jede Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist mit dem durch die Karten $\kappa := F^{-1}$ gebildeten Atlas eine glatte Mannigfaltigkeit: Die Topologie ist dabei die von \mathbb{R}^n (mit der Standardtopologie) induzierte Topologie. Die Standardtopologie auf \mathbb{R}^n ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis. Diese Eigenschaften vererben sich auf die induzierte Topologie. Die Karten erhält man direkt aus den lokalen Parametrisierungen $F: U \rightarrow V$, nämlich $\kappa := F^{-1}: V \cap M \rightarrow U$.

*Das ist das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Manche Leute lassen das weg, dann verliert man später einige für uns wichtige Eigenschaften, s. Abschnitt I.3.2. Auch folgt aus zweit-abzählbar direkt, dass M parakompakt ist, s. Bem. I.3.44.

Die Standardtopologie vom \mathbb{R}^n ist abzählbar: Wähle z.B. $\{B_{\frac{1}{i}}(a)\}_{a \in \mathbb{Q}^n, i \in \mathbb{N}}$.

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

(ii) Sei M eine topologische/glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Dann ist auch U mit der induzierten Topologie eine topologische/glatte Mannigfaltigkeit.

(iii) Der *reell projektive Raum* ist definiert als

$$\mathbb{RP}^n := \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum}\}.$$

Sei $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $p \in S^n \mapsto L_p \in \mathbb{RP}^n$, die Projektion, wobei L_p die Ursprungsgerade in \mathbb{R}^{n+1} durch p ist. Es gilt $\pi^{-1}(L_p) = \{\pm p\}$. Wir verwenden auf \mathbb{RP}^n die Quotiententopologie bzgl. π . Man überprüft leicht, dass \mathbb{RP}^n Hausdorff ist. Sei $\mathcal{A} = \{\kappa: U \rightarrow V\}$ ein glatter Atlas von S^n . O.B.d.A. können wir durch Verkleinern der Menge U annehmen, dass $\pi: U \rightarrow \pi(U)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist $\mathcal{A}' = \{\kappa \circ (\pi|_U)^{-1}: \pi(U) \rightarrow V\}$ auch ein Atlas von \mathbb{RP}^n und sogar glatt, da $(\kappa_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1}) \circ (\kappa_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1})^{-1} = \kappa_1 \circ (\pi|_{U_1} \circ (\pi|_{U_2})^{-1}) \circ \kappa_2^{-1} = \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ glatt ist.

Wir haben jetzt abstrakte (glatte) Mannigfaltigkeiten definiert. Nun wollen wir noch einführen, wann wir zwei Mannigfaltigkeiten als diffeomorph betrachten wollen:

Definition I.3.11. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $p \in M$. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *k-mal stetig differenzierbar* (oder C^k) in p , falls für eine Karte $(\kappa: U \rightarrow V)$ um p im Atlas von M und für eine Karte $(\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V})$ um $f(p)$ im Atlas von N gilt, dass

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: \kappa(f^{-1}(\tilde{U}) \cap U) \rightarrow \tilde{V}$$

in $\kappa(p)$ k -mal stetig differenzierbar ist. Ist $f: M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus und ist f und f^{-1} glatt, dann nennen wir f einen *Diffeomorphismus*.

Bemerkung I.3.12. Gilt Definition I.3.11 für ein Paar solcher Karten um p bzw. $f(p)$, so gilt es für alle solche Karten, da

$$\tilde{\kappa}' \circ f \circ (\kappa')^{-1} = \underbrace{(\tilde{\kappa}' \circ \tilde{\kappa}^{-1})}_{\text{Diffeo}} \circ (\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}) \circ \underbrace{(\kappa \circ (\kappa')^{-1})}_{\text{Diffeo}}.$$

Beispiel I.3.13. Wir betrachten zwei glatte Atlanten für \mathbb{R} (mit Standardtopologie): $\mathcal{A}_1 := \{\kappa_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{\kappa_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3\}$. Diese beiden Atlanten sind nicht äquivalent, da $\kappa_2^{-1} \circ \kappa_1$ nicht glatt ist. Also sind $[\mathcal{A}_1]$ und $[\mathcal{A}_2]$ zwei verschiedene differenzierbare Strukturen.

Betrachten wir weiterhin $f = \text{id}: M = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow N = (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$. Dann ist f kein Diffeomorphismus, da $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ keiner ist, aber $f: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$, $f(t) = t^{1/3}$, ist ein Diffeomorphismus, denn

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \kappa_1 \downarrow & & \downarrow \kappa_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \end{array}$$

I. Mannigfaltigkeiten

kommutiert. D.h. obwohl die beiden Atlanten auf \mathbb{R} verschiedene differenzierbare Strukturen definieren, sind die glatten Mannigfaltigkeiten diffeomorph.

Bemerkung I.3.14. Für $n \neq 4$ ist jede differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n diffeomorph zur Standard-Struktur, die durch $\mathcal{A} = \{\kappa = \text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ definiert ist. Für $n = 4$ gibt es allerdings überabzählbar viele differenzierbare Strukturen auf \mathbb{R}^4 , die paarweise nicht diffeomorph sind – so genannte exotische Strukturen*. Weiterhin hat Milnor 1956 bewiesen, dass es für $n \geq 7$ exotische n -dimensionale Sphären gibt (d.h. sie sind homöomorph zu S^n aber nicht diffeomorph). Von diesen exotischen Sphären† gibt es in jeder Dimension aber nur endlich viele. In Dimension 7 gibt es z.B. 28 verschiedene. Diese können alle als Untermannigfaltigkeit vom \mathbb{R}^{10} dargestellt werden – die Brieskorn-Sphären (1966): Für $k \in \{1, \dots, 28\}$

$$S_k^7 := \{(z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{C}^5 \cong \mathbb{R}^{10} \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0, |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die S_k^7 wirklich alle homöomorph sind. Um allerdings zu zeigen, dass sie nicht diffeomorph zueinander sind, benötigt man einiges an algebraischer Topologie.

Satz I.3.15. Seien M und A Mengen. Seien $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, $U_\alpha \subset M$ Teilmengen und $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ bijektive Abbildungen für $\alpha \in A$, so dass gilt

$$(i) (\{U_\alpha\} \text{ ist eine Überdeckung von } M) \cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M,$$

$$(ii) \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ ist offen in } \mathbb{R}^m \text{ für alle } \alpha, \beta \in A.$$

$$(iii) \kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}: \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ ist für alle } \alpha, \beta \in A \text{ stetig.}$$

Dann trägt M genau eine Topologie bzgl. derer alle U_α offene Mengen und alle κ_α Homöomorphismen (bzgl. der auf U_α durch \mathcal{T} induzierten Topologie) sind. Gibt es eine abzählbare Teilmenge $A_1 \subset A$ mit $\cup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M$, so besitzt diese Topologie auf M eine abzählbare Basis. Gibt es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein $\alpha \in A$, so dass $p, q \in U_\alpha$ ist, dann ist diese Topologie Hausdorffsch.

Der obige Satz erleichtert uns die Arbeit, wenn wir überprüfen wollen, ob eine Menge eine topologische (glatte) Mannigfaltigkeit ist. Es reicht einen geeigneten (im Sinne des letzten Satzes) Atlas anzugeben. Dann wird damit auf M eine Topologie induziert, die ggf. sogar Hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis besitzt. Nur die letzte Bedingung (für Hausdorff) ist ein bisschen unhandlich. So baut man i.A. keinen Atlas. Aber in konkreten Beispielen sieht man diese Hausdorff-Eigenschaft oft direkt.

Beweis. Das es genau eine solche Topologie gibt, haben wir schon in Beispiel I.3.6 gezeigt.

Abzählbare Basis Wegen Eindeutigkeit liefern A und A_1 dieselbe Topologie auf M . D.h. wir können o.B.d.A. annehmen, dass A schon abzählbar sei. Dann hat $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ eine

*<https://mathoverflow.net/questions/24970/exotic-differentiable-structures-on-r4>

†https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere

abzählbare Basis \mathcal{B}_α für alle $\alpha \in A$. Damit ist $\kappa_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$ eine abzählbare Basis von U_α und $\cup_{\alpha \in A} \kappa_\alpha^{-1}(\mathcal{B}_\alpha)$ eine abzählbare Basis von M .

Hausdorffsch Seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Sei $p, q \in U_\alpha$ für ein $\alpha \in A$. Dann ist $\kappa_\alpha(p) \neq \kappa_\alpha(q)$. Da $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ Hausdorffsch ist, gibt es $V_1, V_2 \subset V_\alpha$ mit $\kappa_\alpha(p) \in V_1$, $\kappa_\alpha(q) \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Damit trennen $\kappa_\alpha^{-1}(V_1)$ und $\kappa_\alpha^{-1}(V_2)$ die Punkte p und q . \square

Den letzten Satz könnte man auch als Grundlage für eine Definition einer glatten Mannigfaltigkeit nehmen. Von der Intuition ist das näher an dem, was wir uns für die Verallgemeinerung des Untermannigfaltigkeitsbegriffs überlegt haben, weil man nicht so künstlich erst mit einem topologischen Raum startet. Allerdings kann die Hausdorffforderung dann eher schlecht einbauen, wie man am letzten Satz am Ende sieht.

I.3.1. Tangentialraum und Tangentialabbildung

Für Untermannigfaltigkeiten sind Tangentialvektoren Vektoren im umliegenden Raum \mathbb{R}^n . Bei abstrakten Mannigfaltigkeiten haben wir keinen umliegenden Raum mehr. Wollen wir das Konzept der Tangentialvektoren jedoch verallgemeinern (und das wollen wir, um später auch Tangentialabbildungen zu verallgemeinern) brauchen wir eine andere Definition. In Bemerkung I.2.4 haben wir gesehen, dass jeder Tangentialvektor einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ als Geschwindigkeitsvektor einer Kurve in M realisiert wird. Dies ist unser Ansatzpunkt für die Definition von Tangentialvektoren an Mannigfaltigkeiten. Kurven repräsentieren Tangentialvektoren. Allerdings müssen wir beachten, dass verschiedene Kurven durch p in p den gleichen Geschwindigkeitsvektor haben können. Um eine Äquivalenzrelation für 'gleiche Geschwindigkeitsvektoren' einzuführen, nutzen wir wieder die Karten, denn im \mathbb{R}^m können wir ableiten:

Definition I.3.16. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Ein *Tangentialvektor* an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von glatten Kurven $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\epsilon > 0$ und $c(0) = p$, wobei zwei solcher Kurven c_1 und c_2 äquivalent seien, falls für eine Karte $\kappa: U \rightarrow V$ mit $p \in U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_2).$$

Für die Äquivalenzklasse von c schreiben wir $[c]_p$. Die Menge

$$T_p M := \{[c]_p \mid c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ glatt, } c(0) = p\}$$

heißt *Tangentialraum* von M im Punkt p .

Bemerkung I.3.17. (i) Die Definition des Tangentialvektors hängt nicht von der gewählten Karte ab: Sei $\kappa': U' \rightarrow V'$, $p \in U'$, eine zweite Karte. Dann ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ c)) = D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c)\right).$$

Sind also zwei Kurven bzgl. κ in der gleichen Äquivalenzklasse so auch bzgl. κ' .

I. Mannigfaltigkeiten

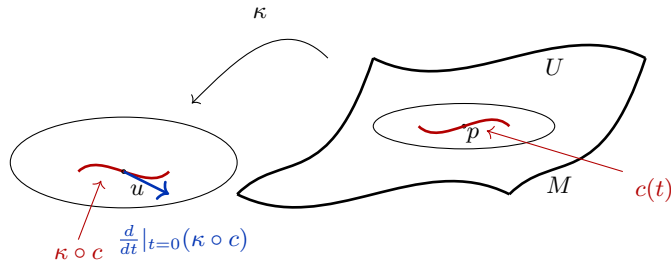


Abb. I.8.: Tangentialvektor

(ii) Für Untermannigfaltigkeiten hatten wir neben dem Tangentialvektoren auch noch Normalenvektoren definiert. Dazu braucht man aber einen umliegenden Raum – das ist also kein Begriff für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Bis jetzt ist $T_p M$ nur eine Menge. Wir wollen aber, wie es auch bei Untermannigfaltigkeiten gilt, $T_p M$ mit einer geeigneten Vektorraumstruktur versehen, auch um damit auch weiter rechnen zu können. Dazu bilden wir $T_p M$ erst einmal geeignet auf den \mathbb{R}^m ab:

Lemma I.3.18. Sei M^m glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\kappa: U \rightarrow V$ Karte von M mit $p \in U$. Dann ist die Abbildung

$$d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, [c]_p \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa \circ c)$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Wohldefiniertheit und Injektivität folgt aus der Definition der Äquivalenzklassen $[c]_p$. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Setze $c: t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv) \in M$, wobei wir $\epsilon > 0$ so klein wählen, dass $\kappa(p) + tv \in V$ liegt, vgl. auch Abbildung I.8. Dann gilt

$$d_p \kappa([c]_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa \circ \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa(p) + tv) = v. \quad \square$$

Vorl. 6 - 2.11.

Definition I.3.19. Sei $[c_i]_p \in T_p M$, $i = 1, 2$, sei κ eine Karte um p . Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a[c_1]_p + b[c_2]_p := (d_p \kappa)^{-1} (a d_p \kappa([c_1]_p) + b d_p \kappa([c_2]_p)).$$

Mit dieser Operation versehen ist $T_p M$ ein Vektorraum.

Bemerkung I.3.20. (i) Obige Definition ist die eindeutige Vektorraumstruktur für die $d_p \kappa$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Wir schreiben analog zum Fall der Untermannigfaltigkeiten $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$ kurz

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p := d_{\kappa(p)} \kappa^{-1}(e_i) = [\kappa^{-1}(\kappa(p) + te_i)]_p.$$

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Die $\frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ bilden eine Basis von T_pM .

- (ii) Die Vektorraumstruktur hängt nicht von der Wahl der Karte ab: Sei κ' eine weitere Karte um p . Wir müssen zeigen, dass auch $d_p\kappa': T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Das folgt aus

$$d_p\kappa' = d_p(\kappa' \circ \kappa^{-1} \circ \kappa) = D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ d_p\kappa.$$

Da $\kappa' \circ \kappa^{-1}$ ein Diffeomorphismus und damit $D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1})$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

- (iii) Für Untermannigfaltigkeiten: Für eine lokale Parametrisierung $F: U \rightarrow V$ um p ist $\kappa := F^{-1}|_{V \cap M}$ eine Karte um $p = F(u)$ und damit

$$\begin{aligned} T_pM^{\text{def. für Untermannigfaltigkeiten}} &= D_u F(\mathbb{R}^m) \\ &= (d_p\kappa)^{-1}(\mathbb{R}^m) = T_pM^{\text{def. für abstrakte Mannigfaltigkeiten}}. \end{aligned}$$

Satz I.3.21. Sei M^m eine Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{A} = \{\kappa: U^\kappa \rightarrow V^\kappa\}$ ein glatter Atlas* von M . Die Menge $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ trägt eine Topologie, so dass $\mathcal{A}' = \{d\kappa | \kappa \text{ Karte von } M\}$ einen glatten Atlas auf TM definiert, wobei

$$d\kappa: U^{d\kappa} = \bigsqcup_{p \in U^\kappa} T_pM \rightarrow V^{d\kappa} := V^\kappa \times \mathbb{R}^m, \quad (p, v) \mapsto (\kappa(p), d_p\kappa(v))$$

ist. Damit ist TM eine $2m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

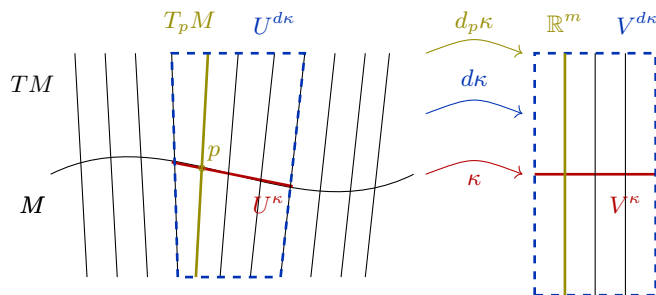


Abb. I.9.: Karte von TM . Während die rechte Menge ein wirkliches Produkt $V^\kappa \times \mathbb{R}^m$ ist, ist das linke Bild eher als schematisches Bild von TM zu verstehen: T_pM ist ein abstrakter Raum von Äquivalenzklassen und p liegt erst einmal nicht in T_pM . Aber die Äquivalenzklasse $[t \mapsto p]_p \in T_pM$ der konstanten Kurve in p (also der Nullvektor in T_pM) kann mit dem Punkt $p \in M$ identifiziert werden.

*Bei uns sind alle Atlanten glatt, so dass wir das in Zukunft nicht mehr dazu sagen.

I. Mannigfaltigkeiten

Beweis. Wir wollen Satz I.3.15 anwenden und überprüfen dazu erst einmal die Voraussetzungen: (i) gilt, da $TM = \cup_{\kappa \in \mathcal{A}} U^{d\kappa}$. (ii) folgt, da

$$d\kappa_\alpha(U^{d\kappa_\alpha} \cap U^{d\kappa_\beta}) = \kappa_\alpha(U^{\kappa_\alpha} \cap U^{\kappa_\beta}) \times \mathbb{R}^m$$

offen in \mathbb{R}^{2m} ist. Der Kartenwechsel

$$\begin{aligned} d\kappa_\beta \circ (d\kappa_\alpha)^{-1}(u, w) &= d\kappa_\beta(\kappa_\alpha^{-1}(u), d_u \kappa_\alpha^{-1}(w)) \\ &= (\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}(u), d_{\kappa_\alpha^{-1}(u)} \kappa_\beta d_u \kappa_\alpha^{-1}(w)) \\ &= ((\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})(u), d_u(\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})(w)) \end{aligned}$$

ist glatt und damit insbesondere stetig. Damit trägt TM genau eine Topologie, für die die $d\kappa$ Homöomorphismen und wegen obiger Glattheit sogar Diffeomorphismen sind. Abzählbare Basis folgt aus abzählbarem Atlas. Hausdorff überprüft man leicht. \square

Beispiel I.3.22. TS^1 ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$, aber TS^2 ist nicht mal homöomorph zu $S^2 \times \mathbb{R}^2$ (Folgt aus differentialtopologischen Argumenten, vgl. auch mit dem Satz vom Igel.)

Bemerkung I.3.23. Die Fußpunktabbildung

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p$$

ist glatt, da

$$\kappa \circ \pi \circ (d\kappa)^{-1}: V^{d\kappa} = V^\kappa \times \mathbb{R}^m \rightarrow V^\kappa, \quad (u, w) \xrightarrow{(d\kappa)^{-1}} (\kappa^{-1}(u), d_u \kappa^{-1}(w)) \xrightarrow{\pi} \kappa^{-1}(u) \xrightarrow{\kappa} u$$

glatt ist.

Beispiel I.3.24. Ein *glattes Vektorfeld** ist eine glatte Abbildung

$$X: M \rightarrow TM \quad \text{mit } X(p) \in T_p M \quad (\text{anders gesagt: } \pi(X(p)) = p).$$

Sei $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte von M . Dann wird ein Vektorfeld X auf U durch Funktionen $X^1, \dots, X^m: V \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben:

$$X(p) = X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p.$$

Was bedeutet die Glattheit für X für die lokale Darstellung? Ist $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte um M , dann betrachten wir $d\kappa: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$ als Karte um $X(p)$:

*Bei Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten hatten wir das Zusatzadjektiv tangential oder normal. Da es nun keinen umliegenden Raum mehr geben muss, sind alle Vektorfelder automatisch tangential per Definition.

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM & & \\
 \cup & & \cup & & \\
 p = \kappa^{-1}(v) \in U & \xrightarrow{X|_U} & TU & & \\
 \kappa \downarrow & & d\kappa \downarrow & & \\
 v \in V & \xrightarrow{d\kappa \circ X|_{U \circ \kappa^{-1}}} & V \times \mathbb{R}^m & \ni (v, X^1(v), \dots, X^n(v)) & \\
 \cap & & \cap & & \\
 \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & &
 \end{array}$$

Also ist X in p genau dann glatt, wenn die X^i in $v = \kappa(p)$ glatt sind. Insbesondere ist damit $\frac{\partial}{\partial u^i}: U \rightarrow TU$, $p \mapsto \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ ein glattes Vektorfeld auf U .

Bei Kartenwechsel? Seien $\kappa: U \rightarrow V$ und $\bar{\kappa}: U' \rightarrow V'$ zwei Karten von M mit $p \in U \cap U'$. Seien (x^1, \dots, x^m) bzw. (y^1, \dots, y^m) Koordinaten auf V bzw. V' . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^i}|_p &= d_{\bar{\kappa}(p)} \bar{\kappa}^{-1}(e_i) = d_{\bar{\kappa}(p)}(\kappa^{-1} \circ \kappa \circ \bar{\kappa}^{-1})(e_i) = d_{\kappa(p)} \kappa^{-1} \circ d_{\kappa(p)}(\kappa \circ \bar{\kappa}^{-1})(e_i) \\
 &= d_{\kappa(p)} \kappa^{-1} \left(\frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} e_j \right) = \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} d_{\kappa(p)} \kappa^{-1}(e_j) \\
 &= \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \tag{I.3}
 \end{aligned}$$

wobei $d_{\kappa(p)}(\kappa \circ \bar{\kappa}^{-1}) = \left(\frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i} \Big|_{\bar{\kappa}(p)} \right)_i^j = t_i^j$ die Transformationsmatrix ist.

Kurzschreibweise: $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ (Insbesondere werden dabei die Karten direkt mit x und y , also wie die Koordinaten bezeichnet.)

Wir bezeichnen die Menge aller glatten Vektorfelder auf M mit $\mathfrak{X}(M)$ und mit $C^\infty(M)$ die Menge aller glatten reellwertigen Funktionen auf M . Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$, dann ist $fX \in \mathfrak{X}(M)$ mit $(fX)(p) := f(p)X(p)$.

Satz und Definition I.3.25. Die *Tangentialabbildung*

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad [c]_p \mapsto [f \circ c]_{f(p)}$$

für $f \in C^\infty(M)$ ist wohldefiniert und linear. Die Abbildung $d_p f$ heißt das *Differential* oder die *Tangentialabbildung* von f im Punkt p und $d_p f([c]_p)$ die *Richtungsableitung* von f in Richtung $c'(0) := [c]_p$ im Punkt p .

Beweis. Wohldefiniertheit und Linearität rechnet man mit Hilfe der Definition von $[c]_p$ und Definition I.3.19 direkt nach. \square

I. Mannigfaltigkeiten

Lemma I.3.26. (ÜA 10)

(i) $d_p \text{id}_M = \text{id}_{T_p M}$

(ii) Es gilt die Kettenregel $d_p(f \circ g) = d_{g(p)}f \circ d_p g$.

(iii) Die Abbildung $df: TM \rightarrow TN$, $(p \in M, v \in T_p M) \mapsto (f(p) \in N, d_p f(v) \in T_{f(p)}N)$ ist glatt.

Folgerung I.3.27. Sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zweier glatter Mannigfaltigkeiten. Sei $X: M \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld. Dann ist $df(X): N \rightarrow TN$, $q \mapsto d_{f^{-1}(q)}(X(f^{-1}(q)))$ wieder ein glattes Vektorfeld.

Beweis. Da df und X glatt sind, ist auch $df(X)$ glatt. Nach Definition ist $df(X)(q) \in T_q N$. \square

Bemerkung I.3.28. (Tangentialabbildung in lokalen Koordinaten) Sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Sei κ eine Karte von M um p mit lokalen Koordinaten u^i und sei $\tilde{\kappa}$ eine Karte von N um $f(p)$ mit lokalen Koordinaten \tilde{u}^j .

Dann ist

$$d_p f \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) = d_p f \left(d_{\kappa(p)} \kappa^{-1}(e_i) \right) = d_{\kappa(p)}(f \circ \kappa^{-1})(e_i) = \frac{\partial(\tilde{\kappa}^j \circ f \circ \kappa^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\kappa(p)} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} \Big|_{f(p)}.$$

Zum Vergleich: Ist $M = \mathbb{R}^m$ und $N = \mathbb{R}^n$ und u^i bzw. \tilde{u}^i die jeweiligen Standardkoordinaten darauf, dann ist $d_p f \left(e_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} \Big|_{f(p)}$.

Lemma I.3.29. Ist $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus glatter Mannigfaltigkeiten, so ist

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere ist $\dim T_p M = \dim T_{f(p)} N$ und $\dim M = \dim N$.

Beweis. Linearität ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Umkehrabbildung gibt: Mittels der Kettenregel erhalten wir

$$\text{id}_{T_p M} = d_p \text{id}_M = d_p(f^{-1} \circ f) = d_{f(p)} f^{-1} \circ d_p f.$$

Analog erhält man $d_p f \circ d_{f(p)} f^{-1} = \text{id}_{T_{f^{-1}(p)} M}$. Damit gilt $d_{f(p)} f^{-1} = (d_p f)^{-1}$ \square

Es gilt lokal auch die Umkehrung:

Satz I.3.30 (Umkehrsatz). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $p \in M$. Sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Falls $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Vektorraumisomorphismus ist, so existieren eine offene Umgebung U von p in M und eine offene Umgebung U' von $f(p)$ in N , so dass $f|_U: U \rightarrow U'$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweisidee. Man benutzt Karten und den Umkehrsatz im \mathbb{R}^m .

I.3.2. Ist der Begriff der Mannigfaltigkeit wirklich allgemeiner?

Nein, wir werden sehen, dass jede glatte Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n ist, wobei n i.A. sehr groß sein muss. Dazu werden wir zunächst den Begriff der Einbettung kennenlernen.

Vorl. 7 - 06.11.

Einbettungen

Sei M eine glatte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei M diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gibt einen Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$. Wir wollen nun die Frage untersuchen, wann das Bild einer glatten Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Das wird auf den Begriff der Einbettung führen.

Da das Bild $f(M)$ i.A. nicht offen in \mathbb{R}^n ist, ist die Ableitung $d_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^n$ meist kein Isomorphismus. Da aber f ein Diffeomorphismus aufs Bild werden soll, muss $d_x f$ zumindest injektiv sein. Falls dem so ist, nennt man f eine *Immersion in x* . Ist f eine Immersion in allen $x \in M$, so nennt man f eine *Immersion*.

Beispiel I.3.31. Die *kanonische Immersion* von \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^l mit $l \geq k$ ist die Standardinklusionsabbildung $(x^1, \dots, x^k) \mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$.

Satz I.3.32 (Satz über lokale Immersionen). *Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion in $x \in M$ und sei $y = f(x)$. Dann gibt es lokale Koordinaten um x und y , so dass $f(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. (Kurz gesagt: f ist lokal äquivalent zur kanonischen Immersion in x .)*

Hierbei ist $f(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ kurz für $\tilde{\kappa} \circ f \circ \tilde{\kappa}(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$, wobei κ bzw. $\tilde{\kappa}$ die zu den Koordinaten x^i bzw. y^i gehörige Karte ist.

Beweis. Wir wählen lokale Koordinaten um $x \in M$ und $y = f(x) \in N$: $\kappa: U \rightarrow V$ mit $\kappa(x) = 0$ und $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ mit $\tilde{\kappa}(y) = 0$. Wir setzen $g := \tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$. Da $d_x f$ und damit $d_0 g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist, können wir durch einen Basiswechsel in \mathbb{R}^n immer erreichen, dass $d_0 g$ die Form der $n \times m$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_m \\ 0_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}$$

hat. Wir definieren $G: V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $G(x, z) = g(x) + (0, z)$. Dann bildet G eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n ab und $d_0 G = \text{Id}_n$. Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist damit G ein lokaler Diffeomorphismus in $0 \in \mathbb{R}^n$. Nach Definition von G gilt $g = G \circ (\text{kanonische Immersion})$. Da $\tilde{\kappa}^{-1} \circ G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ergibt er durch Einschränken von Definitions- und Wertebereich eine neue Karte um y bzgl. derer dann f die kanonische Immersion ist. \square

Folgerung I.3.33. *Ist f eine Immersion in x , dann ist f auch eine Immersion in einer Umgebung von x . (Immersion-Sein ist eine offene Eigenschaft, d.h. gilt es in einem Punkt, dann auch in einer Umgebung dieses Punktes.)*

I. Mannigfaltigkeiten

Bemerkung I.3.34. Haben M und N die gleiche Dimension, dann ist $f: M \rightarrow N$ genau dann eine Immersion, wenn f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Immersion zu sein ist eine strikt lokale Eigenschaft. Im Gegensatz dazu ist Diffeomorphismus zu sein etwas Globales. f ist genau dann Diffeomorphismus, wenn f lokaler Diffeomorphismus und bijektiv ist. Das heißt auch: Will man, dass die Immersion schöne globale Eigenschaften hat, braucht man zusätzlich topologische Bedingungen. Wir haben das schon am Beispiel der Untermannigfaltigkeiten gesehen, vgl. Definition I.1.1 gesehen. Z.B. ist eine reguläre injektive Kurve $c: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t \rightarrow 2} c(t) = c(1)$ keine Einbettung und das Bild von c keine Untermannigfaltigkeit.

Definition I.3.35. Eine Immersion $f: M \rightarrow N$, die M homöomorph auf ihr Bild abbildet, heißt *Einbettung*.

Folgerung I.3.36. Sei $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann ist $f(M)$ eine zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $y \in f(M)$. Dann gibt es ein eindeutiges $x \in M$ mit $f(x) = y$. Sei $\kappa: U \rightarrow V$ eine lokale Karte von M um x . Dann ist $f \circ \kappa^{-1}: V \rightarrow V'$ als Hintereinanderausführung von Immersionen wieder eine Immersion, als Hintereinanderausführung von Homöomorphismen aufs Bild wieder Homöomorphismus aufs Bild mit $f(\kappa^{-1}(V)) = f(U \cap M) = V' \cap f(M)$. Also ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N mit Dimension m . Da eine Immersion zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, ein lokaler Diffeomorphismus ist und f homöomorph aufs Bild ist, ist $f(M)$ diffeomorph zu M . \square

Die letzte Folgerung gilt ganz analog mit einer Mannigfaltigkeit N statt \mathbb{R}^n - aber wir haben bis jetzt noch nicht definiert, was eine Untermannigfaltigkeit einer beliebigen Mannigfaltigkeit ist.

Oft können wir die Bedingung 'homöomorph aufs Bild' in der letzten Folgerungen nur durch injektiv ersetzen, wenn zusätzlich noch eine topologische Bedingung gilt:

Definition I.3.37. Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von U eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. für alle $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_X$ mit $\cup_{U \in \mathcal{U}} U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ mit $\cup_{U \in \mathcal{V}} U = X$.

Für Mannigfaltigkeiten impliziert Kompaktheit insbesondere, dass endliche viele Karten reichen, um die Mannigfaltigkeit zu überdecken.

Definition I.3.38. Eine Abbildung heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Teilmengen wieder kompakt sind.

Jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ mit M kompakt ist eigentlich, s. ÜA 16.

Satz I.3.39. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(i) Ist M kompakt, dann ist $f: M \rightarrow N$ genau dann eine Einbettung, wenn f eine injektive Immersion ist.

(ii) Jede eigentliche injektive Immersion ist eine Einbettung.

Beweis. ÜA 16 \square

Der Whitney'sche Einbettungssatz

Satz I.3.40 (Whitneyscher Einbettungssatz). *Jede m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M kann in den \mathbb{R}^{2m} eingebettet werden, d.h. es gibt eine Einbettung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$.*

Für diese Aussage braucht man die Abzählbarkeitsforderung in der Definition der glatten Mannigfaltigkeit, s.u.

Wir werden hier nur eine leichtere Version beweisen (allgemeiner Beweis in [Whi57, Kapitel IV.A]):

Satz I.3.41. *Jede m -dimensionale kompakte glatte Mannigfaltigkeit M kann in einen \mathbb{R}^n eingebettet werden.*

Dafür brauchen wir noch ein wichtiges technisches Hilfsmittel:

Definition I.3.42 (Partition der Eins). Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige (nicht notwendigerweise abzählbare) Überdeckung von M . Eine der Überdeckung untergeordnete glatte Zerlegung der Eins ist eine Familie $(\rho_i: M \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$ von glatten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Zu jedem $i \in I$ ist $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$.
- (ii) Jeder Punkt in M besitzt eine Umgebung, auf der fast alle ρ_i verschwinden.
- (iii) Es gilt $\rho_i \geq 0$ für alle $i \in I$ und

$$\sum_i \rho_i = 1.$$

'Fast alle' bedeutet alle bis auf endlich viele. Das ist wichtig, damit (iii) eine sinnvolle Bedingung ist. Wegen (ii) ist für alle $p \in M$ der Ausdruck $\sum_i \rho_i(p)$ eine endliche Summe und somit als solche auswertbar.

Satz I.3.43. *Zu jeder offenen Überdeckung von M gibt es eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Beweis. siehe [AE01, XI Satz 1.20] □

Bemerkung I.3.44. (Zum zweiten Abzählbarkeitsaxiom in der Mannigfaltigkeitsdefinition) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert insbesondere, dass die Mannigfaltigkeit parakompakt ist. Ein topologischer Raum ist *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt. Hierbei ist eine *Verfeinerung* einer offenen Umgebung $\cup_i U_i$ eine neue Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, wobei jede Menge V_j in mindestens einer Menge U_i enthalten sein muss. *Lokal endlich* bedeutet, dass es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung gibt, die nur endlich viele Mengen V_j schneidet.

Für jeden parakompakten topologischen Raum gilt der letzte Satz, wenn man in der Definition der Partition der Eins nur Stetigkeit der ρ_i fordert (da i.A. glatt nicht definiert ist).

I. Mannigfaltigkeiten

Es gibt aber Situationen, in denen es Sinn macht, für Mannigfaltigkeiten weniger als das zweite Abzählbarkeitsaxiom zu fordern, z.B. wenn man eine Familie von Mannigfaltigkeiten als eine neue Mannigfaltigkeit betrachten will. Ist diese Familie überabzählbar, dann verliert man so das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann fordert man i.A. nur das *erste Abzählbarkeitsaxiom*: Jeder Punkt hat eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis, d.h.: Ist $p \in M$, so gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\{U_1, U_2, \dots\}$ von Umgebungen von p , so dass es zu jeder Umgebung V von p einen Index k gibt, so dass $U_k \subset V$.

Eine solche Situation wird bei uns aber keine Rolle spielen.

Beweis von Satz I.3.41. Sei $\mathcal{A} = \{\kappa_i: U_i \rightarrow V_i\}$ ein Atlas von M . Da M kompakt ist, können wir den Atlas endlich wählen: $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Die Idee ist die Karten zu nutzen und die Kartenstücke jeweils in einen \mathbb{R}^m -Untervektorraum von \mathbb{R}^n einzubetten. Damit diese sich nicht überschneiden, werden einfach immer pro Karte verschiedene Koordinaten des \mathbb{R}^n gewählt ($n \sim 2\nu$). Damit dann alles glatt wird benutzen wir noch die Zerlegung der Eins.

Sei ρ_i eine zu $(U_i)_{i=1, \dots, \nu}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir setzen $f_i(p) = \rho_i(p)\kappa_i(p)$. Die f_i sind wohldefiniert auf ganz M , da außerhalb des Definitionsbereichs von κ_i die Funktion ρ_i konstant Null ist. Wir definieren $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n:=\nu(m+1)}$ durch

$$p \mapsto (\rho_1(p), f_1(p), \rho_2(p), f_2(p), \dots, \rho_\nu(p), f_\nu(p))^T$$

- Stetigkeit von f ist klar.
- f ist glatt, denn $f \circ \kappa_i^{-1}: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$x \mapsto ((\rho_1 \circ \kappa_i^{-1})(x), (f_1 \circ \kappa_i^{-1})(x) = (\rho_1 \circ \kappa_i^{-1})(x)(\kappa_1 \circ \kappa_i^{-1})(x), \dots)^T$$

- Die Abbildung f ist injektiv: Seien $p, q \in M$ mit $f(p) = f(q)$. Dann gilt $\rho_i(p) = \rho_i(q)$ für $i = 1, \dots, \nu$. Es gibt ein i_0 mit $\rho_{i_0}(p) > 0$. Wegen $\rho_{i_0}(p)\kappa_{i_0}(p) = \rho_{i_0}(q)\kappa_{i_0}(q)$ folgt $p = q$.
- Da f stetig ist und bijektiv aufs Bild ist und da M kompakt ist, ist $f: M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus. Damit ist $f(M)$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Es bleibt zu zeigen, dass $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Nach Folgerung I.3.36 reicht es zu zeigen, dass $d_p f$ für alle $p \in M$ injektiv ist.
- $d_p f$ ist eine Immersion (also injektiv) für jedes $p \in M$: Es ist

$$d_p f(v) = (d_p \rho_\nu(v), d_p \rho_1(v)\kappa_1(x) + \rho_1(x)d_p \kappa_1(v), \dots, \\ d_p \rho_\nu(v), d_p \rho_\nu(v)\kappa_\nu(x) + \rho_\nu(x)d_p \kappa_\nu(v)).$$

Sei i so, dass $\rho_i(p) > 0$ ist. Sei weiterhin $v \in T_p M$ mit $d_p f(v) = 0$. Dann folgt $d_p \rho_i(v) = 0$ und damit $\rho_i(p)d_p \kappa_i(v) = 0$, also $d_p \kappa_i(v) = 0$. Da $d_p \kappa_i: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorraumisomorphismus ist, folgt $v = 0$. Damit ist $d_p f$ injektiv. \square

I.3.3. Konstruktion von Mannigfaltigkeiten - Quotienten

Vorl. 8 - 09.11.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass der Begriff der glatten Mannigfaltigkeit gar nicht allgemeiner ist als der einer Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n . Da stellt sich natürlich die Frage, warum man nicht nur Untermannigfaltigkeiten betrachtet. Ein Grund liegt darin, wie Mannigfaltigkeiten gegeben sind bzw. entstehen können. Ist eine Mannigfaltigkeit z.B. als Nullstellenmenge von Funktionen gegeben, macht es natürlich Sinn diese direkt als Untermannigfaltigkeit aufzufassen. Aber nicht alle Mannigfaltigkeiten kommen direkt so her und dann ist es i.A. schwierig erst einmal eine Einbettung in einen \mathbb{R}^n zu konstruieren und man gewinnt dann auch nicht viel. Eine Art, wie Mannigfaltigkeiten entstehen können, ist als Quotienten von anderen Mannigfaltigkeiten. Wir haben mit dem $\mathbb{R}P^n$ schon ein solches Beispiel kennengelernt und werden jetzt eine allgemeinere Quotientenkonstruktionen sehen.

Zuvor erst noch zwei trivialere Möglichkeiten aus schon bekannten Mannigfaltigkeiten neue zu konstruieren:

Zum einen ist die disjunkte Vereinigung zweier Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension in kanonischer Weise wieder eine Mannigfaltigkeit. Zum anderen können wir Produkte bilden.

Satz I.3.45. *Das Produkt $M \times N$ einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit N ist eine $(m + n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweisskizze. Sei $(p, q) \in M \times N$. Wähle Karten $\kappa: U \rightarrow V$ in M um p und $\kappa': U' \rightarrow V'$ in N um q . Dann ist $\kappa \times \kappa': U \times U' \rightarrow V \times V'$, $(r, s) \mapsto (\kappa(r), \kappa'(s))$ Karte um (p, q) . \square

Nun zu Quotienten: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei G eine Gruppe und

$$\rho: G \rightarrow \text{Homöo}(M)$$

ein Gruppenhomomorphismus, wobei $\text{Homöo}(M)$ die Gruppe der Homöomorphismen von M zusammen mit der Hintereinanderausführung ist. Abkürzend schreiben wir: $g \cdot p := g(p) := \rho(g)(p)$. Man sagt G *wirkt auf* M .

Beispiel I.3.46.

1. $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $G = \mathbb{Z}_2$ mit

$$\rho(g)(x) = \begin{cases} x & g = 0 \\ -x & g = 1 \end{cases}$$

2. $M = \mathbb{R}^1$, $G = \mathbb{Z}_2$, ρ wie oben.

$$\begin{array}{c} \rho(1) \\ \curvearrowright \\ \begin{array}{ccc} -x & 0 & x \\ = 1 \cdot (-x) & = 0 \cdot 0 & = 0 \cdot x \\ & = 1 \cdot 0 & \end{array} \end{array}$$

I. Mannigfaltigkeiten

3. $M = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit

$$g \cdot (x, y) = \begin{cases} (x, y) & g = (0, 0) \\ (-x, y) & g = (1, 0) \\ (x, -y) & g = (0, 1) \\ (-x, -y) & g = (1, 1) \end{cases}$$

4. S^1 wirkt auf S^2 durch Rotation um die z -Achse.

Definition I.3.47. Für $p \in M$ bezeichne

$$[p] := \{g \cdot p \mid g \in G\}$$

die *Bahn* oder den *Orbit* von p unter der Gruppenwirkung ρ von G . Der *Orbitraum* ist definiert als

$$M/G := \{[p] \mid p \in M\}$$

mit der kanonischen Projektion $\pi: M \rightarrow M/G$, $p \mapsto [p]$. Die durch π induzierte Quotiententopologie auf M/G bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{M/G}$.

Zu Beispiel I.3.46: M/G ist gleich $\mathbb{R}P^n$, $[0, \infty)$, $[0, \infty)^2$ bzw. $[-1, 1]$.

Wir wollen hinreichende Bedingungen an die Gruppenwirkung finden, so dass M/G wieder eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Definition I.3.48. Eine Gruppe G wirkt *frei* auf M , falls $g \cdot p \neq p$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ und alle $p \in M$ ist.

Eine Gruppe G wirkt *eigentlich diskontinuierlich* auf M , falls für alle kompakten Teilmengen $K \subset M$ nur endlich viele Gruppenelemente $g_1, \dots, g_{N_K} \in G$ existieren mit $g_i(K) \cap K \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq N_K$.

Zu Beispiel I.3.46: 1. ist frei und eigentlich diskontinuierlich, 2. und 3. sind nicht frei aber eigentlich diskontinuierlich und 4. ist weder frei noch eigentlich diskontinuierlich.

Satz I.3.49. *Es sei M eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\rho: G \rightarrow \text{Homö}(M)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wirkt die Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf M , so ist der Orbitraum $(M/G, \mathcal{T}_{M/G})$ eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.**

Beweis. Direkt aus der Definition von $\mathcal{T}_{M/G}$ folgt: π stetig und $\mathcal{T}_{M/G}$ hat abzählbare Basis.

Weiterhin gilt:

*Es gibt eine Version dieses Satzes für Liegruppen (vgl. ÜB 5 für die Definition und Beispiele), z.B. wenn $S^1 \cong U(1)$ auf $S^1 \times S^1$ durch Drehung in der ersten Komponente wirkt:

Satz. Es sei M eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit auf der eine Liegruppe G frei und eigentlich wirkt. Dann ist M/G eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Gruppenwirkung heißt *eigentlich*, falls für die Abbildung $G \times M \rightarrow M \times M$, $(g, m) \mapsto (m, g \cdot m)$ Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

I.3. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

- (a) Für $U \subset M$ gilt: $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g \in G} g(U)$. Damit ist π insbesondere offen, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab.
- (b) Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U_p von p mit $U_p \cap g(U_p) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$:

Sei $p \in M$ und K_p eine kompakte Umgebung von p (d.h. es gibt eine offene Umgebung von p deren Abschluss K_p kompakt ist.) Da G eigentlich diskontinuierlich wirkt, gibt es nur endlich viele Gruppenelemente $g_1 = e, g_2, \dots, g_N$ mit

$$K_p \cap g_i(K_p) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, N.$$

Im Fall $N = 1$ folgt die Behauptung mit U_p gleich dem Inneren von K_p . Sei $N \geq 2$. Da G frei wirkt, ist $g_i \cdot p \neq p$ für $g_i \neq e$. Da M Hausdorffsch ist, können wir die Punkte trennen: d.h. es gibt für $i \neq 1$ Umgebungen U_i von p und U'_i von $g_i \cdot p$ mit $U_i \cap U'_i = \emptyset$. O.B.d.A. sei $U_i \subset K_p$ und $g_i(U_i) \subset U'_i$ (das kann immer erreicht werden, indem man U_i durch $U_i \cap g_i^{-1}(U'_i \cap g_i(\text{Inneres}(K_p)))$, noch immer offene Umgebung von p , ersetzt). Setzen wir

$$U_p := \cap_{i=1}^N U_i,$$

dann ist U_p eine offene Umgebung von p . Weiterhin gilt für $i \in \{1, \dots, N\}$

$$U_p \cap g_i(U_p) \subset U_i \cap g_i(U_i) \subset U_i \cap U'_i = \emptyset$$

und für $g \in G \setminus \{g_1, \dots, g_N\}$

$$U_p \cap g(U_p) \subset K_p \cap g(K_p) = \emptyset.$$

- (c) M/G ist Hausdorff: Seien $q = \pi(\hat{q})$ und $p = \pi(\hat{p})$ mit $p \neq q$ gegeben. Dann ist $\hat{q} \neq g \cdot \hat{p}$ für alle $g \in G$. Sei K eine kompakte Umgebung von \hat{p} und \hat{q} . Dann gibt es nur endlich viele $g_i \in G$, $i = 1, \dots, m$, mit $g_i \cdot K \cap K \neq \emptyset$.

Für jedes $g \in G$ seien $U_{\hat{q}}^g$ und $U_{g \cdot \hat{p}}$ offene Umgebungen von \hat{q} bzw. $g \cdot \hat{p}$, die diese Punkte trennen (möglich, da M Hausdorff). O.B.d.A. können wir wie in (b) annehmen, dass diese Umgebungen klein genug sind, dass $U_{\hat{q}}^g \subset \text{Inneres}(K)$ und $U_{g \cdot \hat{p}} \subset g \cdot \text{Inneres}(K)$ gilt, sowie $g_i^{-1} \cdot U_{g_i \cdot \hat{p}} \subset U_{e \cdot \hat{p}}$ für $i = 1, \dots, m$.

Wir setzen $U_{\hat{q}} = \cap_{i=1}^m U_{\hat{q}}^{g_i}$ und $U_{\hat{p}} = \cap_{i=1}^m g_i^{-1} \cdot U_{g_i \cdot \hat{p}}$. Dann sind $U_{\hat{q}}$ und $U_{\hat{p}}$ offene Umgebungen von \hat{q} bzw. \hat{p} , so dass $\pi(U_{\hat{q}})$ und $\pi(U_{\hat{p}})$ disjunkte offene Umgebungen von q und p sind, denn: Sei $x \in \pi(U_{\hat{q}}) \cap \pi(U_{\hat{p}})$. Nach (a) gibt es dann $g, h \in G$ mit $g \cdot U_{\hat{q}} \cap h \cdot U_{\hat{p}} \neq \emptyset$. Also gibt es ein $y \in U_{\hat{q}} \cap (g^{-1}h) \cdot U_{\hat{p}} \subset K \cap (g^{-1}h) \cdot K$. Also ist $g^{-1}h = g_i$ für ein $i = 1, \dots, m$. Andererseits ist $U_{\hat{q}} \cap g_i \cdot U_{\hat{p}} \subset U_{\hat{q}}^{g_i} \cap U_{g_i \cdot \hat{p}} = \emptyset$. Also existiert x nicht.

- (d) Sei $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte von M um p . O.B.d.A. sei U derart, dass $U \cap g \cdot U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ – immer möglich nach (b). Dann ist $\pi|_U$ ein Homöomorphismus aufs Bild und $\kappa \circ \pi|_U^{-1}: \pi(U) \rightarrow V$ eine Karte von M/G um $\pi(p)$. Ist $\{\kappa: U \rightarrow V\}$ ein glatter Atlas von M mit Karten wie eben, also U jeweils klein genug, dann ist auch $\{\kappa \circ \pi|_U^{-1}: \pi(U) \rightarrow V\}$ ein glatter Atlas von M/G , vgl. Beispiel I.3.10.iii. \square

Beispiel I.3.50.

- (i) Wir fassen die Sphäre S^{2k-1} als Menge aller $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ mit $\sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1$ auf. Sind $p \geq 2$ und $1 \leq q_1, \dots, q_k < p$ ganze Zahlen, so dass q_i und p teilerfremd sind, $1 \leq i \leq k$, so wirkt die Gruppe der p -ten Einheitswurzeln $E_p := \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\} \subset \mathbb{C}$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2k-1} durch

$$z \cdot (z_1, \dots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k).$$

Der Orbitraum $L(p, q_1, \dots, q_k) := S^{2k-1}/E_p$ wird *Linsenraum* vom Typ $(p; q_1, \dots, q_k)$ genannt.

- (ii) $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (n -dimensionaler Torus): Hierbei wirkt \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n wie folgt:

$$(z_1, \dots, z_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) := (x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n)$$

Die Gruppenoperation ist frei, eigentlich diskontinuierlich und differenzierbar. Es gilt: T^n ist diffeomorph zu $S^1 \times \dots \times S^1$.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Bis jetzt haben wir glatte Mannigfaltigkeiten eingeführt. Damit wissen wir z.B. was differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind. Als nächstes wollen wir eine Struktur einführen mit der wir Längen von Vektoren, Abstände zwischen Punkten etc. bestimmen können. Für Untermannigfaltigkeiten kriegen wir eine solche Struktur durch das euklidische Skalarprodukt des umliegenden Raums geschenkt: Wir schränken in jedem Punkt p der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt auf den Untervektorraum $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ ein und erhalten die *erste Fundamentalform*

$$I_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle \text{ für } X, Y \in T_p M.$$

Die erste Fundamentalform ist in jedem Punkt der Untermannigfaltigkeit eine positiv definite symmetrische Bilinearform und hängt glatt vom Punkt ab. So wollen wir allgemein eine Metrik auf einer Mannigfaltigkeit definieren. Wir werden allerdings allgemeiner nicht-degenerierte symmetrische Bilinearformen zulassen.

II.1. Semi-Riemannsche Metriken

Sei nun M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition II.1.1. * Eine *semi-Riemannsche Metrik* g ist eine Abbildung, die jedem

***Wdh. lineare Algebra – zu Bilinearformen** Sei $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem m -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum. Man nennt g *nicht-entartet*, falls aus $g(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ folgt, dass $v = 0$.

Sei (b_1, \dots, b_m) eine Basis von V und

$$g_{ij} := g(b_i, b_j) \in \mathbb{R} \text{ für } i, j = 1, \dots, m.$$

Dann ist $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ eine symmetrische $m \times m$ -Matrix. Für $v = v^i b_i$ und $w = w^j b_j$ gilt

$$g(v, w) = g_{ij} v^i w^j.$$

Die Bilinearform g ist genau dann nicht-entartet, wenn $\det g_{ij} \neq 0$ gilt.

Bemerkung. (Hauptachsentransformation) Sei g eine nichtentartete symmetrische Bilinearform auf V . Dann existiert eine Basis e_1, \dots, e_m von V , so dass

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \epsilon_i \in \{\pm 1\} & i = j. \end{cases}$$

Eine solche Basis heißt *Orthonormalbasis* und die Anzahl der i , für die $\epsilon_i = -1$ ist, heißt *Index* von g .

Beispiel. (i) Skalarprodukt - Index 0

(ii) Minkowskiprodukt=Lorentzprodukt - Index 1, z.B., $g_{ij} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Punkt von M eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform g_p auf $T_p M$ zuordnet, so dass diese Zuordnung glatt vom Basispunkt abhängt, d.h. für jede Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist die Abbildung

$$g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}, g_{ij}(v) := g_{\kappa^{-1}(v)} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\kappa^{-1}(v)}, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\kappa^{-1}(v)} \right)$$

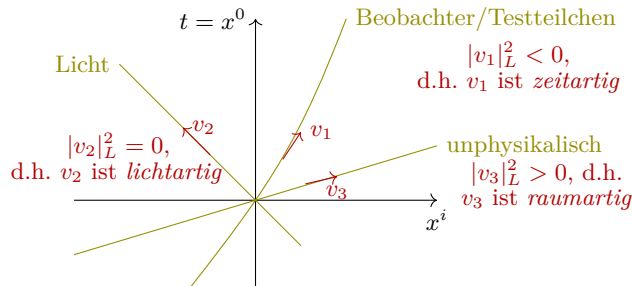
glatt. Eine semi-Riemannsche Metrik g , für die g_p stets positiv definit ist, heißt *Riemannsche* Metrik. Ein Paar (M, g) , aus einer glatten Mannigfaltigkeit M und einer (semi-)Riemannschen Metrik auf M , heißt *(semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Eine semi-Riemannsche Metrik g heißt *Lorentzmetrik*, falls g_p stets den Index 1 hat. Das Paar (M, g) heißt dann *Lorentzmannigfaltigkeit*.

Beispiel II.1.2. $\mathbb{R}^{n,k}$ ist der \mathbb{R}^{n+k} mit Metrik $\eta_{n,k} := \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{k\text{-mal}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}})$ in

Standardkoordinaten. Das ist das Standardbeispiel einer semi-Riemannschen Metrik vom Index k . Für jede semi-Riemannsche Metrik g einer Mannigfaltigkeit M ist g_p als Bilinearform auf $T_p M$ zu $\eta_{n,k}$ äquivalent (Hauptachsentransformation). Die wichtigsten Fälle sind für uns der Fall Index 0, $g_E := \eta_{n,0}$, und Index 1 $\langle \cdot, \cdot \rangle_L := \eta_{n,1}$.

Lorentzmetriken sind für die Beschreibung von Raumzeiten wichtig. Der Standardfall $\mathbb{R}^{n,1}$ ist der n -dimensionale Minkowskiraum $\mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$ mit Lorentzprodukt (= Minkowskiprodukt) $|v|_L^2 := \langle v, v \rangle_L$. (Die Schreibweise $|v|_L^2$ ist etwas irreführend, da dieser Ausdruck auch negativ sein kann.)

Interpretation der Minkowskimetrik:



Wählen wir Einheiten so, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. Dann hat Licht zu jedem Zeitpunkt einen Geschwindigkeitsvektor v mit $|v|_L^2 = 0$, einen sogenannten *lichtartigen* Vektor.

Für ein Teilchen mit räumlicher Geschwindigkeit $w \in \mathbb{R}^3$ betragskleiner der Lichtgeschwindigkeit ist der Geschwindigkeitsvektor $(v = 1, w) \in \mathbb{R}^4$ im Minkowskiraum *zeitartig*, d.h. $|v|_L^2 < 0$. *Raumartige* Vektoren, also $|v|_L^2 > 0$, entsprechen einer räumlichen Geschwindigkeit größer der Lichtgeschwindigkeit und sind daher unphysikalisch, da sich kein Teilchen mit über Lichtgeschwindigkeit bewegt.

II.1. Semi-Riemannsche Metriken

	Euklidischer Raum \mathbb{R}^n	Minkowskiraum $\mathbb{R}^{n-1,1}$
Koordinaten	$x = (x^1, \dots, x^n)$	$x = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$
Bilinearform	$\langle x, y \rangle := x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$ $ x ^2 := \langle x, x \rangle =: g_E(x, x)$	$\langle x, y \rangle_L := -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^{n-1} y^{n-1}$ $ x _L^2 := \langle x, x \rangle_L = g_L(x, x)$
	Cauchyungleichung $\langle x, y \rangle \leq x \cdot y $	inverse Cauchyungleichung $\langle x, y \rangle_L^2 \geq x _L^2 \cdot y _L^2$ für alle x, y licht- oder zeitartig
	Dreiecksungleichung $ x + y \leq x + y $	inverse Dreiecksungleichung* $\sqrt{ \langle x + y, x + y \rangle_L } \geq \sqrt{ \langle x, x \rangle_L } + \sqrt{ \langle y, y \rangle_L }$ für alle $x, y, x + y$ licht- oder zeitartig

Beispiel II.1.3. Die 1.Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit ist eine Riemannsche Metrik (die sogenannte *induzierte Metrik*): Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$. Dann existiert eine kanonische injektive Abbildung

$$\Phi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}, [c]_p \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c.$$

Wir setzen $g_p(\cdot, \cdot) := \langle \Phi_p \cdot, \Phi_p \cdot \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist.

Die erste Fundamentalform von der n -dimensionalen Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet man als *Standardmetrik* g_{st} auf S^n .

Im Gegensatz dazu liefert die Bilinearform auf einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} induziert durch $\eta_{n,k}$ nicht immer eine (semi-)Riemannsche Metrik:

Als Beispiel betrachten wir Kurven in $\mathbb{R}^{1,1}$: Sei $c(t) = tv$ für $v \in \mathbb{R}^2$. Ist v raumartig, dann induziert $\eta_{1,1}$ auf dem Bild von c ein semi-Riemannsche Metrik vom Index 0. Ist v zeitartig, dann vom Index 1. Ist v lichtartig, dann ist die Einschränkung von $\eta_{1,1}$ aufs Bild von c konstant 0. Wählt man als $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, dann induziert $\eta_{1,1}$ in jedem Punkt von S^1 eine Bilinearform auf $T_p S^1$, die je nach Punkt positiv definit, konstant Null oder negativ definit ist.

Beispiel II.1.4. Sei $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}_{-1}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = -1, x^0 > 0\}$ und $\mathbb{H}_1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1\}$, vgl. Abbildung I.3, dort ist

*Das ist die vereinfachte Version des Zwillingsparadoxon in der speziellen Relativitätstheorie – <https://de.wikipedia.org/wiki/Zwillingsparadoxon>.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

$\mathbb{H}^n = M_{-1} \cap \{x^0 > 0\}$ und $\mathbb{H}_1^n = M_1$. Wir betrachten auf beiden Untermannigfaltigkeiten, die durch das Lorentz-Produkt induzierte Bilinearform, d.h. für alle $p \in M$, mit $M = \mathbb{H}^n$ oder $M = \mathbb{H}_{-1}^n$ und $v, w \in T_p M$

$$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle_L.$$

Dann ist (\mathbb{H}^n, g) eine Riemannsche und (\mathbb{H}_1^n, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit: Sei $y \in T_p M$. Dann gibt es eine Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = y$. Wegen $c(t) \in M$ ist $\langle c(t), c(t) \rangle_L = \pm 1$. Differentiation ergibt $2\langle c'(t), c(t) \rangle_L = 0$ und damit $\langle y, p \rangle_L = 0$. Wir haben also $T_p M = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, y \rangle_L = 0\}$. Also ist $\mathbb{R}^{n+1} = T_p M \oplus \mathbb{R}p$ eine orthogonale Zerlegung (bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$) von $T_p M$. Im Fall $M = \mathbb{H}^n$ ist $\langle p, p \rangle_L = -1$, also muss g_p positiv definit sein. Im Fall $M = \mathbb{H}_{-1}^n$ ist $\langle p, p \rangle_L = 1$, also muss g_p vom Index 1 sein.

Wir müssen nun noch überprüfen, dass g_p glatt vom Basispunkt p abhängt:* Sei $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M um p und sei ν das Einheitsnormalenfeld auf $U \subset M$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p, \nu(p)$ eine Basis von $T_p \mathbb{R}^{n+1}$. In dieser Basis gilt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L = \begin{pmatrix} (g_{ij})_{i,j} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ glatt ist, ist auch $g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Bemerkung II.1.5. Sei g semi-Riemannsche Metrik auf M , sei $v \in T_p M$. Dann nennt man

$$\|v\| := \|v\|_g := \sqrt{|g_p(v, v)|}$$

Betrag des Vektors v bzgl. g . Ist g Riemannsch, so ist das eine Norm auf $T_p M$. Der *Winkel* zwischen Vektoren $v, w \in T_p M \setminus \{0\}$ bzgl. einer Riemannschen Metrik g ist definiert als

$$\sphericalangle(v, w) := \sphericalangle_g(v, w) := \arccos \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{|g_p(v, v)| \cdot |g_p(w, w)|}}.$$

Beachte: Man kann nur Winkel zwischen Vektoren messen, die im gleichen Tangentialraum liegen.

Beispiel II.1.6. Sei g eine semi-Riemannsche Metrik auf M und $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ glatt. Dann ist $f^2 g$ definiert als $(f^2 g)_p(X, Y) := f^2(p) g_p(X, Y)$ für $p \in M$, $X, Y \in T_p M$ wieder eine semi-Riemannsche Metrik auf M gleichen Index. Man nennt $f^2 g$ eine zu g *konforme Metrik*. Für eine konforme Metrik ändert sich zwar der Betrag eines Vektors ($\|v\|_{f^2 g} = f(p) \|v\|_g$ für $v \in T_p M$) aber nicht der Winkel zwischen zwei Vektoren, denn für $v, w \in T_p M \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \sphericalangle_{f^2 g}(v, w) &= \arccos \frac{f^2(p) g_p(v, w)}{\sqrt{f^2(p) |g_p(v, v)| \cdot f^2(p) |g_p(w, w)|}} \\ &= \arccos \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{|g_p(v, v)| \cdot |g_p(w, w)|}} = \sphericalangle_g(v, w). \end{aligned}$$

*So sieht man generell, dass die Einschränkung des Skalarproduktes/Lorentzproduktes auf eine Untermannigfaltigkeit eine Bilinearform gibt, die wieder glatt vom Basispunkt abhängt.

Beispiel II.1.7. Seien (M^m, g) und (N^n, h) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten vom Index k_1 bzw. k_2 . Wir wollen Beispiele für Metriken auf dem Produkt $M \times N$ finden. Davor noch einige Vorüberlegungen: Für einen Punkt $(p, q) \in M \times N$ gilt $T_{(p,q)}(M \times N)$ ist kanonisch isomorph zu $T_p M \times T_q N$,

Vorl. 10 - 16.11.

$$[c]_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N) \mapsto ([\text{pr}_M \circ c]_p, [\text{pr}_N \circ c]_q) \in T_p M \times T_q N,$$

wobei $\text{pr}_M: M \times N \rightarrow M$ bzw. $\text{pr}_N: M \times N \rightarrow N$ die Projektion auf M bzw. N ist. Eine Möglichkeit eine Metrik auf $M \times N$ zu definieren ist die *Produktmetrik* $g + h$

$$(g + h)_{(p,q)}(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_p(X_1, X_2) + h_q(Y_1, Y_2),$$

für alle $p \in M, q \in N, X_1, X_2 \in T_p M, Y_1, Y_2 \in T_q N$.

Sei $f: N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Abbildung. Dann kann man eine verzerrte Metrik (warped product) $M \times_f N := (M \times N, f^2 g + h)$ definieren als

$$(f^2 g + h)_{(p,q)}(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = f^2(q)g_p(X_1, X_2) + h_q(Y_1, Y_2),$$

für alle $p \in M, q \in N, X_1, X_2 \in T_p M, Y_1, Y_2 \in T_q N$. Die Metrik $f^2 g + h$ hat Index $k_1 + k_2$. Die Produktmetrik ist der Spezialfall $f = 1$.

Bzgl. einer Karte κ auf M und κ' auf N haben wir für $g + h$ in der Karte (κ, κ') :

$$(f^2 g + h)_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$$

Kartenwechsel. Seien $\kappa: U \rightarrow V$ und $\bar{\kappa}: U' \rightarrow V'$ zwei Karten von M mit $p \in U \cap U'$.

Seien (x^1, \dots, x^m) bzw. (y^1, \dots, y^m) Koordinaten auf V bzw. V' .

Dann ist wegen $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p = \frac{\partial(\kappa^j \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i}|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$

$$g_{ij}^{(\bar{\kappa})}(\bar{\kappa}(p)) = \frac{\partial(\kappa^k \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^i}|_{\bar{\kappa}(p)} \frac{\partial(\kappa^l \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^j}|_{\bar{\kappa}(p)} g_{kl}^{(\kappa)}(\kappa(p))$$

bzw. in (Physiker-)Kurzschreibweise $g_{ij}^{(y)} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} (g_{kl}^{(x)} \circ (x \circ y^{-1}))$.

Ist $g_{ij}^{(\kappa)}: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt für eine Karte $\kappa: U \rightarrow V$, dann gilt für jede Karte $\kappa': U' \rightarrow V'$, dass $g_{ij}^{(\kappa')} : \kappa'(U \cap U') \subset V' \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist. Es reicht also die Glattheit der Metrikoeffizienten für einen M überdeckenden Teilatlas zu überprüfen.

Definition II.1.8. Da $d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorraumisomorphismus ist, ist

$$dx^i|_p := d_p \kappa^i \in (T_p M)^*.$$

Der Dualraum $(T_p M)^* =: T_p^* M$ heißt *Kotangentialraum* von M in p . Ein Element von $T_p^* M$ heißt *Kotangentialvektor*.

Für eine andere Schreibweise der Metrik brauchen wir noch den Dualraum zum Tangentialraum:

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Lemma II.1.9. Die $dx^i|_p$ bilden die zu $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ duale Basis.

Beweis. $dx^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = d_p\kappa^i(d_{\kappa(p)}\kappa^{-1}(e_j)) = \delta_j^i$ □

Es ist

$$dx^i|_p = \frac{\partial(\kappa^i \circ \bar{\kappa}^{-1})}{\partial y^j}|_{\bar{\kappa}(p)} dy^j|_p. \quad (\text{II.1})$$

Kurzschreibweise: $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$

Bemerkung II.1.10. (Vergleich des Transformationsverhalten von (Kotangentential-)vektoren) Hat man lokale Koordinaten (x^1, \dots, x^m) auf M und stellt einen Vektor $v \in T_p M$ bzgl. der Standardbasis $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ dar, dann ist v durch ein m -Tupel von reellen Zahlen gegeben. Genauso ist aber auch ein Kotangententialvektor $\alpha \in T_p^* M$ bzgl. der Standardbasis $dx^i|_p$ als m -Tupel von reellen Zahlen gegeben. Am Transformationsverhalten bzgl. verschiedener lokalen Koordinaten kann man aber unterscheiden, ob es sich um einen Vektor oder einen Kotangententialvektor handelt.

Bemerkung II.1.11. Seien x^i lokale Koordinaten einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ von M um p . Eine Bilinearform $\alpha: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist immer eindeutig schreibbar als

$$\alpha = \alpha_{ij} dx^i|_p \otimes dx^j|_p,$$

$$\text{d.h. } \alpha \left(v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right) = \alpha_{ij} dx^i|_p(v) dx^j|_p(w) = \alpha_{ij} v^i w^j$$

für $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.

Also ist eine semi-Riemannsche Metrik in lokalen Koordinaten immer gegeben durch

$$g_p = g_{ij}(\kappa(p)) dx^i|_p \otimes dx^j|_p, \text{ d.h. } g_p(X, Y) = g_{ij}(\kappa(p)) dx^i|_p(X) dx^j|_p(Y)$$

für $X, Y \in T_p M$.

Oft schreibt man kurz: $g = g_{ij} dx^i dx^j$. Da g_{ij} symmetrisch ist, ist $g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^j \otimes dx^i$. Deshalb macht es Sinn in diesem Fall das (nicht symmetrische) Tensorproduktzeichen wegzulassen und eine kommutative Schreibweise zu nutzen.

Beispiel II.1.12. (Metrik auf S^1) Sei $F: \phi \in (0, 2\pi) \rightarrow (\cos \phi, \sin \phi)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine lokale Parametrisierung von S^1 . Dann ist $g = d\phi^2$ die induzierte Metrik in der lokalen Koordinate ϕ : $\frac{\partial}{\partial \phi}|_{F(\phi)} = \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)^T$ und damit $g_{\phi\phi} = \langle \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi), \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi) \rangle = 1$, also $g = d\phi \otimes d\phi = (d\phi)^2$.

Beispiel II.1.13. Euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 : $g_E = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 (= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dx^2)$ in Polarkoordinaten $x^1 = r \cos \phi$, $x^2 = r \sin \phi$:

$$dx^1 = \frac{\partial x^1}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x^1}{\partial r} dr = -r \sin \phi d\phi + \cos \phi dr,$$

$$dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x^2}{\partial r} dr = r \cos \phi d\phi + \sin \phi dr.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 &= (-r \sin \phi d\phi + \cos \phi dr) \otimes (-r \sin \phi d\phi + \cos \phi dr) \\ &\quad + (r \cos \phi d\phi + \sin \phi dr) \otimes (r \cos \phi d\phi + \sin \phi dr) \\ &= r^2 \sin^2 \phi d\phi \otimes d\phi - r \sin \phi \cos \phi (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr) + \cos^2 \phi d\phi \otimes d\phi \\ &\quad + r^2 \cos^2 \phi d\phi \otimes d\phi + r \sin \phi \cos \phi (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr) + \sin^2 \phi dr \otimes dr \\ &= r^2 d\phi \otimes d\phi + dr \otimes dr. \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix von g_E bzgl. der Koordinaten (r, ϕ) ist also $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ während die bzgl. der euklidischen Koordinaten (x^1, x^2) die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

'Vergleich' von Metriken auf diffeomorphen Mannigfaltigkeiten.

Definition II.1.14. Seien (M, g) und (N, h) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dann heißt ein lokaler Diffeomorphismus* $\phi: M \rightarrow N$ *lokale Isometrie*, falls

$$d_p \phi: (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{\phi(p)} N, h_{\phi(p)})$$

für alle $p \in M$ eine Isometrie ist, also für die

$$g_p(X, Y) = h_{\phi(p)}(d_p \phi(X), d_p \phi(Y)) \text{ für alle } X, Y \in T_p M \text{ gilt.}$$

Ist ϕ schon ein Diffeomorphismus, heißt ϕ *Isometrie*.

Beispiel II.1.15. Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(M = S^1, d\phi^2)$ und $(N = \mathbb{R}, dx^2)$ sind lokal isometrisch: Ein lokale Isometrie ist durch $x \in \mathbb{R} \mapsto \phi(x) = (x \bmod 2\pi) \in S^1$ gegeben.

Die Produktmannigfaltigkeit $S^1 \times \mathbb{R}$ ist diffeomorph zum Zylinder im $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mit der Produktmetrik $d\phi^2 + dx^2$ ist $S^1 \times \mathbb{R}$ auch isometrisch zum Zylinder Z (mit der induzierten Metrik = 1. Fundamentalform). $S^1 \times_f \mathbb{R}$ mit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist isometrisch zur Rotationsfläche $\{(f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \phi, z \in \mathbb{R}\}$.

Anders herum kann man einen lokalen Diffeomorphismus $\phi: M \rightarrow N$ und eine semi-Riemannsche Metrik h auf N auch nutzen, um eine semi-Riemannsche Metrik auf M zu definieren, für die ϕ eine lokale Isometrie wird:

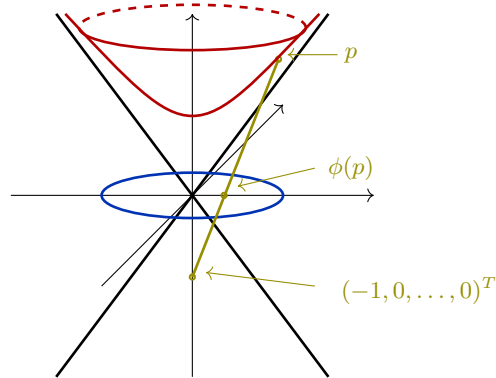
Definition II.1.16. Ist $\phi: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus und h eine semi-Riemannsche Metrik auf N , so heißt die semi-Riemannsche Metrik $\phi^* h$ auf M *Pullback* von h , wobei

$$(\phi^* h)_p(v, w) := h_{\phi(p)}(d_p \phi(v), d_p \phi(w)) \text{ für } v, w \in T_p M.$$

*Eine Funktion $\phi: M \rightarrow N$ ist ein *lokaler Diffeomorphismus*, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ von p gibt, so dass $\phi(U)$ in N offen ist und $\phi|_U: U \rightarrow \phi(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Beispiel II.1.17. Wir betrachten die stereographische Projektion ϕ des hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf den Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\phi(p)$ der Schnitt der Geraden von p zum Punkt $(-1, 0, \dots, 0)^T$ mit der Ebene $\{x^0 = 0\}$.



Damit ist ϕ gegeben durch

$$\phi: \mathbb{H}^n \rightarrow B_1(0), \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1+x^0} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Dann ist ϕ ein Diffeomorphismus. Sei g die auf $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch die Lorentz-Metrik des \mathbb{R}^{n+1} induzierte Riemannsche Metrik. Dann gilt $(\phi^{-1})^*g(y) = \frac{4}{1-\|y\|_E^2}g_E$, s. ÜA 18. Der Pullback der hyperbolischen Metrik auf $B_1(0)$ ist also konform zur euklidischen Metrik – man sagt: Der hyperbolische Raum ist *konform flach*. Man nennt $(B_1(0), (\phi^{-1})^*g)$ das *Poincarésche Ballmodell des hyperbolischen Raumes*.

Lemma II.1.18. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Sei h eine semi-Riemannsche Metrik auf N . Dann ist ϕ^*h die eindeutig bestimmte semi-Riemannsche Metrik auf M , für die ϕ eine lokale Isometrie ist. Sei $f: Z \rightarrow M$ ein weiterer lokaler Diffeomorphismus. Dann ist $(\phi \circ f)^*h = f^*(\phi^*h)$.

Beweis. Klar, nach Definition. □

Beispiel II.1.19. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und G wirke auf M derart, dass jede Wirkung $g: M \rightarrow M$ eine Isometrie ist. Außerdem wirke G frei und eigentlich diskontinuierlich auf M . Wie im Beweis von Theorem 1.3.49 gesehen, ist die Projektion $\pi: (M, g) \rightarrow (M/G, \hat{g})$ ein lokaler Diffeomorphismus. Um jeden Punkt $p \in M$ gibt es $U \subset M$, so dass $\pi_U: U \rightarrow U/G$ ein Diffeomorphismus ist. Wir setzen $\hat{g}|_{U/G} = (\pi_U^{-1})^*g$, dann ist nach letztem Lemma π_U eine Isometrie. Sei U klein genug, dass $\pi_U^{-1}(U/G) = \sqcup_{h \in G} g \cdot U$. Dann könnte die gleiche Prozedur bei der Wahl von $h \cdot U$ statt U a priori ein anderes $\hat{g}|_{U/G}$ erzeugen. Das ist nicht so da $G \subset \text{Isom}(M, g)$, also $h: M \rightarrow M, p \mapsto h \cdot p$ eine Isometrie ist: Es gilt $\phi_{h \cdot U} \circ h = \pi_U$ und

damit $(\pi_U^{-1})^*g = ((\phi_{h.U} \circ h)^{-1})^*g = (\phi_{h.U}^{-1})^*((h^{-1})^*(g)) = (\phi_{h.U}^{-1})^*(g)$. Somit existiert also genau eine semi-Riemannsche Metrik \hat{g} auf dem Orbitraum M/G , so dass π eine lokale Isometrie ist.

Wir betrachten $(\mathbb{R}, (dx)^2)$ mit der \mathbb{Z} -Wirkung $(z, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mapsto x + z\mathbb{R}$. Dann ist nach \mathbb{R}/\mathbb{Z} eine Mannigfaltigkeit, vgl. Beispiel L3.50. \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist isomorph zur S^1 . Nach letztem Lemma erhalten wir auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} auch eine Riemannsche Metrik, so dass $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine lokale Isometrie ist. Diese Metrik auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} hat in der Koordinate x dann auch die Form $(dx)^2$. und ist damit lokal isometrisch zu $(S^1, (d\phi)^2)$.

Die sogenannte *Fubini-Study Metrik* ist die Metrik auf dem $\mathbb{R}P^n$, die mittels der Standardmetrik auf S^n und der kanonischen Projektion $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ induziert wird.

Menge aller Isometrien einer Mannigfaltigkeit

Vorl. 11 - 21.11.

Definition II.1.20. Die Menge aller Isometrien $\phi: M \rightarrow M$ von (M, g) bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe – die sogenannte *Isometriegruppe* $\text{Isom}(M, g)$ von M .

Beispiel II.1.21.

(i) $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_E) =$ Gruppe der eukl. Bewegungen $= \{\phi(x) = Ax + b \mid A \in \mathbb{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{O}(n)$

(ii)

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^{n,1}, g_{\text{Minkowski}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_L) = \text{Gruppe der Poincaré-Transformationen} \\ = \{\phi(x) = Ax + b \mid A \in \mathbb{O}(n, 1), b \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \mathbb{R}^{n,1} \rtimes \mathbb{O}(n, 1)$$

wobei $\mathbb{O}(n, 1) = \{A \in M_{\mathbb{R}}(n + 1, n + 1) \mid \langle Ax, Ay \rangle_L = \langle x, y \rangle_L\}$ ist.

(iii) $\text{Isom}(S^n, g_{st}) = \mathbb{O}(n + 1)$

(iv) $\text{Isom}(\mathbb{H}^n, g_{st}) = \mathbb{O}(n, 1)$

Satz II.1.22. Sei (M, g) eine Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Isometriegruppe $\text{Isom}(M, g)$ eine Liegruppe. Ist M kompakt Riemannsch, dann ist $\text{Isom}(M, g)$ kompakt.

Beweis. Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten siehe [MS39]. Für Lorentzmannigfaltigkeiten [LPZ13]. □

Vermutung II.1.23. [LPZ13, p. 288] Kompakte einfach zusammenhängende* Lorentzmannigfaltigkeiten haben eine kompakte Isometriegruppe.

*Einfach zusammenhängend \sim Jede glatte Kurve $c: S^1 \rightarrow M$ in der Mannigfaltigkeit M kann stetig zu einem Punkt verformt werden (= ist nullhomotop). Bsp: \mathbb{R}^n, S^m für $m > 1$ sind einfach zusammenhängend, S^1, T^n nicht.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Isometrische Einbettungen. Wir hatten in Satz I.3.40 den Whitney'schen Einbettungssatz kennengelernt – der sagt, dass jede Untermannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n hoch. Wenn wir an semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten interessiert sind, nutzt uns eine solche Einbettung oft erst einmal gar nichts, da die semi-Riemannsche Metrik nichts mit der induzierten Metrik auf der Untermannigfaltigkeit zu tun haben muss. Der Vorteil der Untermannigfaltigkeit ist aber genau, dass man mit dem umliegenden Raum rechnen kann, wenn das bei der Metrik nicht mehr der Fall ist, verliert man diesen Vorteil. Was wir also eigentlich gerne wollen, ist eine Einbettung in einen \mathbb{R}^{n+k} mit der Standard-Index k -Metrik $\eta_{n,k}$, die gleichzeitig eine Isometrie aufs Bild ist. Die Frage ist also, ob es isometrische Einbettungen gibt:

Satz II.1.24 (Isometrische Einbettungssätze). (i) (Nash) Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit M ist isometrisch in einen \mathbb{R}^n einbettbar.

(ii) (Greene) Jede (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit M ist isometrisch in einen \mathbb{R}^{n_1, n_2} einbettbar. (Hier steht \mathbb{R}^{n_1, n_2} für den $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ mit der Metrik $-(dx^1)^2 - \dots - (dx^{n_2})^2 + (dx^{n_2+1})^2 + \dots + (dx^{n_2+n_1})^2$.)

1956 bewies John Nash das obige Resultat, [Nas56, Gün89], (Interview mit John Nash: <https://www.simonsfoundation.org/2012/10/24/john-nash/> (Teil zum Einbettungsproblem - Kapitel 21, ungefähr ab Minute 1:05)).

Robert Greene [Gre69] bewies das analoge Resultat für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Beachte: Ist M eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, so ist M nicht notwendigerweise isometrisch in einen $\mathbb{R}^{n,1}$ einbettbar – da eine allgemeine Lorentz-Mannigfaltigkeit Zeitschleifen (= zeitartige Kurven, also Kurven $\gamma: S^1 \rightarrow M$ mit $\dot{\gamma}$ immer zeitartig) haben kann, siehe Beispiel II.1.27, aber der $\mathbb{R}^{n,1}$ nicht.

Der Beweis ist viel schwerer als der vom Whitney'schen Einbettungssatz und benötigt Techniken aus den partiellen Differentialgleichungen.

Existenz von Metriken. Lokal gibt es immer eine semi-Riemannsche Metrik von beliebigem Index:

Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit und β eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^m vom Index $0 \leq k \leq m$. Sei $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte mit Koordinaten (x^1, \dots, x^m) . Für jedes $p \in U$, ist $d_p\kappa: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus. Setze $g_p(\cdot, \cdot) := \beta(d_p\kappa(\cdot), d_p\kappa(\cdot))$. Dann gilt:

$$g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \beta \left(d_p\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), d_p\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \right) = \beta(e_i, e_j).$$

Also sind die g_{ij} konstant in p und damit glatt und g ist auf $U \subset M$ eine Metrik mit Index k .

Satz II.1.25. (Globale Existenz Riemannscher Metriken) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Riemannsche Metrik auf M .

Beweis. Nach dem Whitney'schen Einbettungssatz gibt es eine Einbettung $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei g die auf der Untermannigfaltigkeit $f(M)$ induzierte Riemannsche Metrik. Dann ist der Pullback ϕ^*g , siehe Definition II.1.16, ist dann eine Riemannsche Metrik auf M . \square

Bemerkung II.1.26. Nicht auf jeder glatten Mannigfaltigkeit M^m gibt es eine semi-Riemannsche Metrik mit Index $\notin \{0, m\}$, z.B. gibt es keine Lorentzmetrik auf S^2 . Auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten gibt es immer eine Lorentzmetrik. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten gibt es eine topologische Obstruktion (= topologische Bedingung an die Mannigfaltigkeit). Diese Bedingung misst, ob ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit existiert. (Auf der S^2 gibt es so etwas nicht, das war der Satz vom Igel.) Dass diese Bedingung notwendig ist, liegt am Index der Metrik, also der Existenz 'der' Zeit.

Beispiel II.1.27. Aber auch auf kompakten Mannigfaltigkeiten kann es Lorentzmetriken geben: Auf $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ mit Koordinaten (ϕ, θ) ist z.B. $(d\phi)^2 + (d\theta)^2$ eine Riemannsche Metrik. Die Metriken $(d\phi)^2 - (d\theta)^2$ und $-(d\phi)^2 + (d\theta)^2$ sind Beispiele für Lorentzmetriken auf \mathbb{T}^2 .

Längen von Kurven. Wir wollen nun Längen von Kurven $c: I = (a, b) \rightarrow M$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ kann man jede solche Kurve auch einfach als Kurve in \mathbb{R}^n interpretieren und dort die Länge ausrechnen:

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}| ds$$

(Hier ist $\dot{c} := c'$.) Es ist $|\dot{c}(s)|^2 = \langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle = g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))$ für g die auf M induzierte Metrik. Damit können wir den Längenbegriff auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

ist die *Länge* von c . Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung: Sei $\phi: (a_0, b_0) \rightarrow (a, b)$ ein Diffeomorphismus. O.B.d.A. sei $\phi' > 0$. (Man beachte: Weil ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist $\phi'(s) \neq 0$ für alle s .) Dann ist $\tilde{c}(s) = c(\phi(s))$ eine Kurve mit gleicher Spur und

$$\begin{aligned} L(\tilde{c}) &= \int_{a_0}^{b_0} \sqrt{g_{c(s)}(\dot{\tilde{c}}(s), \dot{\tilde{c}}(s))} ds = \int_{a_0}^{b_0} \sqrt{\phi'(s)^2 g_{c(s)}(\dot{c}(\phi(s)), \dot{c}(\phi(s)))} ds \\ &= \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt = L(c). \end{aligned}$$

*die Zeitrichtung hängt vom Beobachter ab.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Sei M zusammenhängend. Wir definieren die *Riemannsche Abstandsfunktion* $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ durch*

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte Kurve von } p \text{ zu } q\}.$$

Dann ist (M, d) ein metrischer Raum, vgl. ÜA 25.

Für $M^m \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit mit induzierter Metrik ist $L(c)$ genau die Länge von c im \mathbb{R}^n . Die Riemannsche Abstandsfunktion stimmt jedoch nicht mit der Abstandsfunktion im euklidischen Raum überein.

Eigenzeit im Lorentzsch Im semi-Riemannschen kann $g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))$ das Vorzeichen wechseln und der Ausdruck $L(c)$ wie oben macht dann keinen Sinn. Es werden deshalb oft nur *kausale* Kurven betrachtet. Das sind Kurven $c: I \rightarrow M$, so dass $\dot{c}(s)$ für alle $s \in I$ ein *kausaler* Vektor ist, d.h. $g(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) \leq 0$ gilt. Für diese Kurven wird

$$\tau(c) := \int_I \sqrt{-g(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} ds$$

als *Eigenzeit* interpretiert, die für ein Teilchen, welches sich entlang c bewegt, vergeht.

Für die *Lorentzsche Abstandsfunktion* definiert man dann

$$d(p, q) = \sup\{\tau(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

mit der dann aber M nicht zu einem metrischen Raum wird.

II.2. Geodätische

Im \mathbb{R}^n sind Geraden ausgezeichnete Kurven und zwar aus verschiedenen Gründen: Zum einen beschreiben Sie Kurven c , die Körper beschreiben auf denen keine Beschleunigung wirkt (*geradlinig gleichförmige Bewegungen*, $\ddot{c} = 0$). Zum anderen ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im \mathbb{R}^n genau durch den Geradenteil zwischen diesen beiden Punkten gegeben.

Wir wollen ähnliche Kurven auch auf Mannigfaltigkeiten finden. Dabei ist natürlich als erstes die Frage, mit welcher der zwei Eigenschaften von oben man anfängt und wie man diese für Mannigfaltigkeiten verstehen kann. Wir wollen 'geradlinig gleichförmige Bewegungen' auf Mannigfaltigkeiten finden (und dann später sehen, ob auch die Eigenschaft der kürzesten Verbindung bleibt).

Dazu betrachten wir zunächst eine Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ auf der sich ein Teilchen auf einer Kurve $c(s)$ bewegen soll, also $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$. Wirkt auf dem Teilchen gar keine Kraft, ist die Beschleunigung $\ddot{c} \equiv 0$ und das Teilchen bewegt sich auf einer Gerade - also im Allgemeinen von M herunter. Soll das Teilchen aber auf M

*Gilt für eine Kurve c von p nach q schon $L(c) = d(p, q)$, dann ist c glatt. Weiterhin kann das 'stückweise' in der Definition auch weggelassen werden. Es macht nur technische Details einfacher.

bleiben, muss es eine Anteil der Beschleunigung geben, der es auf M hält - wie z.B. die Radialkraft bei einer Bewegung auf dem Kreis. Dieser Anteil von \ddot{c} steht zu jeder Zeit senkrecht zur Fläche. Der noch übrig bleibende tangentielle Anteil, sorgt für die Beschleunigung innerhalb der Fläche. Möchte man also z.B. die geradlinig gleichförmige Bewegung im \mathbb{R}^n (also $\ddot{c} = 0$) für M verallgemeinern, sucht man Kurven, deren tangentialer Anteil der Beschleunigung gleich 0 ist. Wir suchen also einen Ausdruck für den tangential Anteil von \ddot{c} :

Wir werden als erstes \ddot{c} als Richtungsableitung von \dot{c} in Richtung von \dot{c} auffassen:

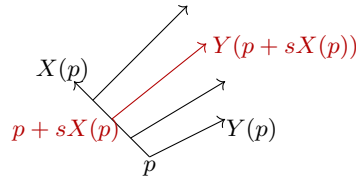


Abb. II.1.: Die Richtungsableitung im \mathbb{R}^n

Seien X und Y glatte Vektorfelder auf \mathbb{R}^n . Dann ist die Richtungsableitung $D_X Y$ wieder ein Vektorfeld und gegeben durch

$$(D_X Y)(p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(p + sX(p)) - Y(p)}{s}.$$

Der Ableitung $D_X Y$ im Punkt p hängt nicht von dem ganzen Vektorfeld X und Y ab, sondern nur von $X(p)$ und den Werten von Y auf der Kurve $s \mapsto p + sX(p)$ in der Nähe von $s = 0$ ab. Es gilt sogar:

$$(D_X Y)(p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(\gamma(s)) - Y(\gamma(0))}{s}$$

für jede Kurve $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X(p)$.*

Mit diesen Überlegungen kann man $D_X Y$ auch berechnen, wenn X, Y nur auf einer Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind: Seien $X, Y: M \rightarrow TM$ glatte Vektorfelder (tangentielle Vektorfelder der Untermannigfaltigkeit). Dann wählt man für γ eine Kurve mit Werten in M , womit $Y(\gamma(s))$ und damit $(D_X Y)(p)$ wohldefiniert sind.

Allerdings ist $(D_X Y)(p)$, wie auch schon $\ddot{c}(0)$, zumeist kein Element mehr in $T_p M$. Um trotzdem ein Vektorfeld auf M zu erhalten, benutzen wir die Orthogonalprojektion $\text{pr}_{T_p M}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ und erhalten die Abbildung

$$(\nabla_X Y)(p) := (D_X Y)^{\text{tan}}(p) := \text{pr}_{T_p M}((D_X Y)(p)).$$

Die Abbildung ∇ bildet zwei Vektorfelder X und Y wieder auf ein (tangentes) Vektorfeld $\nabla_X Y$ ab und erbt dabei einige wichtige Eigenschaften der Richtungsableitung:

*Da bei uns alle Funktionen glatt sind, ist f insbesondere differenzierbar und die Richtungsableitungen linear in der Richtung in die abgeleitet wird. Insbesondere kann man für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ die Richtungsableitung auch mit Hilfe der Jacobimatrix $D_p f$ als $D_p f(X) = D_X f(p)$ ausdrücken.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

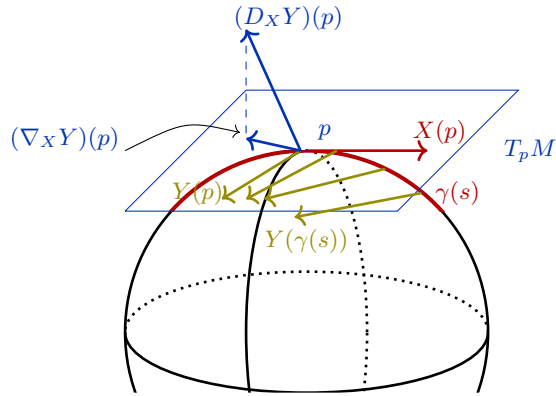


Abb. II.2.: Projektion der Richtungsableitung auf den Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

Lemma II.2.1. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Die induzierte Riemannsche Metrik bezeichnen wir mit g . Seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und seien $X, Y: M \rightarrow TM$ glatte Vektorfelder. Dann gilt

(i) ∇ ist linear in beiden Argumenten.

(ii) (Tensoriell (= $C^\infty(M)$ -linear) in der ersten Komponente) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ (also $(\nabla_{fX} Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)_p$).

(iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fY) = df(X)Y + f \nabla_X Y, \text{ also } (\nabla_X(fY))_p = d_p f(X(p))Y(p) + f(p)(\nabla_X Y)_p.$$

(iv) (metrisch (= kompatibel mit der Metrik)) Für alle glatten Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt:

$$Z.g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

wobei $Z.f := Z(f) := df(Z): M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto d_p f(Z(p))$, für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (Hier ist $f = g(X, Y): M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$.) ist.

(v) (torsionsfrei) Für alle Karten $\kappa: U \rightarrow V$ mit $p \in U$ und Koordinaten x^i auf V gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

für alle i und j .

Auch $df(Z)$ ist als Hintereinanderausführung $M \xrightarrow{Z} TM \xrightarrow{df} T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{Pr}_2} \mathbb{R}$ glatter Abbildungen selbst wieder glatt.

Beweis von Lemma II.2.1. (i)-(iii) Verwenden der Eigenschaften für D^* und Projektion auf den Tangentialraum.

(iv) folgt aus $Z.\langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle$ und $(D_Z X)^{\text{tan}} = \nabla_Z X$.

(v) Sei $F = \kappa^{-1}: V \rightarrow W$ mit $W \cap M = U$ eine lokale Parametrisierung mit Koordinaten x^1, \dots, x^m . Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ und

$$D_{X=\frac{\partial}{\partial x^i}} Y|_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Y(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i + s, x^{i+1}, \dots, x^m) - Y(x^1, \dots, x^m)}{s} = \frac{\partial Y}{\partial x^i}(p).$$

Also insbesondere

$$D_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Demnach ist

$$D_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j}(p) = D_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \frac{\partial F}{\partial x^i}(p)$$

einfach der Satz von Schwarz und (v) dessen Projektion auf den Tangentialraum. \square

Bemerkung II.2.2.

(a) Wie auch $(D_X Y)(p)$ hängt als Projektion auch $(\nabla_X Y)(p)$ nur vom Wert von X in Punkt p aber von Y in einer Umgebung von p abhängt (diese Eigenschaft folgt auch nochmals aus den Eigenschaften (ii) und (iii) des letzten Lemmas). Insbesondere ist damit der Ausdruck $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ auch sinnvoll, obwohl $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nur Vektorfelder auf U sind, und ergibt wieder ein Vektorfeld auf U .

(b) (v) gilt nicht für allgemeine Vektorfelder, weder für D noch für ∇ . Beispiel: $M = \mathbb{R}^n$, $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $Y = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} = x^1 X$, denn

$$D_Y X \stackrel{(ii)}{=} x^1 D_X X \stackrel{(v)}{=} 0, \quad D_X Y \stackrel{(iv)}{=} x^1 D_X X + X(x^1)X = X.$$

(c) Zur Notation $X.f$ für glattes $f: M \rightarrow \mathbb{R}$: Falls $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Koordinatenvektorfeld bzgl. einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ ist, dann ist für alle $p = \kappa^{-1}(u) \in U$

$$df(X)(p) = d_p f(X(p)) = d_p f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^i}(u),$$

vgl. auch ÜA 14.

(d) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte mit Koordinaten x^1, \dots, x^m . Dann ist $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ für geeignete Funktionen $X^i, Y^i \in C^\infty(U)$. Wir

*Die Richtungsableitung für eine allgemeine Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ist immer linear in der Funktion F als auch in der Richtung $h \in \mathbb{R}^n$, in die man ableitet. Hat man einmal die Kettenregel für die Ableitung bewiesen, folgt das wie folgt: Sei $\gamma(t)$ eine Kurve in \mathbb{R}^n mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = h$, dann ist $D_X F(p) = D_p F(X) = D_p F(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F \circ \gamma)$.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

haben auf U :

$$\begin{aligned}
 D_X Y &= D_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(i)+(ii)}{=} X^i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} X^i \left(Y^j D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \underbrace{\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}}_{\text{das war kurz für } \frac{\partial(Y^j \circ \kappa)}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \\
 \nabla_X Y &= X^i \left(Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \tag{II.2}
 \end{aligned}$$

D.h. wir sehen, dass der einzige Term in $\nabla_X Y$ der wirklich von der Einbettung von $M \subset \mathbb{R}^n$ und damit von der Metrik auf M abhängt, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist. Wegen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \in T_p M$ muss es Funktionen $\Gamma_{ij}^k: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \Gamma_{ij}^k(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ geben. Die Γ_{ij}^k werden *Christoffelsymbole* genannt.

Es gilt

$$\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p), \frac{\partial}{\partial x^\ell}|_p \right\rangle = g_p \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p), \frac{\partial}{\partial x^\ell}|_p \right) = \Gamma_{ij}^k(\kappa(p)) g_{k\ell}(\kappa(p)).$$

Sei $g^{ij}(v)$ die zu $g_{ij}(v)$ inverse Matrix, also $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$. Dann ist

$$g^{\ell r}(\kappa(p)) \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p), \frac{\partial}{\partial x^\ell}|_p \right\rangle = \Gamma_{ij}^r(\kappa(p)),$$

insbesondere sind die $\Gamma_{ij}^r: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen.

Was ist nun \ddot{c}^{tan} ? Wir wollen nun \ddot{c} als Richtungsableitung verstehen und damit \ddot{c}^{tan} mittels $\nabla: \dot{c}(s)$ ist ein Vektor im Punkt $c(s)$. Man wählt formal $\gamma(u) = c(u+s)$, $X(c(s)) = Y(c(s)) = \dot{c}(s)$ und erhält $D_{\dot{c}} \dot{c}(s) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\dot{c}(u+s) - \dot{c}(s)}{u} = \ddot{c}(s)$. Achtung: Das geht nur wenn X, Y wirklich ein Vektorfeld auf $\text{Bild}(c)$ definieren und zu einem Vektorfeld in einer Umgebung von $c(s)$ erweiterbar sind. Ist z.B. nicht der Fall, wenn $\dot{c} = 0$ auf einem Intervall um s ist.

Für Kurven mit $\ddot{c}^{\text{tan}} = 0$ tritt dieses Problem nicht auf, denn:

$$\frac{d}{ds} \langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle = 2 \langle \ddot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle = 2 \langle \ddot{c}(s)^{\text{tan}}, \dot{c}(s) \rangle = 0$$

und damit $|\dot{c}(s)| = \text{konstant}$. D.h. insbesondere solange c nicht konstant ist, ist c *regulär*, also $\dot{c}(s) \neq 0$ für alle s . Insbesondere ist dann die Abbildung $c: (s-\epsilon, s+\epsilon) \rightarrow M$, $u \mapsto c(u)$, für $\epsilon > 0$ klein genug, ein Homöomorphismus aufs Bild. Für solche c kann \dot{c} in einer Umgebung $U \subset M$ von $c(s)$ zu einem Vektorfeld auf U fortgesetzt werden – einfach senkrecht zum Bild konstant fortsetzen.

Die Verallgemeinerung von Geraden auf Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ sei also Kurven $c: I \rightarrow M$ mit $\ddot{c}^{\text{tan}} = 0$ bzw. äquivalent $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$. Solche Kurven nennen wir *Geodätische*.

Beispiel II.2.3. Im (\mathbb{R}^n, g_E) ist $c(t)$ eine Geodätische, genau dann wenn $\ddot{c}(t) = 0$, also $\dot{c}(t)$ konstant ist, also genau dann, wenn $\ddot{c}(t) = 0$, also genau dann wenn $c(t) = p + tv$ für $p, v \in \mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung II.2.4 (Geodäte vs. Geodätische). Geodäten sind die Spuren von Geodätischen*. Eine Geodätische ist immer eine parametrisierte Kurve, vgl. letztes Beispiel: Eine Gerade im \mathbb{R}^n kann auch so parametrisiert werden, dass $\ddot{c} \neq 0$ ist.

Beispiel II.2.5. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche:

$$c \text{ ist genau dann Geodätische, falls } \ddot{c}(t) \parallel \nu_{c(t)} \text{ für alle } t \text{ ist,} \quad (\text{II.3})$$

wobei $\nu_{c(t)}$ ein Normalenvektor an die Hyperfläche im Punkt $c(t)$ ist. Auf der $S^2 \subset \mathbb{R}^3$: Seien c_i nach Bogenlänge parametrisierte Kreise, d.h. $|\dot{c}_i|^2 = 1^\dagger$ wie im Bild II.3 links. Dann ist $0 = \frac{d}{dt} |\dot{c}_i(t)|^2 = 2\langle \dot{c}_i(t), \ddot{c}_i(t) \rangle$, also $\dot{c}_i(t) \perp \ddot{c}_i(t)$ für alle t . Dann ist der Großkreis eine Geodäte, der Kleinkreis zum Beispiel nicht, vgl. auch ÜA 26.

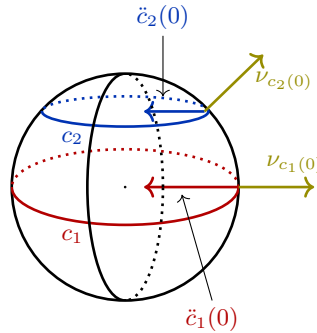


Abb. II.3.: Großkreise sind Geodäten

$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ **in lokalen Koordinaten** x^i zu einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$: Seien $c^i: I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\kappa \circ c(s) = (c^1(s), \dots, c^m(s))$. Dann ist $\dot{c} = \dot{c}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Mittels (II.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}} \dot{c} &= \dot{c}^i \left(\dot{c}^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial \dot{c}^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= (\dot{c}^k + \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $\dot{c}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}$ verwendet.

*und eine Berufsbezeichnung...

†Die Bezeichnung kommt von folgender Eigenschaft: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ für alle t . Dann ist die Länge der Kurve $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = b - a$. Die gleiche Rechnung gilt für die Länge einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit, d.h. Kurven auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) sind nach Bogenlänge parametrisiert, falls $g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1$ gilt.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Die *Geodätengleichung* in lokalen Koordinaten ist damit

$$\ddot{c}^k + \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ für } k = 1, \dots, \dim M. \quad (\text{II.4})$$

∇ für abstrakte Mannigfaltigkeiten? Für Untermannigfaltigkeiten bestimmen die Eigenschaften (i)-(v) aus Lemma II.2.1 sogar die Abbildung $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ eindeutig. Deshalb wollen wir diese Eigenschaften verwenden um ∇ für allgemeine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu definieren:

Definition II.2.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, die die Bedingungen (i)-(iii) aus Lemma II.2.1 erfüllt, heißt *affiner Zusammenhang* auf M . Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit affinem Zusammenhang ∇ . Erfüllt ∇ auch (iv) und (v), so heißt ∇ *Levi-Civita-Zusammenhang* auf (M, g) .

Bemerkung II.2.7. (a) Bemerkung II.2.2(a-b) und (II.2) gilt immer noch. Für eine Karte $\kappa: U \rightarrow V$ seien die Christoffelsymbole $\Gamma_{ij}^k: V \rightarrow \mathbb{R}$ wieder definiert durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \text{ also } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} (p \in U) = \Gamma_{ij}^k(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p.$$

Damit ist

$$\nabla_X Y = X^i \left(Y^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

(b) Gilt (v) in einer Karte in einem Punkt p so auch in jeder anderen Karten, die p enthält: Seien x^1, \dots, x^m bzw. y^1, \dots, y^m die Koordinaten zu zwei solcher Karten. Wir benutzen die Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} &\stackrel{(1.3)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \stackrel{(i)+(iii)}{=} \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &\stackrel{(i)+(1.3)}{=} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j}}_{\text{symmetrisch in } i \text{ und } j} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &\stackrel{(v)}{=} \text{für } x^i \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^j \partial y^i} + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \stackrel{\text{alles rückwärts}}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Wir haben bis jetzt zwar ∇ analog zum Fall von Untermannigfaltigkeiten definiert, doch ist noch nicht klar, dass es so eine Abbildung auch im semi-Riemannschen immer existiert und eindeutig ist. Das sagt der nächste Satz:

Satz II.2.8. *Für jede semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit existiert genau ein Levi-Civita Zusammenhang.*

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $\kappa : U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Wir zeigen, dass mit den Eigenschaften eines Levi-Civita Zusammenhangs die Christoffelsymbole eindeutig bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}}_{\text{Vektorfeld auf } U} \left(\underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{\in C^\infty(U)} \right) \stackrel{\text{metrisch}}{=} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= g\left(\Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \stackrel{\text{linear}}{=} \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \Gamma_{jk}^l g_{il} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{ij}^l g_{kl}.$$

Es gilt $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ wegen der Torsionsfreiheit. Damit haben wir

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{ik}^l g_{lj}.$$

Dann erhalten wir

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right).$$

Kurz (mit $g_{ij,m} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \tag{II.5}$$

Existenz: Wir definieren Γ_{ij}^k wie oben und erhalten dadurch ∇ . Es bleibt nachzurechnen, dass ∇ dann wirklich alle Eigenschaften aus Lemma II.2.1 erfüllt (machen wir hier nicht) und $\nabla_X Y$ damit wirklich zu einem glatten Vektorfeld wird. Für letztere muss man sich überlegen, dass das Ergebnis $(\nabla_X Y)(p)$ nicht von der Wahl der Karte um p abhängt. Dazu kann man einfach direkt nachrechnen, dass sich alles unter Koordinatenwechsel richtig verhält.* \square

Vorl. 13 - 28.11.

Bemerkung II.2.9. (i) Aus (II.5) folgt insbesondere wieder, dass die $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind.

*Alternativ (ohne lokale Koordinaten) rechnet man nach, dass für einen Levi-Civita Zusammenhang, die *Koszul-Formel* gelten muss:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])$$

mit $[X, Y]$ definiert durch $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ für alle $f \in C^\infty(M)$ (Das macht $[X, Y]$ zu einer Derivation wie in ÜA 15 und definiert damit ein Vektorfeld.). Damit wird $\nabla_X Y$ (da g nichtentartet ist, eindeutig bestimmt und existiert und man rechnet nach, dass es dann automatisch die gesuchten Eigenschaften erfüllt.)

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

- (ii) Aus der Eindeutigkeit des Levi-Civita Zusammenhang folgt insbesondere, dass für $M \subset \mathbb{R}^n$ mit induzierter Metrik ∇ genau die Projektion der Richtungsableitung D auf den Tangentialraum ist.

Beispiel II.2.10. Sei $(M = \mathbb{R}^2, g_E)$. Für die euklidischen Koordinaten gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$ und damit $\Gamma_{ij}^k = 0$. Für Polarkoordinaten (r, ϕ) haben wir, siehe Beispiel II.1.13:

$$g_{ij}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

Christoffelsymbole (da g Diagonalgestalt hat):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})^*$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} 1(0 + 0 - 0) = 0$$

Analog $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ und

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (0 + 2r - 0) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} 1(0 + 0 - 2r) = -r$$

Also gilt z.B.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \phi} = -r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Zum Vergleich:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \nabla_{-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \dots = -r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Geodätische auf abstrakten Mannigfaltigkeiten: Analog definieren wir für abstrakte Mannigfaltigkeiten:

Definition II.2.11. Eine Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ heißt *autoparallel* oder *Geodätische*, falls \dot{c} parallel entlang c ist, also $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ ist.

Lemma II.2.12. Für Geodätische c auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist

$$g(\dot{c}, \dot{c})(t) (= g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)))$$

konstant in t . Man sagt c ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

*keine Einsteinsche Summenkonvention hier – k kommt zu oft vor

Beweis.

$$\frac{d}{dt}g(\dot{c}, \dot{c})(t) = \dot{c}.g(\dot{c}, \dot{c})(t) = g(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \dot{c}) + g(\dot{c}, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}) = 0$$

wobei die erste Gleichheit folgt aus $\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = d_{c(t)}f(\dot{c}(t)) = (\dot{c}.f)(t)$ für $f(c(t)) = g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$. \square

Bemerkung II.2.13. (Geodätengleichung $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ in Koordinaten) Ganz analog wie auf der Untermannigfaltigkeit haben wir in einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ von M um $p \in U$ mit Koordinaten (x^1, \dots, x^m) ist $c(t) = \kappa^{-1}(x(t))$ und damit $\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)}$. Dann ist c genau dann Geodätische, wenn

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\kappa(c(t)))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m$$

gilt. Dies ist ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Damit folgt mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgender Satz sofort:

Satz II.2.14. (*Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen*) Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ und jedes $v \in T_pM$ existiert ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Geodätische $c: I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$. Für jede andere Geodätische $\tilde{c}: \tilde{I} \rightarrow M$ mit $\tilde{c}(0) = p$ und $\dot{\tilde{c}}(0) = v$ ist $c|_{I \cap \tilde{I}} = \tilde{c}|_{I \cap \tilde{I}}$.

Bemerkung II.2.15. Geodäten sind im Allgemeinen nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Was kann schiefgehen: Man erreicht in endlicher Zeit das 'Ende' der Mannigfaltigkeit. Z.B. bei der offenen Einheitskreisscheibe mit euklidischer Metrik ist jede Geodätische, die im Ursprung mit Geschwindigkeit Norm eins startet, nur für die Zeiten $t \in (-1, 1)$ definiert.

Aus dem letzten Satz und Beispiel II.2.3 bzw. Abbildung II.3 erhält man direkt:

Folgerung II.2.16. Die proportional der Bogenlänge parametrisierten Geraden in \mathbb{R}^n sind alle Geodätischen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n . Die proportional der Bogenlänge parametrisierten Großkreise sind alle Geodätischen der S^2 .

Bemerkung II.2.17. (Unter Isometrien) Sei $f: M \rightarrow N$ eine Isometrie zwischen zwei semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) . Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) und $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf (N, h) . Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Wir definieren

$$f_*X := df(X) \quad \text{also } (f_*(X))(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p))).$$

Die ist der *Push-Forward* des Vektorfeldes X .

Es gilt $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$, vgl. ÜA 22.

Sei $c: I \rightarrow M$ eine reguläre glatte Kurve. Ist $Z(t)$ ein Vektorfeld entlang $c(t)$, dann gibt es für jedes $t_0 \in I$ ein Vektorfeld $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ mit $Z(t) = \tilde{Z}(c(t))$ in einer Umgebung von t_0 . Wir haben für $p = f(c(t_0))$, dass:

$$(f_*\tilde{Z})(p) = d_{c(t)}f(\tilde{Z}(c(t))) = d_{c(t)}f(Z(t)).$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Für $Z = \dot{c}: (f_*\tilde{Z})(p) = (f \circ c)'(t_0) =: (f_*\dot{c})(t_0)$. Sei nun c eine Geodätische auf M . Dann gilt $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ und damit $\bar{\nabla}_{f_*\dot{c}}f_*\dot{c} = 0$. Wegen $(f_*\dot{c})(t) = (f \circ c)'(t)$ ist $f \circ c$ eine Geodätische auf N .

Da 'geodätisch sein' lokal nachgerechnet wird, gilt das auch für lokale Isometrien.

Folgerung II.2.18. (Geodätische auf dem Zylinder und Kegel) Der Zylinder und der Kegel sind beide lokal isometrisch zur euklidischen Ebene. Damit ergeben sich die Geodäten wie in Abbildung II.5 links.

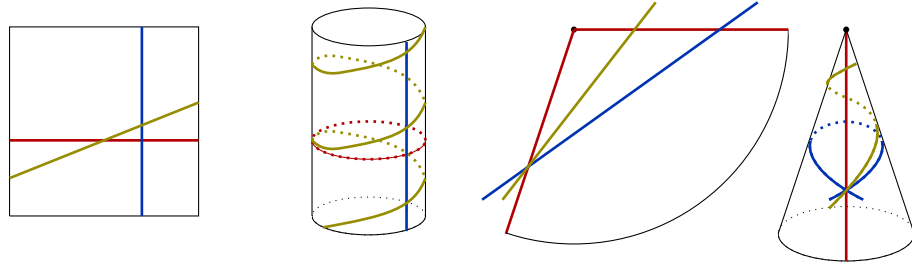


Abb. II.4.: Links: Die Abbildung $\phi: (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\sin x, \cos x, y)^T \in \text{Zylinder} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine lokale Isometrie. (Hierbei ist \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik und der Zylinder mit der induzierten Metrik versehen.) Geodäten im \mathbb{R}^2 sind Geraden. Ihre Bilder auf dem Zylinder sind Meridiane, Breitenkreise oder Schraubenlinien.

Rechts: Auch der Kegel ist lokal isometrisch zu euklidischen Ebene - links ist die Abwicklung des Kegels zu sehen. Hier können geodätische Schleifen entstehen, z.B. die blaue Geodäte im Bild. Ist der Winkel des abgerollten Kegels, also der Winkel an der Spitze links im Bild, größer als 180° gibt es keine geodätischen Schleifen mehr.

Definition II.2.19. Sei $\psi: M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Dann heißt

$$\text{Fix}(\psi) := \{p \in M \mid \psi(p) = p\}$$

Fixpunktmenge von ψ .

Lemma II.2.20. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\psi \in \text{Isom}(M, g)$. Sei $p \in \text{Fix}(\psi)$ und $X \in T_p M$ mit $d_p \psi(X) = X$. Dann verläuft die Geodätische $c: I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ ganz in $\text{Fix}(\psi)$.

Beweis. Da ψ eine Isometrie ist, ist $\bar{c}(t) := \psi(c(t))$ wieder eine Geodätische. Wegen $\bar{c}(0) = \psi(c(0)) = \psi(p) = p = c(0)$, $\dot{\bar{c}}(0) = d_{c(0)}\psi(\dot{c}(0)) = d_p\psi(X) = X = \dot{c}(0)$ und der Eindeutigkeit der Geodätische bei gleichen Anfangswerten muss $c = \bar{c}$ sein. \square

Folgerung II.2.21. Meridiane von Rotationsflächen sind Geodätische, s. Abb. II.5.

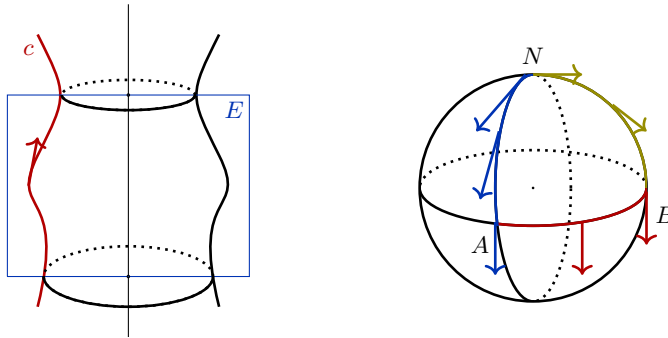


Abb. II.5.: Links: Sei E eine Ebene, die die Rotationsachse enthält. Die Spiegelung f an der Ebene E ist eine Isometrie der Rotationsfläche. Der Schnitt von E mit der Rotationsfläche sind nur zwei Kurven, Meridiane, die damit automatisch Geodätische sein müssen.
 Rechts: Paralleltransport ist wegababhängig

II.3. Parallelverschiebung

Wir haben im letzten Abschnitt den Levi-Civita Zusammenhang eingeführt, in erster Linie um Geodätische zu definieren und damit Geraden im \mathbb{R}^n als das Bild von Kurven ohne Beschleunigung auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Wir werden jetzt sehen, dass der Levi-Civita Zusammenhang auch dazu verwendet werden kann, um Vektoren in verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit miteinander zu vergleichen bzw. zumindest in Beziehung zu setzen. Das führt auf das Konzept der Parallelverschiebung. Dies wird oft ein wichtiges Hilfsmittel sein, z.B. wird sie vorkommen, wenn wir sehen, dass auch Geodätische auch im Riemannschen (Lorentzschen) den (Lorentzschen) Abstand zwischen Punkten realisieren.

Vorl. 14 - 30.11.

Im \mathbb{R}^n kann man mittels der Parallelverschiebung Vektoren an verschiedenen Punkten vergleichen. Auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten soll das mit Hilfe des Levi-Civita Zusammenhangs geschehen:

Definition II.3.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $c: I \rightarrow M$ eine reguläre glatte Kurve. Sei X ein glattes Vektorfeld längs I , d.h. $X: I \rightarrow TM$ mit $X(t) \in T_{c(t)}M$. Das Vektorfeld $X(t)$ heißt *parallel längs c* , falls $\nabla_{\dot{c}}X(t) = 0^*$.

Bemerkung II.3.2. In lokalen Koordinaten haben wir $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{c(t)}$ und damit

$$0 = \nabla_{\dot{c}}X(t) = \nabla_{\dot{c}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \dot{c}^i X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \dot{c}^i \frac{X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\dot{c}^i X^j \Gamma_{ij}^k + \dot{X}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (\text{II.6})$$

*Auch hier wieder wie bei $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}: c(t)$ und $X(t)$ sind keine Vektorfelder auf M (oder auch nur in einer Umgebung von $c(t_0)$). Da die Kurve regulär ist, also $\dot{c}(t) \neq 0$ ist für alle t , ist $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \{c(t)\}$ für ϵ klein genug ein Diffeomorphismus und \dot{c} und X kann nahe $c(t_0)$ glatt erweitert werden.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Beispiel II.3.3. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_E = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oder $(\mathbb{R}^n, g_{Minkowski} = \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$. In kartesischen Koordinaten gilt $\Gamma_{ij}^k = 0$. Nach (II.6) ist somit $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{c(t)}$ parallel genau dann, wenn $\dot{X}^i(t) = 0$ für alle i ist, also genau dann, wenn X konstant ist. Paralleles Vektorfeld ist damit also eine Verallgemeinerung des Begriffes paralleler Vektoren im \mathbb{R}^n .

Satz II.3.4. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: I \rightarrow M$ eine reguläre glatte Kurve, wobei $I = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist. Sei $t_0 \in I$. Zu $X_0 \in T_{c(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld X längs c mit $X(t_0) = X_0$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Spur $c(I)$ von c in einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ enthalten ist. Nach (II.6) und da die $\frac{\partial}{\partial x^k}$ in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden, gilt $\nabla_c X = 0$ genau dann, wenn

$$\dot{X}^k = -\dot{c}^i \Gamma_{ij}^k X^j.$$

Das ist ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für X^i . Somit existiert dafür mit den Anfangswerten $X^k(t_0) = X_0^k$ eine eindeutige Lösung. Wegen der Linearität ist diese Lösung auf ganz I definiert.

Sei nun $c(I)$ nicht in einer Karte enthalten. Idee – Zusammenkleben lokaler Lösungen: Wähle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $[a_1, b_1] \subset I$. Sei $a_1 < a_2 < \dots < a_n = b_1$ so gewählt, dass für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ die Spur von $c|_{[a_i, a_{i+1}]}$ in jeweils einer Karte $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i$ enthalten ist. Das ist immer möglich, da $c([a_1, a_n])$ kompakt ist. Sei $t_0 \in [a_i, a_{i+1}]$. Dann haben wir nach oben eine eindeutige Lösung X für alle t mit $c(t) \in U_i$. Damit erhalten wir $X(a_i)$ bzw. $X(a_{i+1})$. Der Anfangswert $X(a_i)$ liefert dann eine eindeutige Lösung von X_2 in U_{i-1} . Wegen der Eindeutigkeit von oben der Lösung mit Anfangswert $X(a_i)$ im Punkt $c(a_i)$ muss $X_2 = X$ auf $U_{i-1} \cap U_i$ sein. So erhält man induktiv eine eindeutige Lösung für $[a_1, b_1]$. Wählt man nun eine Folge von a_1 , bzw. b_1 mit $a_1 \rightarrow a$ und $b_1 \rightarrow b$. Dann erhalten wir eine Folge von Lösungen X , die auf einem immer größeren Intervall $[a_1, b_1]$ definiert sind und auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich jeweils übereinstimmen. Damit haben wir die Existenz und Eindeutigkeit von X auf ganz (a, b) .

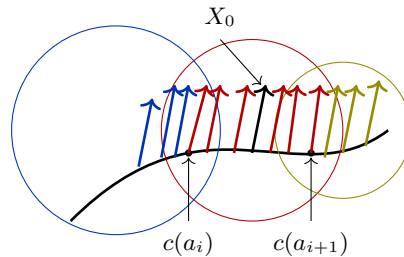


Abb. II.6.: Konstruktion des parallelen Vektorfeldes in den einzelnen Karten

□

Definition II.3.5. Sei $c: I \rightarrow M$ wie oben. Seien $t_0, t_1 \in I$. Die Abbildung

$$\|_{t_0, t_1}^c: T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M, X_0 \mapsto X(t_1),$$

wobei $X(t)$ das parallele Vektorfeld längs c mit $X(t_0) = X_0$ ist, heißt *Parallelverschiebung* längs c .

Satz II.3.6.

- (a) $\|_{t_0, t_1}^c$ ist eine lineare Abbildung.
- (b) $\|_{t_0, t_1}^c: (T_{c(t_0)}M, g_{c(t_0)}) \rightarrow (T_{c(t_1)}M, g_{c(t_1)})$ ist eine Isometrie.
- (c) $\|_{t_0, t_2}^c = \|_{t_1, t_2}^c \cdot \|_{t_0, t_1}^c$

Beweis. a) Linearität klar, da ∇ linear

c) Klar nach Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des AWP für parallele Vektorfelder.

b) Sei $X_0, Y_0 \in T_{c(t_0)}(M)$. Seien X und Y die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs

c. Dann gilt (mit $X = \tilde{X} \circ c$ und $Y = \tilde{Y} \circ c$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{c(t)}(X(t), Y(t)) &= \dot{c}(g_{c(t)}(\tilde{X}(c(t)), \tilde{Y}(c(t)))) \\ &\stackrel{\text{metrisch}}{=} g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}} \tilde{X}, \tilde{Y}) + g(\tilde{X}, \nabla_{\dot{c}} Y) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $g(X, Y)(t) := g_{c(t)}(X(t), Y(t))$ konstant und somit

$$g_{c(t_1)}(\|_{t_0, t_1}^c(X_0), \|_{t_0, t_1}^c(Y_0)) = g_{c(t_1)}(X(t_1), Y(t_1)) = g_{c(t_0)}(X(t_0), Y(t_0)) = g_{c(t_0)}(X_0, Y_0). \quad \square$$

Bemerkung II.3.7. Die Parallelverschiebung stellt einen Zusammenhang zwischen Tangentialräumen an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit her.

Entlang einer Geodätischen ist ihr Tangentialvektorfeld immer parallel (Deshalb nennt man Geodätische auch autoparallele Kurven). Für Paralleltransport entlang einer Geodätischen folgt nach Satz II.3.6, dass der Winkel zwischen dem parallelen Vektorfeld und der Geodätischen immer konstant sein. Außerdem darf sich die Länge des Vektorfeldes nicht ändern. Das bestimmt das parallele Vektorfeld im Falle von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten schon eindeutig. Im Bild II.5 rechts sehen wir den Paralleltransport entlang eines (stückweise glatten) Weges der durch drei Großkreisabschnitte (Großkreise sind Geodäten) gebildet wird. An diesem Beispiel sehen wir, dass die Parallelverschiebung abhängig von der Kurve ist, entlang derer verschoben wird! Später werden wir ein Maß kennenlernen, dass diese Abhängigkeit im gewissen Sinne misst – die Krümmung.

Man kann aus der Parallelverschiebung auch die kovariante Ableitung wieder konstruieren:

Satz II.3.8. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: I \rightarrow M$ eine reguläre glatte Kurve, $t_0 \in I$. Dann gilt

$$(\nabla_{\dot{c}} X)(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|_{t, t_0}^c (X(t)) - X(t_0)}{t - t_0}$$

für jedes glatte Vektorfeld X längs c .*

*Der Limes findet im Vektorraum $T_{c(t_0)}M$ statt.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Beweis. Sei $e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)$ eine Basis von $T_{c(t_0)}M$. Seien $e_1(t), \dots, e_n(t)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs c . Nach Satz II.3.6.b, folgt dass die $e_i(t)$ für jedes t eine Basis von $T_{c(t)}M$ bilden. Sei $X(t) = X^j(t)e_j(t)$. Dann gilt

$$\nabla_{\dot{c}} X = \nabla_{\dot{c}}(X^j e_j) = X^j \underbrace{\nabla_{\dot{c}} e_j}_{=0 \text{ da parallel}} + \dot{X}^j e_j = \dot{X}^j e_j$$

und mit Satz II.3.6

$$\|_{t,t_0}^c (X(t)) = X^j(t) \|_{t,t_0}^c e_j(t) = X^j(t) e_j(t_0).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\|_{t,t_0}^c (X(t)) - X(t_0)}{t - t_0} &= \frac{X^j(t) e_j(t_0) - X^j(t_0) e_j(t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{X^j(t) - X^j(t_0)}{t - t_0} e_j(t_0) \rightarrow \dot{X}^j(t_0) e_j(t_0) = (\nabla_{\dot{c}} X)(t_0) \quad \text{für } t \rightarrow t_0. \quad \square \end{aligned}$$

II.4. Geodätische als Spezialfall von Bewegungsgleichungen zu einem Potential

Vorl. 15 - 05.12.

Ein Teilchen mit Masse m werde durch ein Kraftfeld $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Kurve $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bewegt. Dann ist nach Newton $F = m\ddot{c}$. Ein Teil dieser Kraft sei dafür verantwortlich, dass das Teilchen sich auf einer Untermannigfaltigkeit M bewegt, z.B. gibt es Zwangskräfte die auf einen Mitfahrer in einem Karussell wirken, damit er auf der Kreisbahn bleibt. Es sei also $F = F_1 + F_2$, wobei F_1 nur dafür verantwortlich sei, das Teilchen auf M zu halten. Es gelte also $F_1(p) \perp T_p M$ für alle $p \in M$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle unsere auftretenden Kräfte in F_2 konservativ sind, d.h. es ist $F = -\text{grad}_{\mathbb{R}^n} V$ für eine Funktion $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die Potential genannt wird (z.B. kommt die Gravitationskraft von einem Potential $V_{\text{pot}}(x^1, x^2, x^3) = mgx^3$ mit $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

Da wir wissen, dass das Teilchen sich nur auf M bewegt, ist die Bewegung mittels

$$m \text{pr}_{T_{c(s)}M} \ddot{c}(s) (= m \nabla_{\dot{c}} \dot{c}) = -\text{pr}_{T_{c(s)}M} \text{grad}_{\mathbb{R}^n} V \quad (\text{II.7})$$

bestimmt.

Sei $\kappa: U \subset M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte von M . Die Koordinaten auf U' nennen wir q^i . Dann ist $c(s) = \kappa^{-1}(q(s))$ und damit $\dot{c}(s) = \dot{q}^i \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial q^i}(q(s)) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} |_{c(s)}$.

Das Potential sei in den Koordinaten als $\tilde{V}(q) = V(\kappa^{-1}(q))$ gegeben, also $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^i} = \langle \text{grad}_{\mathbb{R}^n} V, \frac{\partial}{\partial q^i} \rangle$.

II.4. Geodätische als Spezialfall von Bewegungsgleichungen zu einem Potential

Sei $\text{pr}_{T_{c(s)}M} \text{grad}_{\mathbb{R}^n} V = b^j \frac{\partial}{\partial q^j}$. Skalarprodukt mit $\frac{\partial}{\partial q^\ell}$ liefert: $(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} =) \langle \text{grad}_{\mathbb{R}^n} V, \frac{\partial}{\partial q^\ell} \rangle = b^j g_{j\ell}$ und damit $b^j = g^{j\ell} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell}$. Wir nennen $\text{grad}_g V := \text{pr}_{T_{c(s)}M} \text{grad}_{\mathbb{R}^n} V$, den Gradienten von V bzgl. g – für eine allgemeine Definition von grad_g auf abstrakten Mannigfaltigkeiten s. ÜB 9.

Dann ist (II.7) in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \dot{q}^i \dot{q}^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \frac{\partial}{\partial q^j} + \dot{q}^i \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} = (\Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j + \ddot{q}^k) \frac{\partial}{\partial q^k}$$

und damit haben wir

$$m(\ddot{q}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{q}^i \dot{q}^k) \frac{\partial}{\partial q^j} = -g^{j\ell} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \frac{\partial}{\partial q^j}, \quad (\text{II.8})$$

Wir wollen nun diese Gleichung mittels Energien schreiben. Dazu betrachten wir die kinetische Energie T des Teilchens als Funktion von q und \dot{q} :

$$T(q(s), \dot{q}(s)) = \frac{m}{2} \langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle = \frac{m}{2} g_{ij}(q(s)) \dot{q}^i(s) \dot{q}^j(s).$$

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden die Zeitabhängigkeit/Argumente nicht mehr explizit hin. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q^\ell} &= \frac{m}{2} g_{ij,\ell} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} &= m g_{\ell j} \dot{q}^j \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} &= m g_{\ell j,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + m g_{\ell j} \ddot{q}^j. \end{aligned}$$

Wir definieren die *Lagrangefunktion* $L(q, \dot{q}) := T(q, \dot{q}) - \tilde{V}(q)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\ell} - \frac{\partial L}{\partial q^\ell} &= \frac{d}{ds} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} - \frac{\partial T}{\partial q^\ell} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \\ &= m g_{\ell k,i} \dot{q}^i \dot{q}^k + m g_{\ell j} \ddot{q}^j - \frac{m}{2} g_{ik,\ell} \dot{q}^i \dot{q}^k + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^\ell} \\ &= m g_{\ell j} \left(\ddot{q}^j + \frac{1}{2} g^{jr} \dot{q}^i \dot{q}^k (g_{ir,k} + g_{kr,i} - g_{ik,r}) \right) + g_{\ell j} g^{jr} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^r} \\ &= g_{\ell j} \underbrace{\left(m(\ddot{q}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{q}^i \dot{q}^k) + g^{jr} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q^r} \right)}_{=0 \text{ nach (II.8)}}. \end{aligned}$$

Wir haben also nachgerechnet, dass (II.8) gleich der Lagrangegleichung

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\ell} = \frac{\partial L}{\partial q^\ell} \quad \ell = 1, \dots, m \quad (\text{II.9})$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

ist. Insbesondere haben wir gesehen, dass man beim Ausrechnen der Lagrangegleichung implizit die Christoffelsymbole mit ausrechnet. Des Weiteren erhält man (für $V = 0$ und $m = 1$) die Gleichung $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ (also die Geodätengleichung).

Beispiel II.4.1. Wir betrachten wieder \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten (r, ϕ) , also $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2)$, und $V = 0$, $m = 1$. Dann sind die Lagrangegleichungen (also hier die Geodätengleichung)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} &\implies \frac{d}{ds} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} &\implies \frac{d}{ds} \dot{r} = r \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt, dass $r^2 \dot{\phi}$ entlang Geodätischer der \mathbb{R}^2 konstant ist. Das entspricht der Drehimpulserhaltung (bzgl. der Drehung um den Ursprung), der aus der Rotationssymmetrie der Metrik folgt. Allgemein sieht man also:

Ist $L(q^i, \dot{q}^i)$ nicht explizit von q^j abhängig, dann ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$ entlang der Lösungskurven konstant, also eine *Erhaltungsgröße*.

Rechnen wir auch noch die Zeitableitungen aus, erhalten wir die Geodätengleichung in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2r^{-1} \dot{r} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Weil das die Geodätengleichung ist, kann man daraus nun direkt die Christoffelsymbole ablesen, die wir direkt schon in Beispiel II.2.10 ausgerechnet hatten. Z.B. $\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \Gamma_{rr}^{\phi} = 0$ und $\Gamma_{r\phi}^{\phi} = r^{-1}$ aus der ersten Gleichung.

Als nächsten wollen wir die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* ableiten. Das werden im Gegensatz zur Lagrangegleichung erste Ordnung Differentialgleichungen sein, die jedoch äquivalent zu den Lagrangegleichungen sind.

Dazu führen wir Hilfsvariablen ein - die *verallgemeinerten Impulse*: $p_i := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = m g_{ij} \dot{q}^j$. Dann ist $\dot{q}^j = \frac{1}{m} g^{ji} p_i$ und wir betrachten nun die kinetische Energie in Abhängigkeit von q^i und p_i , statt bisher von q^i und \dot{q}^i : $\tilde{T}(q, p) = T(q, \dot{q}(p))$. Wir definieren die *Hamiltonfunktion* $H(q, p) = \tilde{T}(q, p) + \tilde{V}(q)$.

Dann kann man nachrechnen, dass die Lagrangegleichung (II.9) äquivalent zu den *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{II.10}$$

II.5. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen

einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung, ist. Im Falle von Geodätischen, also $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$, nennt man die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen *geodätischen Fluss*.

Die Lagrangegleichungen sind gut, wenn man direkt die Bewegungsgleichungen ausrechnen will. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind etwas besser, wenn man Erhaltungsgrößen, vgl. z.B. ÜA 27, studieren will. Insbesondere ist H selbst eine Erhaltungsgröße, da $H(q^i(s), p_i(s))$ wegen

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = -\dot{p}_i \dot{q}^i + \dot{q}^i \dot{p}_i = 0$$

konstant in t ist.

Bei Geodätischen, also $V = 0$, ist die Erhaltung von H einfach, die Aussage, dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, s. Lemma II.2.12.

Zu Beispiel II.4.1: Wegen $V = 0$ ist $L = T = H$ und damit $p_r = \dot{r}$ und $p_\phi = r^2 \dot{\phi}$. Dann ist

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{2r^2}$$

und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{p}_r = -\frac{p_\phi^2}{r^3}, \quad \dot{r} = p_r, \quad \dot{p}_\phi = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2}.$$

Auch hier sieht man wieder, dass $p_\phi = r^2 \dot{\phi} = c_1$ konstant ist. Zusammen mit $H = c_2$ konstant reicht das, um zu schließen, dass

$$\dot{r}^2 + \frac{c_1^2}{r^2} = c_2$$

gilt. Die Konstanten c_i ergeben sich aus den Anfangswerten, und man muss zur Berechnung der Geodätischen nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung lösen. I.A. ist eine Reduktion auf nur eine Differentialgleichung so nicht möglich. Hat das betrachtete System genügend Symmetrien und damit genug Erhaltungsgrößen, dann geht das so (vgl. auch die Theorie der Integrablen Systeme).

Bemerkung II.4.2. Was sind die p_i für Objekte? Wegen $p_i = mg_{ij} \dot{q}^j$, ist p_i die i -te Komponente der linearen Abbildung $v \in T_{c(s)}M \mapsto g_{c(s)}(\dot{c}(s), v)$, also eines Elementes des Kotangentenraumes $T_{c(s)}^*M$. Hätte man direkt auch daran sehen können, dass der Index bei p_i unten steht und damit zu $p_i dx^i$ gehört.

II.5. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen

Definition II.5.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $V: M \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Dann heißt

$$S(c) := \int_a^b L(c(s), \dot{c}(s)) ds = \frac{m}{2} \int_a^b g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds - \int_a^b V(c(s)) ds$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Wirkungsfunktional. Ist $m = 1$, $V = 0$, dann heißt $E(c) := S(c)$ *Energie* von c .

Wir werden sehen, dass die kritischen Punkte des Wirkungsfunktionals genau die Lösungen der Lagrangegleichung sind – insbesondere also Geodätische kritische Punkte des Energiefunktionals sind. Doch zuvor brauchen wir noch einige Vorarbeiten:

Definition II.5.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit, sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Eine *Variation* von c ist eine glatte Abbildung

$$c: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

mit $c(0, s) = c(s)$ für alle $s \in [a, b]$. Gilt $c(u, a) = c(a)$ und $c(u, b) = c(b)$ für alle $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, so heißt $c(u, s)$ *Variation mit festen Endpunkten*. Man schreibt oft $c_u(s) := c(u, s)$. Das Vektorfeld $X(s) := \frac{\partial c}{\partial u}(0, s)$ entlang $c(s)$ heißt *Variationsvektorfeld*, vgl. Abb. II.7.

Für das Variationsvektorfeld X einer Variation mit festen Endpunkten gilt $X(a) = X(b) = 0$.

Gradient einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. einer Metrik g : Sei $f \in C^\infty(M)$. Da g nichtentartet ist, gibt es genau ein $Z \in \mathfrak{X}(M)$ mit $g(Z, X) = df(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dieses Vektorfeld heißt *Gradient* $\text{grad}_g f$ von f bzgl. g . Es ist in lokalen Koordinaten zu einer Karte $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$:

$$(\text{grad}_g f)(p \in U) = g^{ij}(\kappa(p)) \frac{\partial (f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^i}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad \text{kurz:} \quad \text{grad}_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Satz II.5.3 (Erste Variation der Energie). Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve, sei $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine Variation dieser Kurve ($c_u(s) = c(u, s)$). Sei X das zugehörige Variationsvektorfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \Big|_{u=0} S(c_u) &= - \int_a^b g_{c(s)}(X(s), m \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s) + \text{grad}_g V(c(s))) ds \\ &\quad + g_{c(b)}(X(b), m \dot{c}(b)) - g_{c(a)}(X(a), m \dot{c}(a)). \end{aligned}$$

Vorl. 16 - 07.12.

Beweis. Es ist $S(c_u) = mE(c_u) - \int_a^b V(c_u(s)) ds$. Wir berechnen die Ableitungen der einzelnen Summanden einzeln (wir lassen der Einfachheit halber bei $g_p(\cdot, \cdot)$ den Punkt p beim Schreiben weg):

Nach Kettenregel ist

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} \int_a^b V(c_u(s)) ds = \int_a^b d_{c(s)} V(X(s)) ds = \int_a^b g(X(s), \text{grad}_g V(c(s))) ds.$$

Weiterhin haben wir

II.5. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du}|_{u=0} E(c_u) &= \frac{d}{du}|_{u=0} \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}_u(s), \dot{c}_u(s)) ds = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{du}|_{u=0} g\left(\frac{\partial c}{\partial s}(u, s), \frac{\partial c}{\partial s}(u, s)\right) ds \\
 &= \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial s}(0, s), \frac{\partial c}{\partial s}(0, s)\right) ds \stackrel{(*)}{=} \int_a^b g\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial u}(0, s), \frac{\partial c}{\partial s}(0, s)\right) ds \\
 &= \int_a^b g(\nabla_{\dot{c}} X(s), \dot{c}(s)) ds = \int_a^b \left[\frac{d}{ds} g(X(s), \dot{c}(s)) - g(X(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s)) \right] ds \\
 &= g(X(s), \dot{c}(s))|_a^b - \int_a^b g(X(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Hierbei folgt (*) aus der lokalen Rechnung

$$\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 c^k}{\partial s \partial u} + \frac{\partial c^i}{\partial s} \frac{\partial c^j}{\partial u} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

und dieser Ausdruck wegen Torsionsfreiheit ($\sim \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) symmetrisch in s und t ist. \square

Für eine Variation längs c mit festen Endpunkten ist das Variationsvektorfeld an diesen Endpunkten gleich Null. Das nächste Lemma zeigt, dass jedes Vektorfeld längs c durch eine solche Variation entsteht:

Lemma II.5.4. *Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve, sei X ein glattes Vektorfeld längs c . Dann existiert eine Variation von c mit Variationsvektorfeld X . Falls $X(a) = X(b) = 0$ ist, so kann die Variation mit festen Endpunkten gewählt werden.*

Beweis. Wir beweisen als erstes den Spezialfall, dass der Support von X in einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ enthalten ist, also $c(s) \in U$ sobald $X(s) \neq 0$ ist. Wir definieren, vgl. Abbildung II.7,

$$c(u, s) := \begin{cases} \kappa^{-1}(\kappa(c(s)) + u d_{c(s)} \kappa(X(s))) & c(s) \in U \\ c(s) & c(s) \notin U \end{cases}$$

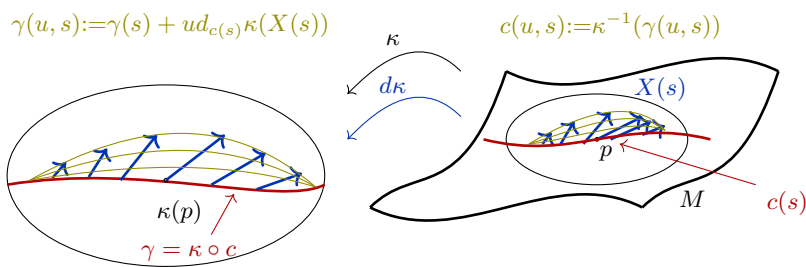


Abb. II.7.: Konstruktion der Variation in der Karte

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Es ist $c(0, s) = c(s)$. Weiterhin gilt

$$\frac{\partial c}{\partial u}(0, s) = d_{\kappa(c(s))}\kappa^{-1}(d_{c(s)}\kappa(X(s))) = X(s).$$

Für den allgemeinen Fall überdecken wir $c[a, b]$ mittels endlich vieler Karten $\kappa_i: U_i \rightarrow V_i$ und einer zugehörigen untergeordneten Zerlegung der Eins ρ_i . Wir setzen $X_i := \rho_i X$, also $X = \sum_i X_i$. Für $i = 1$ machen wir die Konstruktion von oben und erhalten eine Variation $c_1(u, s)$ von $c(s)$ mit Variationsvektorfeld X_1 . Für $i = 2$ setzen wir nun

$$c_2(u, s) := \begin{cases} \kappa_2^{-1}(\kappa_2(c_1(u, s)) + u d_{c_1(u, s)}\kappa_2(X_2(s))) & c_1(u, s) \in U_2 \\ c_1(u, s) & c_1(u, s) \notin U_2 \end{cases}$$

Wegen $c_2(0, s) = c_1(0, s) = c(s)$ und

$$\frac{\partial c_2}{\partial u}(0, s) = d_{\kappa_2(c(s))}\kappa_2^{-1}\left(d_{c(s)}\kappa_2\left(\frac{\partial c_1}{\partial u}(0, s)\right) + d_{c(s)}\kappa_2(X_2(s))\right) = X_1(s) + X_2(s)$$

ist $c_2(u, s)$ eine Variation von $c(s)$ mit Variationsvektorfeld $X_1 + X_2$. Für $i > 2$ fahren wir Karte für Karte so fort und erhalten nach endlichen vielen Schritten eine Variation $c(u, s)$ von $c(s)$ mit Variationsfeld X . \square

Folgerung II.5.5. *Sei c eine glatte Kurve $c: [a, b] \rightarrow M$. Dann ist c genau dann ein kritischer Punkt des Energiefunktionals, d.h.*

$$\frac{d}{du}\Big|_{u=0} E(c_u) = 0$$

für alle Variationen c_u von c mit festen Endpunkten, wenn c eine Geodätische für alle $s \in [a, b]$ ist.

Beweis. Ist c eine Geodätische, dann folgt $\frac{d}{du}\Big|_{u=0} E(c_u) = 0$ für alle Variationen c_u von c mit festen Endpunkten aus der ersten Variation des Energiefunktionals aus Satz II.5.3.

Sei nun umgekehrt für alle Variationen c_u von c mit festen Endpunkten $\frac{d}{du}\Big|_{u=0} E(c_u) = 0$. Nach letztem Lemma ist damit

$$\int_a^b g(X(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}) ds = 0$$

für alle Vektorfelder X entlang c mit $X(a) = 0$ und $X(b) = 0$. Das daraus $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ folgt entspricht der Aussage des fundamentalen Lemma der Variationsrechnung, was man aus dem \mathbb{R}^n kennt – der Beweis ist hier ganz analog:

Wir nehmen an, dass ein $s_0 \in (a, b)$ mit $\nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s_0) \neq 0$ existiert. Dann existiert ein $X_0 \in T_{c(s_0)}M$ mit $g(X_0, \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s_0)) > 0$. Sei X ein glattes Vektorfeld längs c mit $X(s_0) = X_0$. Wegen Stetigkeit von $s \mapsto g(X(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s))$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $g(X(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s)) > 0$ für alle $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \subset (a, b)$ gilt. Wir wählen eine glatte Funktion $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho(s) > 0$ für alle $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ und $\rho(s) = 0$ (Man

II.5. Das Variationsproblem zu den Bewegungsgleichungen

nennt ρ Abschneidefunktion.). Sei $Y(s) := \rho(s)X(s)$. Nach dem letzten Lemma gibt es eine Variation $c(u, s)$ von c mit festen Endpunkten und dem Variationsvektorfeld Y . Dann gilt

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} E(c_u) = - \int_a^b g(Y(s), \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s)) ds < 0.$$

Das ist ein Widerspruch, also gilt $\nabla_{\dot{c}} \dot{c}(s) = 0$ auf (a, b) und wegen Stetigkeit auf ganz $[a, b]$. \square

Analog wie die letzte Folgerung erhält man für das Wirkungsfunktional:

Folgerung II.5.6. (*Hamiltonsches Wirkungsprinzip*) Sei c eine glatte Kurve $c: [a, b] \rightarrow M$. Dann ist c ein kritischer Punkt des Wirkungsfunktionals, d.h.

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} S(c_u) = 0$$

für alle Variationen c_u von c mit festen Endpunkten, genau dann wenn c eine Lösung der zugehörige Lagrangegleichung $m\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\text{grad}_g V$ ist.

Bemerkung II.5.7. Man kann die obige Variation auch direkt für $\int_a^b L(q(s), \dot{q}(s)) ds$ für allgemeine L ausrechnen (Hier ist $q(s)$ wieder $c(s)$ in lokalen Koordinaten) und man erhält ganz analog für Variationen mit festen Endpunkten

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} S(c_u) = - \int_a^b g_{kl} \left(- \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) X^\ell ds$$

und damit wieder die Lagrangegleichungen. Sie sind also die Euler-Lagrangegleichungen des Wirkungsfunktionals (in lokalen Koordinaten).

Bemerkung II.5.8. Ist g Riemannsch, dann folgt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist

$$L(c)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} ds \right)^2 \leq \int_a^b ds \int_a^b g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) ds = (b-a)2E(c).$$

Ist g Lorentzsch, dann gilt ganz analog für kausale Kurven $\tau(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $g(\dot{c}, \dot{c})$ konstant, also c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Insbesondere hängt die Energie einer Kurve - im Gegensatz zur Länge - von der Parametrisierung ab.

Vorl. 17 - 12.12.

Folgerung II.5.9. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $p, q \in M$. Eine Kurve $c: [a, b] \rightarrow M$ minimiert genau dann die Energie unter allen stückweise glatten Kurven, die $p = c(a)$ und $q = c(b)$ verbinden, wenn c die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Beweis. Sei c' eine Kurve mit $p = c'(a)$ und $q = c'(b)$, die die Länge minimiert und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist $2(b-a)E(c') = L(c')^2 = \min L(c)^2 \leq 2(b-a)\min E(c)$ und c' minimiert auch die Energie.

Sei c' eine Kurve mit $p = c'(a)$ und $q = c'(b)$, die die Energie minimiert. Sei \tilde{c} eine Umparametrisierung von c' , so dass \tilde{c} nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist $2(b-a)E(\tilde{c}) = L(\tilde{c})^2 = L(c')^2 \leq 2(b-a)E(c')$. Also muss Gleichheit gelten und c' schon proportional zur Bogenlänge parametrisiert sein. Weiterhin ist $L(c')^2 = 2(b-a)E(c') \leq 2(b-a)\min \{E(c) \mid c \text{ nach Bogenlänge parametrisiert}\} = \min L(c)^2$. Also minimiert c' auch die Länge. \square

Folgerung II.5.10. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jede kürzeste Kurve von p nach q ist eine Geodäte und, wenn sie proportional nach Bogenlänge parametrisiert, ist eine Geodätische.

Bemerkung II.5.11. Nicht jede Geodätische ist Kürzeste! Z.B. die Großkreise auf der S^n .

Beispiel II.5.12. Das *Fermatsche Prinzip* (nach Pierre de Fermat) besagt, dass Licht in einem Medium zwischen zwei Punkten Wege nimmt, auf denen seine Laufzeit bzgl. Variationen des Weges extremal ist, vgl. auch ÜA 28.

Die Laufzeit des Lichtes bestimmt sich im Prinzip aus der Länge der Kurve $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrisiert nach Bogenlänge bzgl. g_E , auf der sich das Licht bewegt, allerdings ist zu beachten, dass sich je nach Medium (Luft, Wasser, Glas, etc.) die Lichtgeschwindigkeit mit dem Brechungsindex n ändert: Laufzeit $= \int_a^b n(c(t)) dt$, wobei $n: \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$ der ortsabhängige Brechungsindex ist. Für $n = 1$ (z.B. Luft) ist das genau die Länge der Kurve im Euklidischen Raum, ansonsten können wir es trotzdem als Länge der Kurve c bzgl. der konformen Metrik $g = n^2 g_E$ betrachten, denn dann ist $L_g(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})} dt = \int_a^b n(c(t)) dt$.

Im Allgemeinen: Licht bewegt sich auf lichtartigen Geodäten in einer Lorentzmannigfaltigkeit (M, h) , wobei eine Kurve $c: I \rightarrow M$ *lichtartig* heißt, falls $h_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0$ für alle t ist. Lokal sieht unsere Universum (unsere Lorentzmannigfaltigkeit) in guter Näherung aus, wie ein Produkt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ mit Metrik $g - (dt)^2$. Befinden wir uns in Luft ist $g = g_E$, in Medien mit anderem Brechungsindex $g = n^2 g_E$.

In unserer Sprache heißt das, dass die Spur des Lichtes eine Geodäte ist für die Metrik $g = n g_E$.

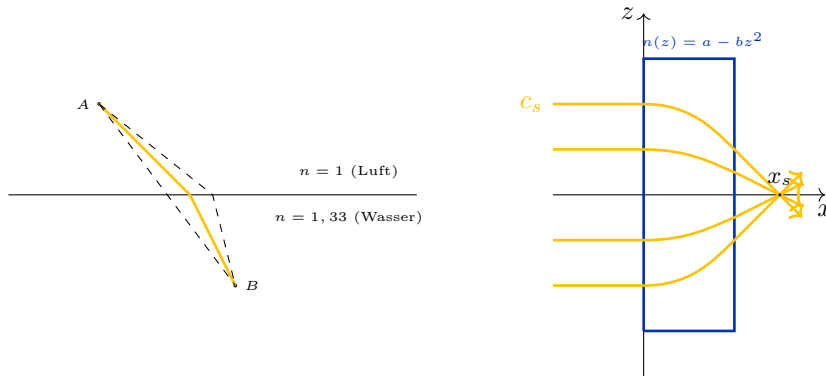


Abb. II.8.: Links: Extremale Weglänge zwischen A und B in zwei unterschiedlichen Medien – vergleiche Snells Gesetz*. Hier ist n nicht glatt, sondern hat einen Sprung. Strenggenommen fällt es somit nicht unter unsere Voraussetzungen, da wir hier der Einfachheit immer mit glatten Metriken arbeiten. Aber man sieht hier ganz schön, dass dafür die Formulierung über das Variationsproblem sehr gut ist, da dort die integrale noch immer Sinn ergeben. Rechts: Das blaue Rechteck soll eine Gradientenlinse[†] darstellen, d.h. in diesem Bereich ist der Brechungsindex ortsabhängig – hier $n(z) = a - bz^2$. Sei c_s ein Lichtstrahl, der sich achsenparallel auf die Linse zu bewegt und diese in $(0, s)$ erreicht. Dann wird dieses in der Linse zur Achse hin abgelenkt und nach Austritt aus der Linse erreicht es die x -Achse in x_s . Dann gilt $x_s = \text{const} + O(s^2)$, vgl. ÜA 29/30. D.h. achsenparallele Strahlen fokussieren in einem Punkt.

Für Lorentzmannigfaltigkeiten erhalten wir ein analoges Resultat:

Folgerung II.5.13. Sei (M, g) eine Lorentzmannigfaltigkeit. Jede längste zeitartige Kurve von p nach q ist eine Geodäte und wenn sie proportional nach Bogenlänge parametrisiert ist eine Geodätische.

II.6. Krümmung

Wir wollen als nächstes einen Krümmungsbegriff für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten definieren:

Definition II.6.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z$$

heißt *Riemannscher Krümmungstensor* von (M, g) .

*https://de.wikipedia.org/wiki/Snelliussches_Brechungsgesetz

†https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Satz II.6.2. Für $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

- (i) (tensoriell in den drei Komponenten) $R(f_1X, f_2Y)(f_3Z) = f_1f_2f_3R(X, Y)Z$.
- (ii) (Symmetrien) $R(X, X)Z = 0$ und $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$ und $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
- (iii) (Bianchi-Identität) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

Beweis. Durch Nachrechnen. □

Man sagt R ist ein (1,3)-Tensor.*

Bemerkung II.6.3. (i) Damit R tensoriell in den drei Komponenten ist, braucht man den $\nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z$ in der Definition.

- (ii) Aus der Symmetrie $R(X, X)Z = 0$ und tensoriell in den drei Komponenten folgt für eindimensionale Mannigfaltigkeiten sofort, dass $R \equiv 0$ ist.
- (iii) Für den euklidischen Raum und den Minkowskiraum gilt $R = 0$. Mannigfaltigkeiten mit $R = 0$ werden *flach* genannt.
- (iv) Aus tensoriell in den drei Komponenten folgt, dass R für jeden Punkt $p \in M$ eine Abbildung

$$R_p: T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$$

definiert.

- (v) In einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ von M um p gilt wegen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \dots \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^\ell \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^\ell \Gamma_{ik}^m\right)}_{=: R_{ijk}^\ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell}. \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Wir setzen

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right).$$

Dann ist $R_{ijkl} = R_{ijk}^r g_{rl}$ und wegen der Symmetrien gilt

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk}.$$

*Ein (n, m) -Tensor ist eine multilineare Abbildung $T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{m\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{n\text{-mal}}$,

die tensoriell ($=C^\infty(M)$ -linear) in den m Komponenten ist.

Lemma II.6.4. Sei $f: M \rightarrow N$ eine lokale Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) . Sei R bzw. \bar{R} der Riemannsche Krümmungstensor auf (M, g) bzw. (N, h) . Dann gilt für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$f_*R(X, Y)Z = \bar{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z.$$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors und Übungsaufgabe 20. \square

Folgerung II.6.5. Für den Zylinder oder Kegel im \mathbb{R}^3 mit induzierter Metrik und für den flachen Torus ($= \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) gilt $R = 0$.

Folgerung II.6.6. Weder die Sphäre S^n noch der hyperbolische Raum \mathbb{H}^n , jeweils mit induzierter Metrik, sind lokal isometrisch zum euklidischen Raum.

Was misst R nicht? Das letzte Lemma veranschaulicht noch mal, dass die Riemannsche Krümmung eine intrinsische Größe, also (im Fall von Untermannigfaltigkeiten) nicht von der Einbettung in den umliegenden Raum abhängt. Das ist eigentlich schon vorher klar, da R nur aus den Metrik berechnet wird, allerdings steht das im Gegensatz dazu, was allgemeinsprachlich als Krümmung bezeichnet wird. Der Zylinder im \mathbb{R}^3 hat wie oben gesehen keine Riemannsche Krümmung. Krümmung im umliegenden Raum wird mittels der zweiten Fundamentalform beschrieben:

Bemerkung II.6.7. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei ∇ bzw. R der zur induzierten Metrik gehörige Levi-Civita Zusammenhang bzw. Riemannsche Krümmungstensor. Sei II die zweite Fundamentalform, also $II(X, Y) := D_X Y - \nabla_X Y$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann erhält man durch direktes Nachrechnen, dass für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle R(X, Y)W, Z \rangle = \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle$$

gilt.

Insbesondere ist für $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $II(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}) =: h_{ij}\nu$ mit ν ein (lokales) Einheitsnormalenvektorfeld

$$R_{ijkl} = h_{il}h_{jk} - h_{jl}h_{ik}.$$

In Dimension 2 kann wegen der Symmetrien nur $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$ nicht Null sein. Also ist

$$R_{1221} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{12} = \det h_{ij}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} =: K$$

heißt Gaußkrümmung. Die Definition von K als $\frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}$ hängt von der ersten und zweiten Fundamentalform ab und sieht nicht wirklich so aus, als ob das eine intrinsische Größe wäre, so wie die erste Gleichheit von oben zeigt. Deshalb hat Gauß diese Einsicht *Theorema egregium* ('hervorragend wichtigen Lehrsatz') genannt.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Interpretation von R_p Nach Satz II.3.8 kann man $\nabla_X Y$ als Grenzwert des Paralleltransports verstehen, siehe Appendix A für die zugehörigen Rechnungen.

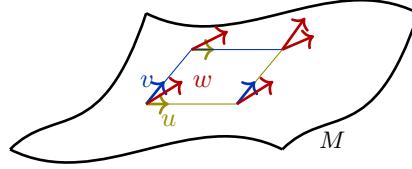


Abb. II.9.: Betrachtet man ein 'infinitesimal kleines' Parallelogramm mit den Seitenvektoren u und v und bewegt w mittels Paralleltransport einmal links und einmal rechts herum, dann entstehen im allgemeinen zwei verschiedene Vektoren 'in der rechten oberen Ecke'. Deren Differenz durch Fläche des Parallelogramms ergibt im Limes Parallelogramm $\rightarrow p$ den Vektor $\frac{R_p(u,v)w}{\det g|_{\text{span}(u,v)}}$.

Vorl. 18 - 14.12.

Definition II.6.8. Sei (M^m, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

- (i) Sei $m > 1$. Für jeden zweidimensionalen nichtentarteten Untervektorraum $E \subset T_p M$ (nichtentartet heißt, dass $g_p(\cdot, \cdot)|_{E \times E}: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-entartet ist.*) mit Basis (v, w) ist die *Schnittkrümmung* definiert als

$$\text{sec}_p(E) = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} \in \mathbb{R}$$

- (ii) Die *Ricci-Krümmung* auf $T_p M$ ist als die bilineare symmetrische Abbildung

$$\text{Ric}_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) &= \text{Ric}_{ij}(p) = \text{Spur}_g \left(R \left(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p : T_p M \rightarrow T_p M \right) \\ &= R^k_{kij}(p) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

definiert

(vgl. Appendix für die Definition der Spur)

Bemerkung II.6.9. Die Schnittkrümmung ist unabhängig von der Basiswahl $v, w \in VM$ und damit wohldefiniert: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(E)$. Dann ist $(\tilde{v} = av + bw, \tilde{w} = cv + dw)$ eine Basis von E und wir haben

*Es ist $g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2 = \det g|_{\text{span}\{v, w\}}$. Falls $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist, ist $\det g|_{\text{span}\{v, w\}}$ das Quadrat des Flächeninhalts des durch die Vektoren v und w aufgespannten Parallelogramms.

*Das ist automatisch erfüllt, wenn g Riemannsch ist.

$$\begin{aligned} g(R(\tilde{v}, \tilde{w})\tilde{w}, \tilde{v}) &= g(R(av + bw, cv + dw)cv + dw, av + bw) \\ &= (ad - bc)g(R(v, w)cv + dw, av + bw) \\ &= (ad - bc)^2 g(R(v, w)w, v) = (\det A)^2 g(R(v, w)w, v) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} g(Av, Av)g(Aw, Aw) - g(Av, Aw)^2 &= \det g|_{\text{span}\{\tilde{v}, \tilde{w}\}} = (\det A)^2 \det g|_{\text{span}\{v, w\}} \\ &= (\det A)^2 (g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2). \end{aligned}$$

Die Menge aller Schnittkrümmungen in einem Punkt $p \in M$ bestimmen den Riemannschen Krümmungstensor in dem Punkt eindeutig: Da R linear in allen Komponenten ist, kann man dies durch geeignete Polarisierung nachrechnen, also $\text{sec}_p(\text{span}\{v + w, u + z\})$ nachrechnen. Ähnlich wie man nachrechnet, dass eine symmetrische Bilinearform $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind, wenn man alle $b(v, v)$ für $v \in V$ kennt.

Hängt die Schnittkrümmung nur von p und nicht von der Wahl $E \subset T_p M$ ab, schreibt man $\text{sec}(p) = \text{sec}_p(E)$, (in Dimension 2 ist das immer so, da $T_p M$ zweidimensional ist), dann gilt

$$g_p(R_p(v, w)z, u) = \text{sec}(p) (g_p(w, z)g_p(v, u) - g_p(v, z)g_p(w, u)).$$

Bemerkung II.6.10. Da $\text{Ric}_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch und $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und nichtentartet ist, existiert $\text{Ric}_p: T_p M \rightarrow T_p M$ als der durch $\text{Ric}_p(v, w) = g_p(\text{Ric}_p(v), w)$ eindeutig bestimmte Endomorphismus Sei $\text{Ric}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_j \text{Ric}_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Wir haben dann

$$\text{Ric}_{ij} = g \left(\text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \text{Ric}_i^k g_{kj},$$

also $\text{Ric}_i^j = \text{Ric}_{ik} g^{kj}$.

Definition II.6.11. Die *Skalarkrümmung* auf M ist die Funktion $\text{scal}: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{scal}(p) = \text{Spur}(\text{Ric}_p(\cdot)) = \text{Ric}_i^i(p) = \text{Ric}_{ij}(p)g^{ij}(p) \in \mathbb{R}.$$

Beispiel II.6.12. Für \mathbb{R}^n mit euklidischer oder Minkowskimetrik in Standardkoordinaten ist $\Gamma_{ij}^k = 0$ und damit $R_{ijk}^\ell = 0$, also $R = 0$. Mannigfaltigkeiten mit $R = 0$ heißen *flach*.

Für \mathbb{S}^n mit induzierter Metrik gilt $\text{sec}_p(E) = 1$ für alle $p \in M$ und Ebenen $E \subset T_p M$. Für \mathbb{H}^n mit induzierter Metrik gilt $\text{sec}_p(E) = -1$ für alle $p \in M$ und Ebenen $E \subset T_p M$. Ist die Schnittkrümmung in einem Punkt p konstant, dann gilt in diesem Punkt

$$\begin{aligned} \text{sec}_p(E) = \text{sec}(p) &=: c \\ \implies \text{Ric}_{ij} &= R_{kijl} g^{kl} = c(g_{kl}g_{ij} - g_{kj}g_{il})g^{kl} = c(m-1)g_{ij} \\ \implies \text{Ric}_i^j &= \text{Ric}_{ik} g^{kj} = c(m-1)g_{ik}g^{kj} = c(m-1)\delta_i^j \\ \implies \text{scal}_g &= \text{Ric}_i^i = m(m-1)c. \end{aligned}$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Da nach Lemma II.6.4 sich der Riemannsche Krümmungstensor gut unter lokalen Isometrien verhält, stimmt dies auch für die auch für die abgeleiteten Krümmungsgrößen. Damit folgt aus dem letzten Beispiel:

Folgerung II.6.13. *Weder die Sphäre S^n noch der hyperbolische Raum \mathbb{H}^n , jeweils mit induzierter Metrik, sind lokal isometrisch zum euklidischen Raum.*

Bemerkung II.6.14. Interpretation von Ric und scal (hier ohne Beweis);

- (i) Die Skalar­krümmung in einem Punkt $p \in M^n$ vergleicht das Volumen kleiner Bälle in M um p (gemessen bzgl. g) mit dem Volumen von Bällen im \mathbb{R}^n (gemessen bzgl. g_E) mit gleichem Radius:

$$\text{vol}_g(B_\epsilon(p) \subset M) = \text{vol}_g(B_\epsilon(p) \subset M) \left(1 - \frac{\text{scal}_p}{6(n-2)} \epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right).$$

- (ii) Die Ricci-Krümmung tritt ähnlich als Term zweiter Ordnung in der Taylorentwicklung der Volumenform auf (bzw. $\text{Ric}(v)$ misst, wie sich das Volumen in Richtung von v ändert).

II.7. Die Exponentialabbildung

Wir wollen in diesem Abschnitt um einen Punkt p einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) Koordinaten konstruieren, die an Polarkoordinaten der Ebene bzw. sphärischen Koordinaten im \mathbb{R}^n orientiert sind. Insbesondere wollen wir, dass eine Koordinate dem Abstand zu p entspricht.

Nach Folgerung II.5.10 wissen wir, dass der Abstand durch eine Geodätische dargestellt wird. Deshalb wollen wir zuerst eine Abbildung definieren, die radialen Geodätische benutzt.

Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Für $v \in T_p M$ bezeichnen wir mit c_v die eindeutig bestimmte Geodäte mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c}_v(0) = v$. Dann gilt $c_{\alpha v}(s) = c_v(\alpha s)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$: Da $c_{\alpha v}(0) = c_v(0) = p$ und $\dot{c}_{\alpha v}(0) = \alpha \dot{c}_v(0) = \alpha v$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\bar{c} := c_{\alpha v}$ wieder eine Geodätische ist:

$$\nabla_{\dot{\bar{c}}(s)} \ddot{\bar{c}}(s) = \nabla_{\alpha \dot{c}_v(\alpha s)} \alpha \dot{c}_v(\alpha s) = \alpha^2 (\nabla_{\dot{c}_v} \dot{c}_v)(\alpha s) = 0.$$

Definition II.7.1. Die *Exponentialabbildung* $\exp_p: D_p \subset T_p M \rightarrow M$ ist definiert als $\exp_p(v) = c_v(1)$, wobei $D_p := \{v \in T_p M \mid 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_v\}$.

Bemerkung II.7.2.

- (i) $\exp_p(0) = p$
(ii) $\exp_p(sv) = c_{sv}(1) = c_v(s)$. Damit ist D_p sternförmig bezüglich $0 \in T_p M$.

II.7. Die Exponentialabbildung

- (iii) Das Differential $d_0 \exp_p: T_0 D_p = T_0 T_p M \rightarrow T_p M$ ist gegeben durch den kanonischen Isomorphismus $\Phi_0: T_0 T_p M \rightarrow T_p M$, $[s \mapsto sv]_0 \mapsto v$. Sei $v \in T_p M$. Dann ist $\Phi_0^{-1}v \in T_0 T_p M$, und wir haben

$$d_0 \exp_p(\Phi_0^{-1}v) = d_0 \exp_p \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (sv) \right) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_v(s) = v.$$

- (iv) Die Exponentialabbildung ist glatt. Das folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösung der Geodätengleichung von den Anfangswerten.

Folgerung II.7.3. Zu $p \in M^m$ existiert eine offene Umgebung $\mathcal{V}_p \subset D_p \subset T_p M$ von 0, so dass $\exp_p: \mathcal{V}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Folgt aus der letzten Bemerkung und dem Umkehrsatz I.3.30. □

Nun wollen wir mit Hilfe der Exponentialabbildung 'gute' Koordinaten in der Umgebung von p wählen. Dazu müssen wir nur noch \mathcal{V}_p mit einer Teilmenge von \mathbb{R}^m identifizieren. Dazu wählen wir ein Orthonormalsystem e_1, \dots, e_m von $(T_p M, g_p)$, also $g_p(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$ mit $\epsilon_i = \pm 1$. Sei $A: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ definiert durch $(v^1, \dots, v^m) \mapsto v^i e_i$. Dann ist A ein linearer Isomorphismus und wir erhalten damit eine Karte $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}$.

Definition II.7.4. Die mittels $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}: U_p \rightarrow V_p := A^{-1}(\mathcal{V}_p) \subset \mathbb{R}^m$ erhaltenen Koordinaten um p nennt man *geodätische Normalkoordinaten*.

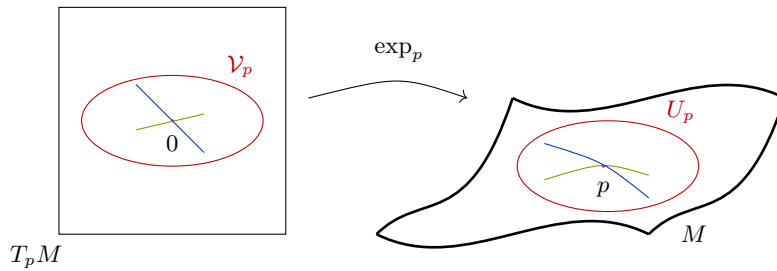


Abb. II.10.: Die Exponentialabbildung bildet Geraden durch $0 \in T_p M$ auf Geodäten durch p ab. Geodätische Normalkoordinaten sind bis auf die Wahl eines Koordinatensystems für $T_p M$, also unser A , durch $(\exp_p)^{-1}$ gegeben.

Satz II.7.5. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien $g_{ij}: V_p \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Gamma_{ij}^k: V_p \rightarrow \mathbb{R}$ die zu den geodätischen Normalkoordinaten κ um p zugehörigen Metrikkoeffizienten bzw. Christoffelsymbole. Dann gilt

$$\kappa(p) = 0, \quad g_{ij}(0) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

Beweis. $\kappa(p) = 0$ ist klar und $g_{ij}(0) = \epsilon_i \delta_{ij}$ folgt direkt aus Bemerkung II.7.2.iii. Sei $v = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$. Die Kurve $c(s) = \exp_p(sAv)$ ist Geodätische mit $c(0) = p$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

und $\dot{c}(0) = Av$. Für diese Geodätische lautet die Geodätengleichung in geodätischen Normalkoordinaten:

$$0 = \ddot{x}^k(s) + \Gamma_{ij}^k(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)$$

mit $x^k(s) = \kappa^k(c(s)) = sv^k$. Also gilt für $s = 0$

$$0 = 0 + \Gamma_{ij}^k(0)v^i v^j$$

für alle $v \in \mathbb{R}^m$. Daraus folgt $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ für alle i, j, k . \square

Vorl. 19 - 19.12.

Folgerung II.7.6. In geodätischen Normalkoordinaten gilt für die Taylorentwicklung der Metrikkoeffizienten $g_{ij}: V_p \rightarrow \mathbb{R}$ um 0

$$g_{ij}(x) = \epsilon_i \delta_{ij} + O(|x|^2).$$

Beweis.

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(0) + x^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) + O(|x|^2)$$

$$\stackrel{\text{Satz II.7.5}}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + x^k g_{ij,k}(0) + O(|x|^2)$$

$$\text{Bew. v. Satz II.2.8} \stackrel{=}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + x^k (\Gamma_{ki}^l(0)g_{lj}(0) + \Gamma_{kj}^l(0)g_{il}(0)) + O(|x|^2)$$

$$\stackrel{\text{Satz II.7.5}}{=} \epsilon_i \delta_{ij} + O(|x|^2) \quad \square$$

Satz II.7.7. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. In geodätischen Normalkoordinaten gilt

$$g_{ij}(x) = \epsilon_i \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(|x|^3).$$

Beweis. Bis zur ersten Ordnung haben wir die Gleichheit schon in der letzten Folgerung nachgerechnet. Wir müssen die zweiten Ordnungsterme, also $\frac{1}{2} g_{ij,kl}(0) x^k x^l$ berechnen: Es ist $g_{ij,k} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{im}$ (vgl. Bew. v. Satz II.2.8). Wegen des Satzes von Schwarz ist $g_{ij,kl}$ symmetrisch in k und l . Zusammen mit $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ ergibt sich

$$g_{ij,kl}(0) = \Gamma_{ki,l}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{kj,l}^m(0)g_{im}(0) = \Gamma_{li,k}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0)g_{im}(0). \quad (\text{II.12})$$

Wir zeigen als nächstes, dass

$$\Gamma_{ij,l}^k(0) + \Gamma_{li,j}^k(0) + \Gamma_{jl,i}^k(0) = 0 \quad (\text{II.13})$$

gilt: In geodätischen Normalkoordinaten sind die Geraden $s \mapsto sx$ durch den Ursprung Geodätische mit Geodätengleichung $\Gamma_{ij}^k(sx)x^i x^j = 0$. Differentiation nach s in $s = 0$ ergibt

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Gamma_{ij}^k(sx)x^i x^j = \Gamma_{ij,l}^k(0)x^l x^i x^j.$$

Das ist ein Polynom dritten Grades und Koeffizientenvergleich liefert genau Gleichung (II.13) für die Koeffizienten.

Weiterhin ist nach (II.11) $R_{kil}^j(0) = \Gamma_{il,k}^j(0) - \Gamma_{kl,i}^j(0)$, also

$$R_{kilj}(0) = (\Gamma_{il,k}^m(0) - \Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0). \quad (\text{II.14})$$

Insgesamt haben wir nun

$$\begin{aligned} 6g_{ij,kl}(0) &\stackrel{(\text{II.12})}{=} 3(\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0))g_{mj}(0) + 3(\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(\text{II.13})}{=} (3\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0) - 2\Gamma_{ik,l}^m(0) - 2\Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) \\ &\quad + (3\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0) - 2\Gamma_{jk,l}^m(0) - 2\Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} (\Gamma_{ki,l}^m(0) + \Gamma_{li,k}^m(0) - 2\Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) \\ &\quad + (\Gamma_{kj,l}^m(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0) - 2\Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2(\Gamma_{il,k}^m(0) - \Gamma_{kl,i}^m(0))g_{mj}(0) + 2(\Gamma_{jl,k}^m(0) - \Gamma_{kl,j}^m(0))g_{mi}(0) \\ &\stackrel{(\text{II.14})}{=} 2R_{kilj}(0) + 2R_{jkl i}(0) \end{aligned}$$

wobei (*) (II.12) als $\Gamma_{ki,l}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{kj,l}^m(0)g_{im}(0) = \Gamma_{li,k}^m(0)g_{mj}(0) + \Gamma_{lj,k}^m(0)g_{im}(0)$ verwendet.

□

Wir werden noch mehr über die Exponentialabbildung herausfinden und Anwendungen sehen. Dazu brauchen wir noch ein neues Konzept:

II.8. Jacobifelder

Ziel: Wir wollen das Verhalten von Geodäten mit 'nah beieinander liegenden' Anfangswerten untersuchen. Also Fragen wie: 'Streben die Geodäten dann eher voneinander weg oder aufeinander zu'? Für Mannigfaltigkeiten, bei denen wir die Geodätischen kennen, z.B. S^2 oder H^2 (vgl. ÜA 26) ist das leicht zu sehen. Bei der Sphäre streben die Geodätischen nach einiger Zeit wieder auf einander zu, dann wieder weg usw., während in der hyperbolischen Ebene die Geodätischen, sobald ihre Spuren verschieden sind, sich immer mehr voneinander weg bewegen. Wir werden sehen, dass das daher rührt, dass die Sphäre positive Krümmung hat während die hyperbolische Ebene negativ gekrümmt ist.

Auf eine Lorentzmannigfaltigkeit bewegt sich ein Teilchen, auf das keine externen Kräfte wirken, auf zeitartigen Geodätischen (das ist eine Folge des Äquivalenzprinzips). Hat man nun mehrere frei fallende Teilchen, bewegen sich diese Geodätischen im Allgemeinen auch aufeinander zu oder voneinander weg. Das sind die sogenannten Gezeitenkräfte.

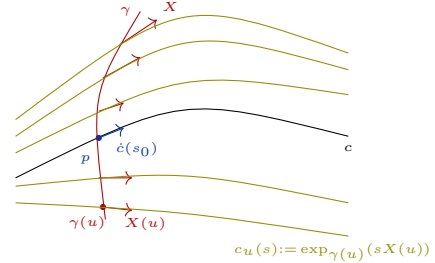
Im Allgemeinen ist die Frage a priori nicht leicht zu beantworten, da die Geodätengleichung nichtlinear ist. Deshalb schauen wir uns nur die ersten Ordnungseffekte an, d.h. wir linearisieren die Geodätengleichung.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Definition II.8.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Variation $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$ (vgl. Definition II.5.2) heißt *geodätische Variation längs* $c(s) := c(0, s)$, falls für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Kurve $c_u: s \mapsto c(u, s)$ eine Geodätische ist.

Bemerkung II.8.2. Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische, $s_0 \in [a, b]$, $p = c(s_0)$.

Sei $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $p = \gamma(0)$ und sei X ein glattes Vektorfeld längs γ mit $X(0) = \dot{c}(s_0)$. Dann ist $c(u, s) = \exp_{\gamma(u)}(sX(u))$ eine geodätische Variation. Alle geodätischen Variation sind wegen Eindeutigkeit von Geodätischen in dieser Form darstellbar.



Bemerkung II.8.3. Sei $J(s) := \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} c(u, s)$ das Variationsvektorfeld zu einer geodätischen Variation $c(u, s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{c}})^2 J(s) &= \nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial u} c(u, s) \Big|_{u=0} \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei (vgl. Erste Var. von E - Satz II.5.3)}}{=} \nabla_{\dot{c}} \nabla_{\partial_u c} \frac{\partial}{\partial s} c(u, s) \Big|_{u=0} \\ &\stackrel{\text{Def. von R}}{=} \nabla_{\partial_u c} \underbrace{\nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial s} c(u, s)}_{=0 \text{ da alle } c_u \text{ Geod.}} \Big|_{u=0} + R \left(\frac{\partial}{\partial s} c(0, s), \frac{\partial}{\partial u} c(0, s) \right) \frac{\partial}{\partial s} c(0, s) \\ &= R(\dot{c}(s), J(s)) \dot{c}(s). \end{aligned}$$

Definition II.8.4. Sei $c: I \rightarrow M$ Geodätische. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot{c}}^2 J(s) = R(\dot{c}(s), J(s)) \dot{c}(s)$$

heißt *Jacobigleichung* und deren Lösungen heißen *Jacobifelder längs* c .

Bemerkung II.8.5. Nach obiger Bemerkung sind Variationsfelder von geodätischen Variationen Jacobifelder. Wir werden später sehen, dass alle Jacobifelder so gewonnen werden können.

Satz II.8.6. Sei (M^m, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische, $s_0 \in I$. Für alle $v, w \in T_{c(s_0)}M$ gibt es genau ein Jacobi-Feld J längs c mit $J(s_0) = v$ und $\nabla_{\dot{c}} J(s_0) = w$. Insbesondere ist die Menge der Jacobifelder längs c ein $2m$ -dimensionaler Vektorraum.

Beweis. Sei $e_1(s_0), \dots, e_m(s_0)$ eine Basis von $T_{c(s_0)}M$. Durch Parallelverschiebung längs c erhalten wir eine Basis $e_1(s), \dots, e_m(s)$ von $T_{c(s)}(M)$. Setze $J(s) = v^i(s) e_i(s)$. Dann gilt $\nabla_{\dot{c}}^2 J(s) = \ddot{v}^i(s) e_i(s)$. Weiterhin ist

$$R(\dot{c}(s), J(s)) \dot{c}(s) = v^j \underbrace{R(\dot{c}(s), e_j(s)) \dot{c}(s)}_{=a^i_j e_i(s)}.$$

Also ist J genau dann ein Jacobifeld, wenn $\ddot{v}^i = v^j a_j^i$ für alle i gilt. Das ist ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Damit existieren Lösungen auf ganz I und sind durch die Wahl der Anfangswerte eindeutig bestimmt. \square

Beispiel II.8.7. (Die 'uninteressanten' Jacobifelder) Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Geodätischen c . Dann ist das Vektorfeld $J(s) := (a + bs)\dot{c}(s)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Jacobifeld, wegen

$$\nabla_{\dot{c}}^2 J = 0 \stackrel{\text{Symm. von } R}{=} - (a + bs)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = -R(\dot{c}, J)\dot{c}.$$

J ist das Variationsvektorfeld zur geodätischen Variation

$$c(u, s) = c(s + u(a + bs)) = c((1 + ub)s + ua),$$

also einfach einer Schar von Umparametrisierungen von c (die Anfangswerte sind dann $J(0) = a\dot{c}(0)$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = b\dot{c}(0)$).

Beispiel II.8.8. Ist M flach, also $R \equiv 0$, dann lautet die Jacobigleichung:

$$\nabla_{\dot{c}}^2 J(s) = 0.$$

Also sind alle Vektorfelder der Form $X(s) + sY(s)$ mit X, Y parallel längs c Jacobifelder. Nach Satz II.8.6 und Satz II.3.4 (Ex. und Eind.satz von parallelen Vektorfeldern) sind das schon alle Jacobifelder.

Satz II.8.9. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: I = [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische und sei X ein glattes Vektorfeld längs c . Dann ist X genau dann ein Jacobifeld längs c , wenn X das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ist.

Beweis. Dass das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobifeld ist, wissen wir schon. Sei nun X ein Jacobifeld längs c . O.B.d.A. sei $0 \in I$ (den allgemeinen Fall erhält man dann durch Verschieben). Sei $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = c(0)$ und $\dot{\gamma}(0) = X(0)$. Sei η_1 das parallele Vektorfeld längs γ mit $\eta_1(0) = \dot{c}(0)$ und η_2 das mit $\eta_2(0) = \nabla_{\dot{c}} X(0)$. Wir setzen $\eta(u) := \eta_1(u) + u\eta_2(u)$ und $c(u, s) := \exp_{\gamma(u)}(s\eta(u))$. Da \exp einen offenen Definitionsbereich hat und $[a, b]$ kompakt ist, ist $c_u(s) = c(u, s)$ für hinreichend kleine $|u|$ und alle $s \in [a, b]$ definiert. Für alle solchen u ist $c_u(s)$ dann eine Geodätische und

$$c(0, s) = \exp_{\gamma(0)}(s\eta(0)) = \exp_{c(0)}(s\dot{c}(0)) = c(s).$$

Also ist $c(u, s)$ eine geodätische Variation längs c . Sei J das zugehörige Jacobifeld. Dann bleibt zu zeigen, dass $J(0) = X(0)$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = \nabla_{\dot{c}} X(0)$ ist, denn dann folgt nach Satz II.8.6 $X = J$.

$$\begin{aligned} J(0) &= \frac{\partial c}{\partial u}(0, 0) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \exp_{\gamma(u)}(0) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \gamma(u) = \dot{\gamma}(0) = X(0) \\ \nabla_{\dot{c}} J(0) &= \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial c}{\partial u}(0, 0) = \nabla_{\partial_u c} \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) \\ &= \nabla_{\partial_u c} \Big|_{u=0} (d_{s\eta(u)} \exp_{\gamma(u)}(\eta(u)) \Big|_{s=0} \stackrel{\text{Bem II.7.2.iii}}{=} \nabla_{\partial_u c} \Big|_{u=0} \eta(u) \\ &\stackrel{\eta_i \text{ parall.}}{=} \eta_2(0) = \nabla_{\dot{c}} X(0). \end{aligned} \quad \square$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Insbesondere sieht man im Beweis des letzten Satzes, dass man die geodätische Variation zu einem Jacobifeld J längs c mit $J(s_0) = 0$ derart wählen kann, dass $c_u(s_0) = c(s_0) = c(s_0)$ für alle s gilt.

Lemma II.8.10. *Sei $J: I \rightarrow TM$ ein Jacobifeld längs einer Geodäten c , sei $s_0 \in I$. Sei $J(s_0) \perp \dot{c}(s_0)^*$ und $\nabla_{\dot{c}}J(s_0) \perp \dot{c}(s_0)$. Dann gilt $J(s) \perp \dot{c}(s)$ und $\nabla_{\dot{c}}J(s) \perp \dot{c}(s)$ für alle $s \in I$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(\nabla_{\dot{c}}J, \dot{c}) &\stackrel{\text{metrisch}}{=} g(\nabla_{\dot{c}}^2J, \dot{c}) + g\left(\nabla_{\dot{c}}J, \underbrace{\nabla_{\dot{c}}\dot{c}}_{=0}\right) \\ &\stackrel{\text{Jacobigl.}}{=} g(R(\dot{c}, J)\dot{c}, \dot{c}) \stackrel{\text{Symm. von } R}{=} 0. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$0 = g(\nabla_{\dot{c}}J(s_0), \dot{c}(s_0)) = g(\nabla_{\dot{c}}J, \dot{c}) \stackrel{\text{metrisch}}{=} \frac{d}{ds}g(J, \dot{c}) + g\left(J, \underbrace{\nabla_{\dot{c}}\dot{c}}_{=0}\right)$$

und damit $g(J(s), \dot{c}(s)) = g(J(s_0), \dot{c}(s_0)) = 0$. \square

Folgerung II.8.11. *Sei die Geodätische c nicht lichtartig, also $g(\dot{c}, \dot{c}) \neq 0$. Dann ist $T_{c(s)}M = \mathbb{R}\dot{c}(s) \oplus \dot{c}(s)^\perp$ und die Menge aller Jacobifelder längs c ist*

$$\underbrace{\mathbb{R} \cdot \dot{c} \oplus \mathbb{R} \cdot s\dot{c}}_{\text{die 'uninteressanten'}} \oplus \{\text{Jacobifelder } J \text{ längs } c \text{ mit } J \perp \dot{c}, \nabla_{\dot{c}}J \perp \dot{c}\}.$$

Beweis. Ist $v \in T_{c(s)}(M)$. Dann ist $v = \frac{g(v, \dot{c}(s))}{g(\dot{c}(s), \dot{c}(s))}\dot{c}(s) + w$ mit $w \in \dot{c}(s)^\perp$. Sei J ein Jacobifeld. Dann ist J durch seine Anfangswerte $J(s_0)$ und $\nabla_{\dot{c}}J(s_0)$ bestimmt. Wegen Linearität der Jacobigleichung können wir die Anfangswerte und damit das Jacobifeld in den 'uninteressanten' Anteil und in den aus Lemma II.8.10 zerlegen. \square

Beispiel II.8.12. Die letzte Folgerung stimmt nicht für lichtartige Geodäten: Sei c eine lichtartige Geodätische in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$. Dann ist insbesondere $\dot{c}(t)^\perp = \mathbb{R}\dot{c}(t)$. Sei z.B. X ein lichtartiges paralleles Vektorfeld längs c , welches linear unabhängig von \dot{c} ist. Dann ist $X \not\perp \dot{c}$. Da X parallel und $R = 0$ ist, ist X ein Jacobifeld.

Für die Berechnung von 'interessanten Jacobifeldern' auf Räumen konstanter Schnittkrümmung brauchen wir noch Hilfsfunktionen:

Definition II.8.13. Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Die verallgemeinerten Sinus- und Kosinusfunktionen $s_\kappa, c_\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$s_\kappa(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0 \\ r, & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}r), & \kappa < 0 \end{cases} \quad c_\kappa(r) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0 \\ 1, & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}r), & \kappa < 0 \end{cases}$$

*wobei $v \perp w$ die Kurzschreibweise für $g_p(v, w) = 0$ für $v, w \in T_pM$ ist

Bemerkung II.8.14. Es gilt $\kappa s_\kappa^2 + c_\kappa^2 = 1$, $s'_\kappa = c_\kappa$, $c'_\kappa = -\kappa s_\kappa$, $s_\kappa(0) = 0$ und $c_\kappa(0) = 1$.

Beispiel II.8.15. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ . Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Seien X, Y parallele Vektorfelder längs c mit $X \perp \dot{c}$ und $Y \perp \dot{c}$. Wir setzen $J(t) := s_\kappa(t)X(t) + c_\kappa(t)Y(t)$. Dann ist

$$\nabla_{\dot{c}}^2 J = \ddot{s}_\kappa X + \ddot{c}_\kappa Y = -\kappa(s_\kappa X + c_\kappa Y) = -\kappa J.$$

Nach Polarisation der Schnittkrümmungsdefinition für konstante Schnittkrümmung κ gilt $R(X, Y)Z = \kappa(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$, also:

$$R(\dot{c}, J)\dot{c} = s_\kappa R(\dot{c}, X)\dot{c} + c_\kappa R(\dot{c}, Y)\dot{c} = s_\kappa \underbrace{\kappa(g(X, \dot{c})\dot{c} - g(\dot{c}, \dot{c})X)}_{=0} + c_\kappa R(\dot{c}, Y)\dot{c} = -\kappa J.$$

Damit ist J ein Jacobifeld. Wegen $J(0) = Y(0)$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = X(0)$, Satz II.8.6 und Folgerung II.8.11 kann jedes 'interessante' Jacobifeld auf Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung so dargestellt werden.

Satz II.8.16. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei $v \in T_p M$ derart, dass die Geodätische $c_v(s) = \exp_p(sv)$ für $s \in [0, 1]$ definiert sei. Sei $\eta \in T_p M \cong T_{s_v} T_p M$ und sei J das Jacobifeld längs c_v mit $J(0) = 0$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = \eta$. Dann gilt

Vorl. 21 - 09.01.

$$d_{s_v} \exp_p(\eta) = \frac{J(s)}{s} \text{ für } s \in (0, 1].$$

Insbesondere ist

$$\ker d_v \exp_p \cong \{ \text{Jacobifelder längs } c_v(s) \mid J(0) = 0, J(1) = 0 \}$$

Beweis. Wir betrachten die geodätische Variation $c(u, s) := \exp_p(s(v + u\eta))$. Das zugehörige Variationsvektorfeld sei $X := \frac{\partial c}{\partial u}|_{u=0}$. Da X ein Jacobifeld mit

$$X(0) = \frac{\partial c}{\partial u}(0, 0) \stackrel{s=0}{=} \frac{d}{du}|_{u=0} \exp_p(0) = 0 = J(0)$$

und

$$\nabla_{\dot{c}} X(0) = \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial c}{\partial u}(0, 0) = \nabla_{\partial_u c} \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) = \nabla_{\partial_u c}(v + u\eta)|_{u=0} = \eta = \nabla_{\dot{c}} J(0)$$

ist, gilt wegen Eindeutigkeit der Jacobifelder bei gegebenen Anfangswerten, dass $X = J$ ist. Also gilt

$$d_{s_v} \exp_p(\eta) = \frac{d}{du}|_{u=0} \exp_p(sv + u\eta) = \frac{d}{du}|_{u=0} c(us^{-1}, s) = s^{-1} \frac{dc}{du}(0, s) = s^{-1} J(s). \quad \square$$

Definition II.8.17. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische. Dann heißen $s_1, s_2 \in I$, $s_1 \neq s_2$ *konjugierte Punkte* längs c , falls es ein nicht-triviales Jacobifeld J längs c mit $J(s_1) = 0$ und $J(s_2) = 0$ gibt.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Folgerung II.8.18. $d_v \exp_p$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn p und $\exp_p(v)$ konjugierte Punkte längs $s \mapsto \exp_p(sv)$ sind.

Beweis. Da $d_v \exp_p: T_v T_p M \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p(v)} M$ linear ist, ist es genau dann nicht invertierbar, wenn es nicht injektiv ist. Mit letztem Satz folgt so die Behauptung. \square

Beispiel II.8.19. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$. Sei $c_v: I \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Sei $s_1 = 0 \in I$. Nach Beispiel II.8.15 haben 'interessante' Jacobifelder die Form $J(s) = s_\kappa(s)X(s) + c_\kappa(s)Y(s)$, wobei X, Y parallele Vektorfelder längs c mit $X, Y \perp \dot{c}$ sind.

$\kappa \leq 0$ Jacobifelder haben maximal eine Nullstelle. Es gibt also keinen konjugierten Punkte und $d_v \exp_p$ ist für alle v im Definitionsbereich von \exp_p invertierbar.

$\kappa > 0$ Die zu t_0 konjugierten Punkte sind $t_0 + \frac{m\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Auf der Sphäre sind also insbesondere p und $-p$ entlang jeder Geodäten konjugiert.

Satz II.8.20. Sei (M^m, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c: [s_0, s_1] \rightarrow M$ eine Geodätische und seien $c(s_0)$ und $c(s_1)$ längs c nicht zueinander konjugiert. Dann ist die lineare Abbildung

$$A: \{\text{Jacobifelder längs } c\} \rightarrow T_{c(s_0)} M \oplus T_{c(s_1)} M, \quad J \mapsto (J(s_0), J(s_1))$$

bijektiv.

Beweis. Linearität folgt aus der Linearität der Jacobigleichung. Injektivität folgt, da $c(s_0)$ und $c(s_1)$ längs nicht zueinander konjugiert sind. Da beide Räume $2m$ -dimensional sind, folgt auch die Surjektivität. \square

Lemma II.8.21. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $v \in T_p M$. Die Geodätische $c(s) = \exp_p(sv)$ sei auf $[0, b]$ definiert. Dann gilt

$$g(d_{sv} \exp_p(\eta), \dot{c}(s)) = g(\eta, v)$$

für $\eta \in T_p M \cong T_{sv} T_p M$.

Für die Bedeutung dieses Lemmas vgl. Abbildung II.11.

Beweis. Sei zunächst $\eta = v$. Dann ist

$$d_{sv} \exp_p(v) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \exp_p(sv + uv) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} c(s + u) = \dot{c}(s)$$

und

$$g(d_{sv} \exp_p(v), \dot{c}(s)) = g(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) \stackrel{\text{Geod}}{=} g(v = \dot{c}(0), v).$$

Sei nun $\eta \perp v$ und sei J das Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = \eta$. Da $J(0) \perp \dot{c}(0) = v$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) \perp v$ gilt $J(s) \perp \dot{c}(s)$ für alle s . Weiterhin gilt nach Satz II.8.16 $d_{sv} \exp_p(\eta) = s^{-1} J(s)$ für $s > 0$. Zusammen gilt dann

$$g(d_{sv} \exp_p(\eta), \dot{c}(s)) = g(s^{-1} J(s), \dot{c}(s)) = 0 = g(\eta, v).$$

Die allgemeine Aussage folgt nun aus der Bilinearität von g . \square

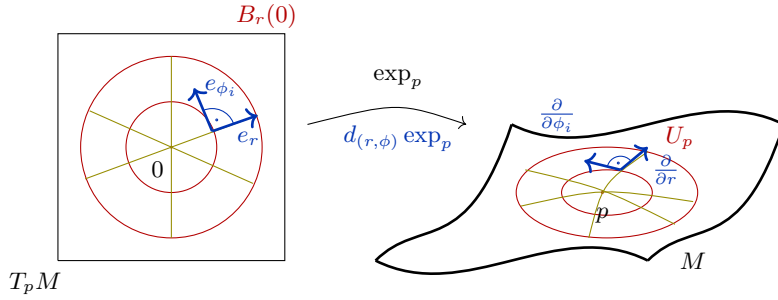


Abb. II.11.: Wählt man auf $T_p M$ Polarkoordinaten $(r, \phi) := (r, \phi_1, \dots, \phi_{m-1})$ mit $\langle e_{\phi_i}, e_{\phi_j} \rangle = \delta_{ij}$. Dann bleiben die Geraden $r \mapsto (r, \phi)$ auch nach Anwenden von \exp_p Geodäten, vgl. Bem. II.7.2. Damit können wir Lemma II.8.21 anwenden und erhalten, dass für g in den Koordinaten (r, ϕ_i) die Einträge $g_{rr} = 1$ und $g_{r\phi_i} = 0$ sein müssen.

II.9. Mehr zur Riemannschen Geometrie

II.9.1. Injektivitätsradius

Zunächst brauchen wir den Begriff des Injektivitätsradius, der uns bestimmen wird wie groß eine Karte um einen Punkt mittels geodätischer Normalkoordinaten gewählt werden kann:

Definition II.9.1. Sei (M^m, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Der *Injektivitätsradius* in $p \in M$ ist definiert als

$$\text{inj}(p) := \sup\{r \mid \exp_p|_{B_r(0)} : B_r(0) \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \text{ ist Diffeomorphismus}\},$$

wobei $B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 < r^2\}$ ist.

Bemerkung II.9.2. Nach Folgerung II.7.3 gilt $\text{inj}(p) > 0$ für jeden Punkt $p \in M$.

Lemma II.9.3. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $0 < r < \text{inj}(p)$ gilt $\exp_p(B_r(0)) = B_r(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\exp_p(B_r(0)) \subset B_r(p)$: Sei $q = \exp_p(v)$ mit $\|v\| < r$. Dann ist $t \mapsto \exp_p(tv)$, $t \in [0, 1]$, eine Geodätische von p nach q der Länge $\|v\| < r$. Damit ist $d(p, q) < r$ und damit $q \in B_r(p)$.

Für die andere Inklusion sei $q \notin \exp_p(B_r(0))$. Wir betrachten eine Kurve $\gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow M$, nach Bogenlänge parametrisiert, von p nach q . Diese muss $\exp_p(B_r(0))$ in einem Punkt verlassen, sagen wir das erste Mal in $\bar{q} = \gamma(t_0)$. Wir wählen für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$ Polarkoordinaten $(r, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}) =: (r, \phi)$ und erhalten mittels \exp_p Polarkoordinaten für $\exp_p(B_r(0))$. In diesen Koordinaten gilt nach Lemma II.8.21 für die Metrikkoeffizienten $g_{rr} = 1$ und $g_{r\phi_i} = 0$. Damit gilt

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, t_0]}) = \int_0^{t_0} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \geq \int_0^{t_0} \dot{\gamma}^r(t) dt = \gamma^r(t_0) - \gamma^r(0) = r.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Damit ist $d(p, q) \geq r$ und $q \notin B_r(p)$. □

Beispiel II.9.4. (i)

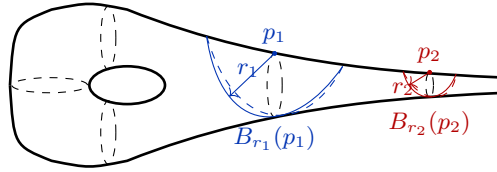


Abb. II.12.: Für diese Untermannigfaltigkeit verstanden mit der induzierten Metrik ist $r_1 > r_2$. Insbesondere haben wir $\text{inj}(p) \rightarrow 0$ für $d(p_1, p) \rightarrow \infty$.

- (ii) Für die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (Radius 1) ist der Injektivitätsradius in jedem Punkt π .
- (iii) Gibt es von einem Punkt $p \in M$ eine Geodäte $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Dann ist $\text{inj}(p) \leq L(\gamma)/2$.

Folgerung II.9.5. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Sei $0 < r < \text{inj}(p)$. Dann kann jeder Punkt $q \in B_r(p)$ mit p mittels einer eindeutigen minimalen Geodäten verbunden werden (die dann auch vollständig in $B_r(p)$ verläuft).

Beweis. Sei $q \in B_r(p)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $v \in \mathbb{R}^m \cong T_p M$ mit $\|v\| = d(q, p) < r$, so dass $\exp_p(v) = q$ ist. Damit ist $s \mapsto \exp_p(sv)$, $s \in [0, 1]$, eine Geodätische von p nach q . Diese Geodätische ist auch längenminimierend: Denn angenommen es gibt eine kürzere Geodätische von p nach q , dann muss diese innerhalb von $B_r(p)$ verlaufen und auch die Form $s \in [0, 1] \mapsto \exp_p(sv')$ haben, aber dann könnte \exp_p kein Diffeomorphismus auf $B_r(p)$ sein. Das gibt die Existenz. Andererseits kann jede minimale Geodäte von p nach q derart parametrisiert werden, dass sie die obige Form hat. Die Eindeutigkeit von v gibt die Eindeutigkeit der minimalen Geodäten. □

Folgerung II.9.6. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Sei $0 < r < \text{inj}(p)$. Dann ist $B_r(p)$ offen in M .

Beweis. Sei $0 < r < r' < \text{inj}(p)$. Dann folgt die Behauptung aus $\exp_p(B_{r'}(0)) = B_r(p)$, $\exp_p|_{B_{r'}(0)}$ Diffeomorphismus und $B_{r'}(0)$ offen in \mathbb{R}^m . □

Vorl. 22 - 11.01.

Folgerung II.9.7. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und (M, d) der zugehörige metrische Raum. Dann ist die durch d erzeugte Topologie auf M gleich der ursprünglichen Topologie. Insbesondere ist die Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ damit stetig.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass offen bzgl. der topologischen Mannigfaltigkeit gleich dem offen bzgl. der Abstandsfunktion d ist.

Sei zunächst $U \subset M$ offen bzgl. d . Dann gibt es für jedes $p \in U$ ein $r(p) > 0$ mit $B_{r(p)}(p) \subset U$. O.B.d.A. sei $r(p) < \text{inj}(p)$. Dann ist $B_{r(p)}(p)$ offen in M und damit als Vereinigung offener Teilmengen auch $U = \cup_{p \in U} B_{r(p)}(p)$.

Sei andererseits $U \subset M$ offen bzgl. der topologischen Mannigfaltigkeit M . Sei $p \in U$ und $0 < r < \text{inj}(p)$. Dann ist $U' := U \cap B_r(p)$ offen und $V := \exp_p^{-1}(U')$ ist eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R}^m . Damit gibt es ein $r' \in (0, r)$ mit $B_{r'}(0) \subset V$, und es gilt $B_{r'}(p) = \exp_p(B_{r'}(0)) \subset U$. \square

II.9.2. Vollständigkeit

Definition II.9.8. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Wir nennen (M, g) *geodätisch vollständig* in p , falls \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert ist, d.h. alle Geodätischen durch p sind auf ganz \mathbb{R} definiert.

Satz II.9.9 (Hopf-Rinow). *Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) (M, g) ist geodätisch vollständig in p .
 - (2) (M, g) ist geodätisch vollständig in allen $q \in M$.
 - (3) Die Bälle $\overline{B_r(p)}$ sind für alle $r > 0$ kompakt.
 - (4) (\cong Heine-Borel-Eigenschaft*) Die Bälle $\overline{B_r(q)}$ sind für alle $r > 0$ und alle $q \in M$ kompakt.
 - (5) (M, d) ist vollständig als metrischer Raum, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.
- (*) Ist (M, g) geodätisch vollständig, dann lässt sich jeder Punkt $q \in M$ mit jedem Punkt $p \in M$ durch eine minimale (=längenminimierende) Geodäte verbinden.

Da für Riemannsche Mannigfaltigkeiten geodätisch vollständig und metrisch vollständig nach Hopf-Rinow äquivalent sind, spricht man oft nur von vollständigen Mannigfaltigkeiten.

Bevor wir den Satz beweisen ein paar Folgerungen:

Folgerung II.9.10. *Jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.*

Beweis. $\overline{B_r(p)} \subset M$ ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes M wieder kompakt.[†] Damit folgt nach dem Satz von Hopf-Rinow die Behauptung. \square

Folgerung II.9.11. *Gibt es auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) eine eigentliche (=Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) Lipschitzfunktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist M vollständig.*

*Heine-Borel-Eigenschaft = Jede beschränkte abgeschlossene Menge ist kompakt.

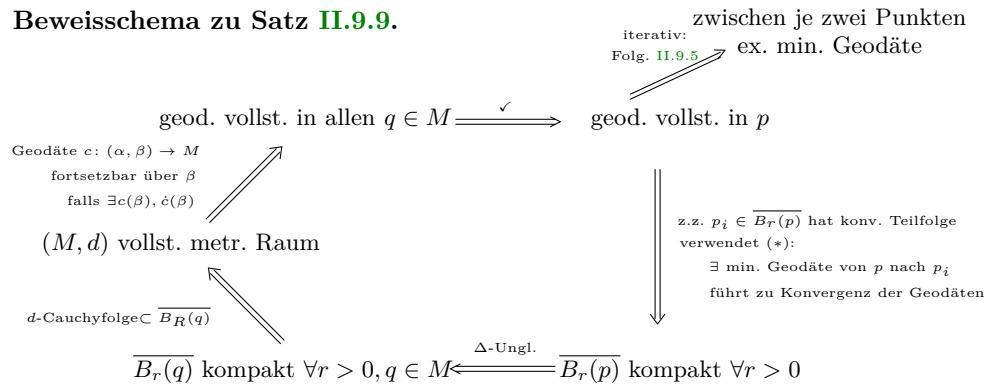
[†]Jede abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten Raumes M ist kompakt. Bew: Sei $\{U_i\}_i$ eine offene Überdeckung von A . Dann bildet diese zusammen mit der offenen Menge M/A eine offene Überdeckung des kompakten M und hat damit eine endliche Teilüberdeckung. Durch Weglassen von $M \setminus A$ haben wir damit auch endliche Teilüberdeckung von A .

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Beweis. Wir zeigen die Bedingung (3) in Hopf-Rinow: Sei $C := \overline{B_r(p)}$. Dann ist C beschränkt und abgeschlossen. Da f Lipschitz ist, ist auch $f(C)$ beschränkt. Also $C \subset f^{-1}[a, b]$ für ein geeignetes kompaktes Intervall $[a, b]$. Da f eigentlich ist, ist $f^{-1}[a, b]$ kompakt und damit ist auch C als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt. \square

Bemerkung II.9.12. Die Abstandsfunktion zu einem gegebenen Punkt $d_p: M \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto d(p, q)$, ist eine Lipschitzfunktion: Nach Dreiecksungleichung ist $|d_p(x) - d_p(y)| = |d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$ (das ist die Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante 1). Damit gibt die letzte Folgerung ein Kriterium um Vollständigkeit zu zeigen, indem man schaut, ob die Abstandsfunktion zu einem gegebenen Punkt eigentlich ist.

Beweisschema zu Satz II.9.9.



Beweis von Hopf-Rinow. (1) \implies (*): Sei $q \in M$. Gilt sogar $q \in B_{\text{inj}(p)}(p)$, dann wissen wir nach Folgerung II.9.5, dass es eine minimale Geodäte von p nach q gibt. Sei nun $q \notin B_{\text{inj}(p)}(p)$. Seien γ_k stetige, stückweise glatte Kurven von p nach q mit $L(\gamma_k) = d(p, q) + \epsilon_k$ mit $\epsilon_k \rightarrow 0$, vgl. Abbildung. Wir wählen $0 < r_0 < \text{inj}(p)$. Dann ist nach Lemma II.9.3 $S_{r_0}(p) := \{z \in M \mid d(p, z) = r_0\} = \exp_p(S^{m-1}(r_0))$ und damit kompakt. Sei q_k der erste Schnittpunkt von γ_k mit $S_{r_0}(p)$. Wegen Kompaktheit von $S_{r_0}(p)$ besitzt die Folge q_k eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert sei $z \in S_{r_0}(p)$. Wegen

$$d(p, q) \leq d(p, q_k) + d(q_k, q) \leq L(\gamma_k) \leq d(p, q) + \epsilon_k$$

gilt mit $k \rightarrow \infty$ und der Stetigkeit von d

$$d(p, q) = d(p, z) + d(z, q).$$

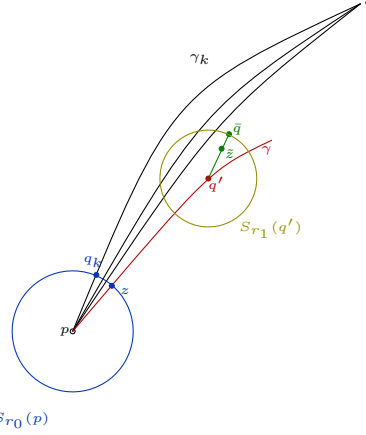
Sei γ die minimale Geodätische, die p und z verbindet und nach Bogenlänge parametrisiert ist. Da nach (1) (M, g) geodätisch vollständig in p ist, lässt sich γ auf das Intervall $[0, d(p, q)]$ fortsetzen. Es bleibt zu zeigen, dass $\gamma: [0, d(p, q)] \rightarrow M$ eine minimale Geodätische von p nach q ist:

II.9. Mehr zur Riemannschen Geometrie

Wir setzen $I := \{t \in [0, d(p, q)] \mid d(p, \gamma(t)) = t, d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) = d(p, q)\}$. Nach obigen Überlegungen ist $[0, r_0] \subset I$. Wegen Stetigkeit ist I abgeschlossen. Sei t_0 maximal derart, dass $[0, t_0] \subset I$ gilt. Es ist zu zeigen, dass $t_0 = d(p, q)$ ist, denn dann ist nach Definition von I insbesondere $\gamma(d(p, q)) = q$.

Annahme: $t_0 < d(p, q)$. Sei $q' = \gamma(t_0)$. Wir wählen $r_1 < \min\{d(p, q) - t_0, \text{inj}(q')\}$. Dann finden wir wie oben (also startend mit einer Folge von Kurven γ'_k von q' nach q , deren Längen zum Abstand $d(q', q)$ konvergieren) ein $\bar{q} \in S_{r_1}(q')$ mit

$$d(q', \bar{q}) + d(\bar{q}, q) = d(q', q). \quad (\text{II.15})$$



Sei γ' die minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von q' nach \bar{q} . Sei \tilde{z} ein Punkt auf dieser Geodätischen. Wegen

$$\begin{aligned} d(p, \tilde{z}) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, q') + d(q', \tilde{z}) \stackrel{\gamma'}{=} \min d(p, q') + d(q', \bar{q}) - d(\tilde{z}, \bar{q}) \\ &\stackrel{(\text{II.15})}{=} d(p, q') + d(q', q) - d(\tilde{z}, \bar{q}) - d(q, \bar{q}) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, q') + d(q', q) - d(\tilde{z}, q) \\ &\stackrel{\text{Def. v. } I}{=} d(p, q) - d(\tilde{z}, q) \leq d(p, \tilde{z}) \end{aligned}$$

folgt $d(p, \tilde{z}) = d(p, q') + d(q', \tilde{z})$ und $d(p, q) = d(\tilde{z}, q) + d(p, \tilde{z})$. Also gilt insbesondere $d(p, \bar{q}') = d(p, q') + d(q', \bar{q}')$ und damit realisiert die aus Kurve $\gamma|_{[0, t_0]}$ und γ' zusammengesetzte Kurve den Abstand $d(p, \bar{q}')$ und ist damit selbst eine Geodätische. Wegen Eindeutigkeit der Geodätischen bei vorgegebenen Anfangswerten muss dies die Geodätische $\gamma|_{[0, t_0 + r_1]}$ sein. Also ist $[0, t_0 + r_1] \subset I$, was den gesuchten Widerspruch liefert.

(1) \implies (3): Da in metrischen Räumen, Kompaktheit gleich Folgenkompaktheit ist, reicht es zu zeigen, dass jede Folge $p_i \in \overline{B_r(p)}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Nach (*) existieren minimale Geodätische $\gamma_i(t)$ mit $\gamma_i(0) = p$ und $\gamma_i(t_i) = p_i$, wobei o.B.d.A. die γ_i nach Bogenlänge parametrisiert seien, also $t_i = L(\gamma_i) = d(p, p_i) \leq r$. Die $\dot{\gamma}_i(0)$ sind Einheitsvektoren in $T_p M$. Da $S^{m-1}(0) \subset T_p M$ kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\dot{\gamma}_{i_j}(0) \rightarrow v \in S^{m-1}(0) \subset T_p M$. Wegen $t_{i_j} \in [0, r]$, gibt es auch hier wieder eine konvergente Teilfolge $t_{i_{j_k}} \rightarrow T \in [0, r]$. Wir setzen $q := \exp_p(Tv)$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_{j_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp_p(t_{i_{j_k}} \dot{\gamma}_{i_{j_k}}(0)) = \exp_p(\lim_{k \rightarrow \infty} t_{i_{j_k}} \dot{\gamma}_{i_{j_k}}(0)) = \exp_p(Tv) = q.$$

(3) \implies (4): Seien alle Bälle $\overline{B_r(p)}$ kompakt für $r > 0$. Sei $q \in M$ und $R > 0$. Dann gilt nach Dreiecksungleichung

$$\overline{B_R(q)} \subset \overline{B_{R+d(p,q)}(p)}.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Damit ist $\overline{B_R(q)}$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{B_{R+d(p,q)}(p)}$ selbst wieder kompakt.

(4) \implies (5): Seien alle Bälle $\overline{B_r(q)}$ kompakt. Sei p_i eine Cauchyfolge in (M, d) . Dann gibt es ein $R > 0$ mit $p_i \in \overline{B_R(p)}$ für alle i . Da $\overline{B_R(p)}$ kompakt ist, konvergiert die Folge.

Vorl. 23 - 16.01.

(5) \implies (2): Sei $c: (\alpha, \beta) \rightarrow M$ eine Geodätische mit maximalem Definitionsbereich und nach Bogenlänge parametrisiert. Wir wollen zeigen, dass $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass $\beta < \infty$. Dann gibt es eine Folge $t_i \in (\alpha, \beta)$ mit $t_i \rightarrow \beta$, und es gilt

$$d(c(t_i), c(t_j)) \leq L|c|_{[t_i, t_j]} = |t_i - t_j|.$$

Also ist $c(t_i)$ eine Cauchy-Folge in (M, d) . Wegen Vollständigkeit, existiert ein eindeutiges $q \in M$ mit $c(t_i) \rightarrow q$ für $i \rightarrow \infty$.

Wir zeigen als nächstes, dass auch der Limes von $\dot{c}(t)$ für $t \rightarrow \beta$ existiert: Sei $\kappa = \exp_q^{-1}: U \subset M \rightarrow V \subset T_q \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ eine Karte von M um q mit $\kappa(q) = 0$. Sei $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(0)} \subset V$ ist. Sei $x := \kappa \circ c$ für $t \in (\beta - \epsilon, \beta)$, wobei $\kappa \circ c|_{(\beta - \epsilon, \beta)} \subset \overline{B_r(0)}$. Setze $a := \dot{x}$. Dann gilt nach Geodätengleichung

$$\dot{a}^k = \ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = -\Gamma_{ij}^k(x) a^i a^j.$$

Da $\overline{B_r(0)}$ kompakt ist, gibt es ein C mit $|\Gamma_{ij}^k(x)| \leq C$ für alle $x \in \overline{B_r(0)}$ und alle i, j, k . Damit ist

$$|\dot{a}^k| \leq m^2 C \|a\|_{\max}^2 \stackrel{(**)}{\leq} C' \underbrace{g(\dot{c}, \dot{c})}_{=1} = C'$$

für ein $C' > 0$, wobei $(**)$ folgt wegen: Alle Normen des $\mathbb{R}^m \cong T_x \mathbb{R}^m$ sind äquivalent, also insbesondere die Maximumnorm auf $T_x \mathbb{R}^m$ und die Norm des Skalarproduktes $(\exp_q^* g)_x$ auf $T_x \mathbb{R}^m$. Damit gibt es für jedes $x \in \overline{B_r(0)}$ ein $C(x) > 0$ mit $\|v\|_{\max}^2 \leq C(x) (\exp_q^* g)_x(a, a) = C(x) g(d_x \exp_q(a) = \dot{c}, \dot{c})$ für alle $a \in T_x \mathbb{R}^m$. Hier hängt $C(x)$ von x ab. Da aber g_p stetig in p ist, kann auch $C(x)$ stetig gewählt werden. Da $\overline{B_r(0)}$ kompakt ist, folgt die Existenz von C' .

Damit haben wir

$$\|a(t_j) - a(t_i)\|_{\max} = \left\| \int_{t_j}^{t_i} \dot{a}(u) du \right\|_{\max} \leq \left| \int_{t_j}^{t_i} \|\dot{a}(u)\|_{\max} du \right| \leq C' |t_j - t_i|$$

Also bilden die $a(t_i) = \dot{x}(t_i)$ eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen ein eindeutiges $A \in \mathbb{R}^m$.

Damit setzt sich sowohl c als auch \dot{c} in β fort. Nach Existenz von Geodätischen kann somit c auch auf eine Umgebung von β fortgesetzt werden. Widerspruch.

(2) \implies (1): \checkmark

□

In Lorentzischen Mannigfaltigkeiten gilt Hopf-Rinow nicht. Nicht nur, weil der Lorentzsche Abstand die Mannigfaltigkeit nicht zu einem metrischen Raum macht. Sondern es gilt dann auch keine Äquivalenz einer Teilmenge der Aussagen im Hopf-Rinow.

Im Lorentzischen ist geodätisch vollständig auch nicht der Begriff der zumeist verwendet wird, sondern man differenziert und definiert licht-/zeit-/raumartig vollständig als die licht-/zeit-/raumartigen Geodätischen existieren auf ganz \mathbb{R} . Insbesondere zeitartig vollständig ist physikalisch relevant, weil es aussagt, ob ein Teilchen unendlich lang frei fallen kann ('wenn nichts im Weg ist').

II.9.3. Zweite Variation des Energiefunktional

Ziel: Wir wissen aus Abschnitt II.5, dass kritische Punkte des Energiefunktional genau die Geodätischen sind. Wissen wir mehr über die kritischen Punkte, z.B. ob es ein Minimum, Maximum, ..., ist, können wir im Allgemeinen mehr über Geodätische aussagen und andersherum.

Bemerkung II.9.13. Ist $c: [a, b] \rightarrow M$ minimale Geodätische und c_s eine Variation von c mit festen Endpunkten. Wegen der Minimalität ist $L(c) \leq L(c_s)$ für alle s . Es ist $L(c_s) \leq 2(b-a)E(c_s)$ (nach Cauchy-Schwarz) und $L(c) = 2(b-a)E(c)$, da c Geodätische und damit proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Insgesamt ist also: $E(c) \leq E(c_s)$ für alle Variationen c_s mit festen Endpunkten und damit $\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}E(c_s) \geq 0$.

Wir berechnen eine Formel für die zweite Variation der Energie und beschränken uns dabei auf Variationen mit festen Endpunkten:

Satz II.9.14 (Zweite Variation der Energie). *Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische und c_s eine Variation von c mit festen Endpunkten. Sei X das zugehörige Variationsvektorfeld. Dann gilt*

$$\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}E(c_s) = \int_a^b (g(\nabla_{\dot{c}}X(t), \nabla_{\dot{c}}X(t)) - g(R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t))) dt.$$

Beweis. Im Beweis der ersten Variationsformel des Energiefunktional, s. Satz II.5.3, hatten wir (für feste Endpunkte)

$$\frac{d}{ds}E(c_s) = \int_a^b g\left(\nabla_{\dot{c}}\frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial t}\right) dt.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}E(c_s) &= \int_a^b \left(g\left(\nabla_{\partial_s c_s} \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c}\right) + g\left(\nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial t} \Big|_{s=0}\right) \right) dt \\ &\stackrel{\text{Def. } R_{\text{tors. frei}}}{=} \int_a^b g\left(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c}\right) dt + \int_a^b g(R(X, \dot{c})X, \dot{c}) dt \\ &\quad + \int_a^b g(\nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\dot{c}} X) dt. \end{aligned}$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Mittels

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b g \left(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) dt \\
 &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} g \left(\nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) - g \left(\nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \underbrace{\nabla_{\dot{c}} \dot{c}}_{=0} \right) \right) dt \\
 &= g \left(\nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right) \Big|_a^b \\
 &= g \left(\nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{c(s, b)}_{=c(b)}, \dot{c}(b) \right) \Big|_{s=0} - g \left(\nabla_{\partial_s c_s} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{c(s, a)}_{=c(a)}, \dot{c}(a) \right) \Big|_{s=0} = 0.
 \end{aligned}$$

erhalten wir die Behauptung. \square

II.9.4. Satz von Bonnet-Myers

Der Satz von Bonnet-Myers ist ein Satz der Vergleichsgeometrie. Dabei werden Aussagen unter der Annahme von Krümmungsschranken bewiesen und im Beweis werden dann immer bestimmte Größen mit Modellräumen verglichen, in dem diese Krümmungsschranken angenommen werden. Diese Modellräume sind oft Sphäre, euklidischer Raum oder hyperbolischer Raum, wo man alles sehr explizit ausrechnen kann.

Bevor wir zum eigentlichen Satz kommen, brauchen wir noch den Begriff des Durchmessers:

Definition II.9.15. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der *Durchmesser* von (M, g) ist definiert als

$$\text{diam}(M, g) := \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\}.$$

Beispiel II.9.16. Ist $\dim M \geq 1$, dann ist $\text{diam}(M, g) \in (0, \infty]$.

$$\text{diam}(S^m, g_{st}) = \pi, \quad \text{diam}(\mathbb{R}^m, g_E) = \infty$$

Lemma II.9.17. Sei (M, g) eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist $\text{diam}(M, g) < \infty$ genau dann, wenn M kompakt ist.

Beweis. Sei M kompakt. Dann ist auch $M \times M$ kompakt. Damit ist $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und nimmt (da stetig) sein Maximum an.

Sei $\text{diam}(M, g) < \infty$. Dann gibt es ein $R > 0$ mit $\overline{B_R(p)} = M$. Da M vollständig ist, folgt mit dem Satz von Hopf-Rinow, dass M kompakt ist. \square

Satz II.9.18. (Bonnet-Myers)

Sei (M^m, g) eine vollständige und zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $m > 1$. Sei $\kappa > 0$, so dass $\text{Ric} \geq \kappa(m-1)g$, d.h. $\text{Ric}_p(v, v) \geq \kappa(m-1)g_p(v, v)$ für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann ist M kompakt und

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Beispiel II.9.19.

$M = S^m$ mit $g = \alpha^2 g_{st}$, $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\text{Radius} = \alpha, \text{diam}(M) = \alpha\pi, \text{sec} = \frac{1}{\alpha^2}, \text{Ric} = \frac{1}{\alpha^2}(m-1)g, \text{scal} = \frac{1}{\alpha^2}m(m-1).$$

Beweis von Bonnet-Myers. Für $p, q \in M$ mit $p \neq q$ setzen wir $L := d(p, q)$, wobei d die Riemannsche Abstandsfunktion ist. Wir wollen zeigen, dass $L \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gilt, dann folgt direkt die Schranke an den Durchmesser und nach Lemma II.9.17 die Kompaktheit.

Da (M, g) vollständig ist, gibt es nach dem Satz von Hopf-Rinow eine minimale, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c: [0, L] \rightarrow M$ von $c(0) = p$ nach $c(L) = q$.

Sei $e \in T_p M$ mit $e \perp \dot{c}(0)$ und $g_p(e, e) = 1$. Sei $e(t)$ das zugehörige parallele Vektorfeld längs c . Wir setzen

$$X(t) := \sin\left(\frac{\pi}{L}t\right) e(t).$$

Sei $c_s(t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$. Dann ist $c_s(t)$ eine Variation von c mit festen Endpunkten. Da c minimale Geodätische ist, haben wir $0 = \frac{d}{ds}|_{s=0} E(c_s)$ und

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Bem. II.9.13}}{\leq} \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} E(c_s) \\ &\stackrel{\text{Satz. II.9.14}}{=} \int_0^L (g(\nabla_{\dot{c}} X(t), \nabla_{\dot{c}} X(t)) - g(R(X(t), \dot{c}(t)), \dot{c}(t), X(t))) dt \\ &= \int_0^L \left(g\left(\frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi}{L}t\right) e(t), \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi}{L}t\right) e(t)\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) g(R(e(t), \dot{c}(t)), \dot{c}(t), e(t)) \right) dt \\ &= \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) g(R(e(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), e(t)) \right) dt. \end{aligned}$$

Startet man mit einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_{m-1}, \dot{c}(0)$ (Dann sind auch die parallelverschobenen Vektoren $e_1(t), \dots, e_{m-1}(t), \dot{c}(t)$ eine Orthonormalbasis in $c(t)$) und summiert obige Gleichungen für $e = e_i$ über $i = 1, \dots, m-1$, dann erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^L \left((m-1) \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) \underbrace{\text{Ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}_{\geq (m-1)\kappa > 0} \right) dt \\ &\leq (m-1) \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{L}t\right) \kappa \right) dt \\ &\leq (m-1) \frac{1}{2} \frac{\pi^2 - \kappa L^2}{L}. \end{aligned}$$

Also ist $L \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und damit $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Nach Lemma II.9.17 ist (M, g) dann kompakt. \square

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

In den Beweis geht durch die spezielle Wahl vom Variationsvektorfeld $X(t)$ das Wissen ein, wie im Modellfall Sphäre (da $\kappa > 0$ ist) die Jacobifelder aussehen.

Bemerkung II.9.20. Unter den Voraussetzungen von Bonnet-Myers folgt insbesondere, dass M eine endliche Fundamentalgruppe hat.

Sei $p \in M$. Dann ist die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(M, p)$ die Menge aller glatten Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ modulo Homotopie mit festen Endpunkten.* Die Fundamentalgruppe bildet mit der Hintereinandersetzung von Kurven eine Gruppe. Ist M zusammenhängend, sind die $\pi_1(M, p)$ für alle $p \in M$ als Gruppen isomorph. Deshalb schreibt man oft nur $\pi_1(M)$.

Die *universelle Überlagerung* \tilde{M} ist eine Mannigfaltigkeit auf der $\pi_1(M)$ frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt und für die der zugehörige Orbitraum wieder gleich M ist†. Dann ist $\pi_1(\tilde{M}) = \{1\}$, d.h. dass jede geschlossene Kurve $c: S^1 \rightarrow M$ stetig in eine konstante Kurve deformiert werden kann (d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\tilde{c}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ mit $\tilde{c}(t, 0) = c(t)$ und $\tilde{c}(t, 1) = p$ für ein $p \in M$). Ist M zusammenhängend und $\pi_1(M) = \{1\}$, nennen wir M *einfach zusammenhängend*.

Bsp: S^1 und Torus sind nicht einfach zusammenhängend. \mathbb{R}^m, S^n für $n > 1$ sind einfach zusammenhängend. $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ist eine universelle Überlagerung für $n > 1$ und $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

Sei $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ die Projektionsabbildung zur universellen Überlagerung und setzt $\tilde{g} = \pi^*g$. Da π dann zu einer lokalen Isometrie wird, erfüllt auch (\tilde{M}, \tilde{g}) die Voraussetzungen von Bonnet-Myers. Damit ist auch \tilde{M} kompakt und somit die Fundamentalgruppe von M endlich.

II.9.5. Weitere Beispiele für Sätze der Vergleichsgeometrie

Es folgen ein paar weitere Beispiele für Vergleichssätze. Für Beweise vgl. z.B. [CE08].

Satz II.9.21. (Satz von Hadamard) Sei (M, g) eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, also $\text{sec}_p(E) \leq 0$ für alle $p \in M$ und alle affinen Ebenen $E \subset T_pM$. Dann ist $\exp_p: T_pM \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist M diffeomorph zu \mathbb{R}^n mit $n = \dim M$.

Satz II.9.22. (Cheeger-Gromoll) Sei M eine vollständige nichtkompakte Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann gibt es eine kompakte Untermannigfaltigkeit Σ (die Seele von M). so dass M diffeomorph zum Normalenbündel $N\Sigma := \sqcup_{p \in \Sigma} N_p\Sigma = \sqcup_{p \in \Sigma} \{v \in T_pM \mid v \perp T_p\Sigma\}$.

Satz II.9.23. (Bishop) Sei (M^m, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric} \geq \kappa(m-1)g$. Sei

$$\tilde{M}^m := \begin{cases} S^m & \kappa > 0 \\ \mathbb{R}^m & \kappa = 0 \\ \mathbb{H}^m & \kappa < 0 \end{cases}$$

*<https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalgruppe>

†[https://de.wikipedia.org/wiki/Überlagerung_\(Topologie\)#Decktransformation](https://de.wikipedia.org/wiki/Überlagerung_(Topologie)#Decktransformation)

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

versehen mit der Standardmetrik für $\kappa = 0$ bzw. das $\sqrt{|\kappa|}$ -fache der Standardmetrik für $\kappa \neq 0$. (Dann ist \bar{M} vollständig und hat konstante Schnittkrümmung κ .) Sei $\bar{B}_r \subset \bar{M}$ ein Ball mit Radius r . Dann ist

$$\frac{\text{vol}(B_r(p))}{\text{vol}(\bar{B}_r)}$$

monoton fallend in r und für $r \rightarrow 0$ ist der Grenzwert 1.

Satz II.9.24. (Satz von Topogonov) Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\geq \kappa$. Seien γ_i , $i = 1, 2$, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Sei γ_1 minimierend. Falls $\kappa > 0$, sei zusätzlich $L_g(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Sei (N, h) eine vollständige zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung κ mit zwei nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $\bar{\gamma}_1$ und $\bar{\gamma}_2$ mit $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0)$. Es gelte $L_g(\gamma_i) = L_h(\bar{\gamma}_i) =: \ell_i$ und $g(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0)) = h(\dot{\bar{\gamma}}_1(0), \dot{\bar{\gamma}}_2(0))$. Dann gilt

$$\text{dist}_g(\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_2)) \leq \text{dist}_h(\bar{\gamma}_1(\ell_1), \bar{\gamma}_2(\ell_2)).$$

Satz II.9.25. (Sphärensatz von Berger 1961) Sei (M^m, g) eine vollständige einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $1 \geq \text{sec} > \frac{1}{4}$. Dann ist M homöomorph zur S^m .

Bis hier hin, sind diese Sätze alle mit klassischer Vergleichsgeometrie (Methoden wie im Satz von Bonnet-Myers) beweisbar.

Bemerkung II.9.26. Der Sphärensatz wäre nicht mehr richtig, wenn man nur $1 \geq \text{sec} \geq \frac{1}{4}$. Ein Gegenbeispiel ist dann der $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = S^{2n+1}/S^1$ für $m = 2n$ mit der durch S^{2n+1} induzierten Metrik.

Da es exotische Sphären gibt, erhält man nicht direkt die Aussage, dass M diffeomorph zur S^m ist. Der Beweis erfordert andere Techniken und wurde es viele Jahre später erbracht unter Verwendung von Riccifluss-Techniken:

Satz II.9.27. (Differenzieller Sphärensatz von Brendle/Schoen 2007 [Bre11]) Sei (M^m, g) eine vollständige einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $1 \geq \text{sec} > \frac{1}{4}$. Dann ist M diffeomorph zur S^m .

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Abschnitts ist es Integration auf Mannigfaltigkeiten zu betrachten, einen Integralsatz auf Mannigfaltigkeiten kennenzulernen, der die klassischen Integralsätze (Satz von Gauß und Stokes) aus dem \mathbb{R}^3 verallgemeinert, und all das dann insbesondere auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten anzuwenden.

Zuerst brauchen wir einige Vorarbeiten:

Vorl. 24 - 18.1.

II.10.1. Orientierbarkeit

Orientierbarkeit haben wir in ÜA 6 zuerst für Hyperflächen definiert: Eine Hyperfläche $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ heißt *orientierbar*, falls es ein stetiges nirgends verschwindendes Normalenfeld gibt. In ÜA 6 haben wir dann auch gesehen, dass diese Definition äquivalent zu einem Kriterium ist, was man auch für nicht zwingend eingebettete Mannigfaltigkeiten definieren kann. Dieses wollen wir nun als Definition verwenden:

Definition II.10.1. Eine Mannigfaltigkeit M^m heißt *orientierbar*, wenn es Karten $\kappa_i: U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^m$ von M gibt, welche M überdecken und für die

$$\det \left[d_{\kappa_i(p)}(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}): T_p \kappa_i(U_i \cap U_j) \cong \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\kappa_j(\kappa_i^{-1}(p))} \kappa_j(U_i \cap U_j) \cong \mathbb{R}^m \right] > 0$$

für alle i, j und $p \in \kappa_i(U_i \cap U_j)$ gilt. Die Menge aller dieser κ_i bilden einen *orientierten Atlas* von M . Eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten nennen wir *Orientierung* von M . Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit gewählter Orientierung. Für eine orientierte Mannigfaltigkeit nennen wir eine Karte aus der gewählten Orientierung *positiv orientiert*. Eine Basis v_1, \dots, v_m von $T_p M$ heißt *positiv orientiert*, falls es eine positiv orientierte Karte $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ um p mit $\kappa(p) = 0$ und $d_p \kappa(v_i) = e_i$ für alle i gilt.*

Ein (lokaler) Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten ist *orientierungserhaltend*, falls für jedes $p \in M$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ mittels $d_p f$ auf eine positiv orientierte Basis von $T_{f(p)} N$ abgebildet wird. Ist f nicht orientierungserhaltend, nennen wir f *orientierungsumkehrend*.

Beispiel II.10.2. (i) Sei $S^1 = [0, 2\pi]/\{0 \sim 2\pi\}$ gegeben. Sei $\kappa_1: \phi \in S^1 \setminus \{0\} \mapsto \phi \in (0, 2\pi)$ und $\kappa_2: \phi \in S^1 \setminus \{\pi\} \mapsto (\phi + \pi \bmod 2\pi) \in (0, 2\pi)$. Dann ist $\kappa_2(\kappa_1^{-1}(\phi)) = (\phi + \pi \bmod 2\pi)$ und damit $d_{\kappa_1(\phi)}(\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}) = \text{id}$. Der Atlas von S^1 , der durch κ_1 und κ_2 gebildet wird, ist also ein orientierter Atlas, wogegen das Hinzufügen von $\kappa_3: \phi \in S^1 \setminus \{0\} \mapsto 2\pi - \phi \in (0, 2\pi)$ zwar noch einen Atlas, aber keinen orientierten Atlas mehr erbe.

- (ii) Spiegelungen im \mathbb{R}^m sind orientierungsumkehrend. Drehungen und Translationen sind orientierungserhaltend.
- (iii) Die Hintereinanderausführung zweier orientierungserhaltender bzw. zweier orientierungsumkehrender Abbildungen ist orientierungserhaltend. Die Hintereinanderausführung einer orientierungserhaltenden und einer orientierungsumkehrenden Abbildung ist orientierungsumkehrend.
- (iv) Alle S^n sind orientierbar. Man kann direkt nachrechnen, dass die Antipodenabbildung $A: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$, genau dann orientierungserhaltend, falls n ungerade ist.

*Wenn nicht anders gesagt, verwenden wir \mathbb{R}^m immer mit der Orientierung, bei der e_1, \dots, e_m positiv orientiert ist.

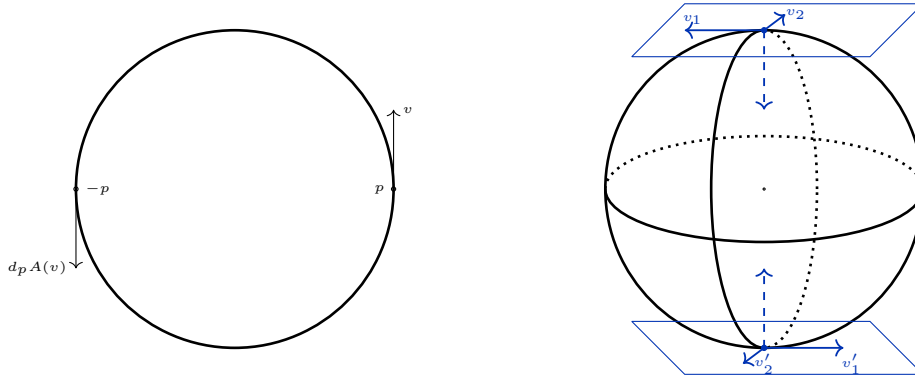


Abb. II.13.: Links: Die Antipodenabbildung $A: S^1 \rightarrow S^1$ ist orientierungserhaltend. Rechts: Ist (v_1, v_2) positiv orientiert, dann ist $(v'_1 = d_N A(v_1), v'_2 = d_N A(v_2))$ negativ orientiert. Also ist $A: S^2 \rightarrow S^2$ orientierungsumkehrend.

Daraus folgt, dass $\mathbb{R}P^n = S^n / \{x \sim -x\}$ orientierbar ist, wenn n ungerade ist. Sei andererseits $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Projektionsabbildung. Dann ist $\pi \circ A = \pi$. Mit (ii) folgt, dass für n gerade $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar sein kann.

Lemma II.10.3. *Ist M eine orientierbare Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau zwei Orientierungen von M .*

Beweis. Sei \mathcal{A} ein orientierter Atlas von M . Dann ergibt $\{r \circ \kappa \mid \kappa \in \mathcal{A}\}$ mit $r: (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (-x^1, \dots, -x^m) \in \mathbb{R}^m$ eine zweite Orientierung auf M . Um zu zeigen, dass es keine weitere Orientierung gibt, sei nun \mathcal{B} ein weiterer orientierter Teilatlas. Angenommen, \mathcal{B} hat keine der bisherigen Orientierungen. D.h. es gibt Karten $(\kappa_i: U_i \rightarrow V) \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$ und $(\kappa: U \rightarrow V) \in \mathcal{B}$ mit nichtleerem Schnitt der Definitionsbereiche, $\det d(\kappa_1 \circ \kappa^{-1}) < 0$ und $\det d(r \circ \kappa_2 \circ \kappa^{-1}) < 0$ auf einer ggf. kleineren Menge als $U_1 \cap U_2 \cap U$. Aber dann wäre dort $\det d(\kappa_2 \circ \kappa^{-1}) > 0$ und damit $\det(d(\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1})) = \det d(\kappa_2 \circ \kappa^{-1}) \det d(\kappa \circ \kappa_1^{-1}) < 0$, was ein Widerspruch zur Wahl von \mathcal{A} ist. \square

Lemma II.10.4. *Sei M orientierte Mannigfaltigkeit. Für jede Basis v_1, \dots, v_m in $T_p M$ ist entweder diese Basis oder $-v_1, \dots, v_m$ positiv orientiert.*

Beweis. Sei $A: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch $v = \lambda^i v_i \mapsto (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$. Dann ist $\kappa := A \circ \exp_p^{-1}$ auf einer Umgebung von p eine Karte von M mit $\kappa(p) = 0$ und $d_p \kappa(v_i) = e_i$. Wie in Lemma II.10.3 ist dann entweder κ oder $r \circ \kappa$ positiv orientiert, was die Behauptung impliziert. \square

II.10.2. Mannigfaltigkeit mit Rand

Definition II.10.5. Eine *glatte Mannigfaltigkeit mit Rand** ist ein topologischer Raum (M, \mathcal{T}) , so dass die Topologie Hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis besitzt und lokal homöomorph zu

$$\mathbb{R}_+^m := \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m \geq 0\}$$

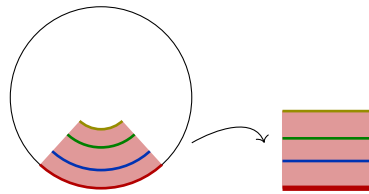
ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ um p , eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}_+^m$ und eine Abbildung $\kappa: U \rightarrow V$, so dass κ ein Homöomorphismus ist und dass die Kartenwechsel $\kappa \circ (\kappa')^{-1}$ für jedes Paar von Karten $\kappa: U \rightarrow V$ und $\kappa': U' \rightarrow V'$ glatte Abbildungen sind. Wir nennen

$$\partial M := \{p \in M \mid \exists \text{ Karte } \kappa: U \rightarrow V \text{ von } M \text{ mit } \kappa(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}\}$$

den *Rand* von M . Die Definition von Orientierbarkeit wird ganz analog für Mannigfaltigkeiten mit Rand übernommen.

Beispiel II.10.6.

- (i) Jede Mannigfaltigkeit im Sinne von unserer ursprünglichen Definition I.3.8 ist insbesondere eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ∂M ist dann die leere Menge.
- (ii) $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Karten kann man z.B. bauen, in dem man die stereographische Projektion erweitert. Am Beispiel von $m = 2$ und einer Karte nahe $(-1, 0) \in \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ kann man z.B. die Abbildung $f: (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1-y}, 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ nehmen:



Die stereographische Projektion vom Norpol auf die Gerade $\{y = -1\}$ ist

$$(x, y) \in S^1 \setminus \{(1, 0)\} \mapsto \frac{2x}{1-y}.$$

Die Abbildung f von oben gibt (auf geeignetem Definitionsbereich) die Karte wie im Bild.

Es ist $\partial \overline{B_1(0)} = S^{m-1}$. (Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ mit induzierter Topologie eine Mannigfaltigkeit mit Rand, dann ist ∂M i.A. nicht das gleiche wie der Rand von M als Menge im \mathbb{R}^n .)

Satz II.10.7. Ist M eine (orientierte) Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $m > 2$, dann ist ∂M eine (orientierbare) Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 1$.

Beweis. Sei \mathcal{A} ein (orientierter) Atlas von M . Für $\kappa: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ aus \mathcal{A} mit $\kappa^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})) \neq \emptyset$ identifizieren wir $V \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ durch Weglassen der letzten Koordinate als Teilmenge $V_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Dann bilden die Vereinigung der eingeschränkten Karten $\kappa^0 := \kappa|_{V_0 \times \{0\}}: \kappa^{-1}(V_0 \times \{0\}) \subset \partial M \rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$ einen Atlas von ∂M . Damit ist ∂M eine $(m - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

*Auch hier werden wir wie bisher glatt nicht mehr erwähnen.

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Es bleibt noch zu zeigen, dass aus M orientiert, folgt, dass ∂M orientierbar ist: Für Kartenwechsel solcher $\kappa_i: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ wie oben, also die auch Punkte mit ∂M gemeinsam haben, sei

$$\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}(\bar{y} \in \mathbb{R}^{m-1}, y^m \in \mathbb{R}) = (A(\bar{y}, y^m) \in \mathbb{R}^{m-1}, B(\bar{y}, y^m) \in \mathbb{R}).$$

Dann ist $A(\bar{y}, 0) = \kappa_1^0 \circ (\kappa_2^0)^{-1}(\bar{y})$, $B(\bar{y}, 0) = 0$ und damit

$$d_{(\bar{y},0)}(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}) = \begin{pmatrix} d_{\bar{y}}(\kappa_1^0 \circ (\kappa_2^0)^{-1}) & 0 \\ * & \langle d_{(\bar{y},0)}(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})(e_m), e_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Da nach Konstruktion der Karten nur nichtnegative x_m -Koordinaten vorkommen ist $\langle d_{(\bar{y},0)}(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})(e_m), e_m \rangle > 0$. Aus der Orientierung des Atlas der κ_i ist damit der obige Atlas von ∂M auch orientiert. \square

Bei gegebener Orientierung von M zeichnen wir eine Orientierung auf ∂M – die von M induzierte Orientierung auf ∂M – wie folgt aus: Eine Basis $u_1, \dots, u_{m-1} \in T_p \partial M$ positiv orientiert, falls $n(p), u_1, \dots, u_{m-1} \in T_p M$ für eine Karte aus dem orientierten Atlas von M positiv orientiert ist. Hierbei ist $n(p)$ ein von M weg zeigender Vektor in $T_p M \setminus \{0\}$.

Bemerkung II.10.8. Ist M eine null-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist M eine disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Punkten. Ist M also zusammenhängend, dann ist $M = \{*\}$.

Ist M eine eindimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand, dann ist M eine disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Kreisen und abgeschlossenen Intervallen.* Alle eindimensionalen Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

Sei $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit gewählter Orientierung, so dass $\kappa(x) = x$ positiv orientiert ist. Die Definition von induzierter Orientierung wird auf den Rand von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten fortgesetzt, in dem wir sagen, $\{a\}$ ist negativ orientiert und $\{b\}$ ist positiv orientiert (bzw. genau andersherum, wenn $\kappa(x) = -x$ positiv orientiert ist).

II.10.3. Differentialformen

Differentialformen geben eine einheitliche Sprache, um Integrale zu definieren, egal ob über Kurven, Flächen, Körper oder Mannigfaltigkeiten.

Vorl. 25 - 23.01.

In der Physik werden Differentialformen z.B. verwendet um Elektromagnetismus mathematisch zu formulieren.

Wir führen als erstes allgemeiner den Begriff des Tensors ein. Tensoren kennt man bereits aus der (multi-)linearen Algebra. Wie bei der Riemannschen Metrik wird dann verlangt, dass punktweise der Begriff der linearen Algebra vorliegt und das ganze dann glatt vom Punkt der Mannigfaltigkeit abhängt:

*Für einen Beweis siehe z.B. [GP74, Appendix 2].

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Einsformen. In einem festen Punkt $p \in M$ ist eine *Einsform* einfach nur das Dual eines Tangentialvektors in $T_p M$, also ein Element $\omega_p \in T_p^* M$ im Kotangentialraum in $p \in M$, also eine lineare Abbildung $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, vgl. Definition II.1.8. In lokalen Koordinaten x^α um p ist $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p$ eine Basis vom $T_p M$. Die zugehörige duale Basis bezeichnen wir mit $dx^\alpha|_p$, d.h. $dx^\alpha|_p \in T_p^* M$ und $dx^\alpha|_p(\frac{\partial}{\partial x^\beta}|_p) = \delta_\beta^\alpha$. Also haben wir in lokalen Koordinaten die Darstellung $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p))dx^\alpha|_p$ mit $\omega_\alpha(\kappa(p)) \in \mathbb{R}$ für alle α .

Wie bei glatten Vektorfeldern wollen wir, dass unsere Einsform auf M glatt vom Punkt abhängt:

Definition II.10.9. Eine *glatte Einsform* ω auf M ist eine glatte Familie $(\omega_p \in T_p^* M)_{p \in M}$, d.h. in lokalen Koordinaten x einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p))dx^\alpha|_p$ und $\omega_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Die Menge der Einsformen auf M bezeichnen wir mit $\Omega^1(M)$.

Analog wie bei Vektorfeldern kann man nachrechnen, dass diese Glattheitseigenschaft nicht von der Wahl der Karten abhängt. Weiterhin schreiben wir für die lokale Darstellung oft kurz $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$.

Insbesondere gibt ein $\omega \in \Omega^1(M)$ damit eine Abbildung

$$\omega: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad X \mapsto (p \in M \mapsto \omega_p(X(p))).$$

Die Linearität der Einsform in jedem Punkt führt zu einer $C^\infty(M)$ -Linearität für $\omega \in \Omega^1(M)$: Sei $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist

$$\omega(fX) = f\omega(X) \in C^\infty(M).$$

Aus (II.1) folgt direkt die Formel, wie sich Einsformen unter Koordinatenwechsel transformieren: Sei $\omega = \tilde{\omega}_\beta dy^\beta$ die lokale Darstellung in Koordinaten y (Die zugehörige Karte heiße $\tilde{\kappa}$). Dann ist

$$\omega = \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} dy^\beta \quad \left(\text{expliziter: } \omega(p) = \omega_\alpha(\kappa(\tilde{\kappa}^{-1}(p))) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} |_{\tilde{\kappa}^{-1}(p)} dy^\beta|_p \right). \quad (\text{II.16})$$

(0, s)-Tensoren. In einem Punkt $p \in M^m$ ist ein $(0, s)$ -Tensor eine multilineare Abbildung

$$\phi: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Multilinearformen bilden einen Vektorraum, den wir mit $T_s^0(T_p M)$ bezeichnen. Für $\phi \in T_{s_1}^0(T_p M)$ und $\psi \in T_{s_2}^0(T_p M)$ definiert man das *Tensorprodukt* $\phi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^0(T_p M)$ durch

$$\phi \otimes \psi(v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) := \phi(v_1, \dots, v_{s_1})\psi(v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}).$$

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Das Tensorprodukt $T_{s_1}^0(T_p M) \otimes T_{s_2}^0(T_p M)$ definieren wir als den linearen Span aller $\phi \otimes \psi$ mit $\phi \in T_{s_1}^0(T_p M)$ und $\psi \in T_{s_2}^0(T_p M)$, wobei Elemente $\sum_k \phi_1^k \otimes \psi_1^k$ und $\sum_j \phi_2^j \otimes \psi_2^j$ als identisch betrachtet werden, wenn sie als multilineare Abbildungen identisch sind.

D.h. wir können z.B. eine Bilinearform als Tensorprodukt von Einsformen auffassen: In lokalen Koordinaten x^α haben wir für eine semi-Riemannsche Metrik im Punkt $p \in M$

$$g_p = g_{\alpha\beta}(p) dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p^* \quad (\text{II.17})$$

Denn:

$$g_p(X, Y) = X^\alpha Y^\beta g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p, \frac{\partial}{\partial x^\beta}|_p\right) =: X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) (dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p)(X, Y).$$

Also bildet $dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p$ eine Basis von $T_2^0(T_p M)$. Analog sieht man, dass $dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$ eine Basis von $T_s^0(T_p M)$ bildet. Damit ist $\dim T_s^0(T_p M) = m^s$.

Es ist also per Definition schon $T_{s_1}^0(T_p M) \otimes T_{s_2}^0(T_p M) \subset T_{s_1+s_2}^0(T_p M)$, aber es gilt sogar $T_{s_1}^0(T_p M) \otimes T_{s_2}^0(T_p M) \cong T_{s_1+s_2}^0(T_p M)$ (folgt aus Auswertung auf Basiselementen).

Definition II.10.10. Ein *glatter* $(0, s)$ -Tensor ϕ auf M ist eine glatte Familie $(\phi_p \in T_s^0(T_p M))_{p \in M}$, d.h. in lokalen Koordinaten x einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist

$$\phi_p = \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\kappa(p)) dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$$

und $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Die Menge der glatten $(0, s)$ -Tensoren auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^0 M$.

Oft schreiben wir kurz: $\phi = \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}$. Im Falle, dass die $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ invariant unter Permutation der Indizes sind schreibt man sogar $\phi = \phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_s}$. Die letzte Schreibweise hatten wir z.B. für die formale Notation der Metrik $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ genutzt. Eigentlich ist das auch hier das Tensorprodukt und benutzt, dass $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ist und es deshalb auf die Reihenfolge der dx^α nicht ankommt.

Transformationsverhalten $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s} \\ &\stackrel{\text{multilin.}}{=} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_s}}{\partial y^{\beta_s}} dy^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dy^{\beta_s}. \end{aligned}$$

(r, s) -Tensoren. Da ein Vektorraum V kanonisch isomorph zu seinem Bidual $V^{**} = (V^*)^*$ ist, kann ein Vektor $v \in V$ auch als lineare Abbildung $v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden, also als Element in $T_1^0(V^*)$.

In diesem Sinne, definieren wir einen (r, s) -Tensor als eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Wie oben bilden diese Tensoren einen Vektorraum, den wir nun mit $T_s^r(V)$ bezeichnen. Wir können analog das Tensorprodukt für $\phi \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ und $\psi \in T_{s_2}^{r_2}(V)$ als $\phi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ durch

$$\begin{aligned} & \phi \otimes \psi(u^1, \dots, u^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) \\ & := \phi(u^1, \dots, u^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1})\psi(u^{r_1+1}, \dots, u^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}) \end{aligned}$$

definieren sowie den Vektorraum $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V)$ als Span aller solcher $\phi \otimes \psi$ einführen.

Bemerkung II.10.11.

- (i) $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) \cong V$, Z.B. ist die Dualitätspaarung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein $(1, 1)$ -Tensor.
- (ii) Analog zu den $(0, s)$ -Tensoren folgt: Ist e_1, \dots, e_m eine Basis von V und ϵ^i die zugehörige Dualbasis, dann ist

$$\{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{k_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{k_s} \mid 1 \leq j_i, k_i \leq m\}$$

eine Basis von $T_s^r(V)$. Damit ist $\dim T_s^r(V) = m^{r+s}$.

- (iii) Die obige Definition von $\phi \otimes \psi$ induziert eine lineare Abbildung $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V) \rightarrow T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$. Das ist ein Isomorphismus. Insbesondere kann man so $T_s^r(V)$ mit

$$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

identifizieren.

- (iv) Der Vollständigkeit halber betrachtet man ein Element in \mathbb{R} als einen $(0, 0)$ -Tensor.

Wenden wir das wieder auf $V = T_p M$ mit variierendem p an:

Definition II.10.12. Ein *glatter (r, s) -Tensor* ist eine glatte Familie von (r, s) -Tensoren $\phi_p \in T_s^r(T_p M)$, d.h. in lokalen Koordinaten x^α einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist

$$\phi_p = \phi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}$$

und $\phi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Den Vektorraum aller (r, s) -Tensoren bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^r M$.

Insbesondere ist ein glatter $(0, 0)$ -Tensor ein Element in $C^\infty(M)$.

Bemerkung II.10.13. Operationen, die man von Vektoren kennt, vererben sich mittels punktweiser Anwendung zuerst auf Vektorfelder und dann mittels Dualität und Multilinearität auf (r, s) -Tensorfelder:

- (i) Addition: $\mathcal{T}_s^r M \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$, $(T + S)(p) := T(p) + S(p)$

- (ii) Multiplikation mit glatten (reellwertigen) Funktionen: $C^\infty(M) \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$, $(f, T) \mapsto fT$ mit $fT(p) := f(p)T(p)$. Es gilt $f_1(f_2T) = (f_1f_2)T$ und $(f_1 + f_2)T = f_1T + f_2T$.

Das macht $\mathcal{T}_s^r M$ zu einem $C^\infty(M)$ -Modul.

Es kommt nun noch die Operation des *Tensorprodukts* hinzu $\mathcal{T}_{s_1}^{r_1} M \otimes \mathcal{T}_{s_2}^{r_2} M \rightarrow \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2} M$, $(\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi$.

Insbesondere Eigenschaft (ii) kann als bestimmende Eigenschaft von Tensoren gesehen werden: Die Multilinearität in jedem Punkt impliziert die $C^\infty(M)$ -Linearität des Tensors:

Bemerkung II.10.14. ('Tensoriell'- Charakterisierung von Tensoren) Eine multilineare Abbildung

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}},$$

die $T(f_1X_1, \dots, f_sX_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s)$ für alle $f_i \in C^\infty(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ erfüllt, definiert einen (r, s) -Tensor durch

$$\tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) := \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s)), *$$

Man sagt T ist *tensoriell* bzw. $C^\infty(M)$ -linear in den r -Einträgen, wobei $T(X_1, \dots, X_s) = \sum_{k=1}^{\ell} Y_{k1} \otimes \dots \otimes Y_{kr}$ für geeignete Vektorfelder $Y_{ki} \in \mathfrak{X}(M)$ ist und damit $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s)) = \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{i=1}^r \omega^i(Y_{ki})$ ist. Andersherum ergibt jeder glatte (r, s) Tensor \tilde{T} eine Abbildung T mit obigen Eigenschaften.

Beispiel II.10.15. Aus den Eigenschaften vom Levi-Civita Zusammenhang ∇ oder der lokalen Darstellung von ∇ folgt direkt, dass der Wert von $\nabla_X Y$ im Punkt p nur von X im Punkt p abhängt. Da Y jedoch differenziert wird, hängt dieser Ausdruck nicht nur von Y im Punkt p ab, sondern nur von Y entlang einer Kurve ausgehend von p mit Anfangsvektor $X(p)$.

Damit kann man $\nabla Y: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $X \mapsto \nabla_X Y$ für festes $Y \in \mathfrak{X}(M)$ als $(1, 1)$ -Tensor auffassen: $(\nabla Y)_p: T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $(\nabla Y)_p(\omega_p, X_p) := \omega_p((\nabla_X Y)_p)$. Deshalb nennt man Eigenschaft (ii) aus Lemma II.2.1 auch *tensoriell*. Die Abbildung $\nabla_X: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $Y \mapsto \nabla_X Y$, ergibt hingegen keinen Tensor, da ∇ derivativ in der zweiten Komponente ist.

Analog ist Riem ein $(1, 3)$ -Tensor und Ric ein (symmetrischer) $(0, 2)$ -Tensor.

Bemerkung II.10.16. $(\mathfrak{X}(M) \leftrightarrow \Omega^1(M))$ mit Hilfe von g) Der Vektorraum V und sein Dual sind zwar isomorph, aber es gibt keinen natürlichen Isomorphismus zwischen beiden (anders als bei V und V^{**}). Haben wir auf unserer Mannigfaltigkeit allerdings

*Achtung: Hier sind die Indizes bei X_j und ω^j nur Indizes für verschiedene Vektorfelder bzw. Einsformen und nicht die Indizes für die Komponentenfunktionen in lokalen Koordinaten. Deshalb wird hier auch für die X_i/ω^i der untere/obere Index verwendet, um das zu unterscheiden.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

eine (semi-)Riemannsche Metrik, können wir mit dieser Zusatzstruktur einen solchen Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$ mittels $T_p M \rightarrow T_p^* M$, $v \mapsto v^\flat := g_p(\cdot, v)$ auszeichnen und damit auch einen zwischen Vektorfelder und 1-Formen:

$$\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad X \mapsto X^\flat := g(X, \cdot).$$

Man muss sich noch überlegen, dass dies wirklich ein Isomorphismus ist. Das folgt lokal mittels einer Abbildung der Basen (definiert über Koordinaten) aufeinander abgebildet werden. In lokalen Koordinaten x^α auf $U \subset M$ ist die Abbildung $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ durch

$$X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \mapsto g(X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \cdot) = g_{\alpha\beta} (dx^\alpha \otimes dx^\beta) \left(X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \cdot \right) = X^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta$$

gegeben.*

Da aus dem oberen Index der Koordinatenschreibweise X^α so ein Objekt mit resultierendem (Da über α summiert wird, bleibt nur β .) unterem Index β in $X^\alpha g_{\alpha\beta}$ wird, sagt man dazu auch *Runterziehen eines Index mittels g* .

Die inverse Abbildung zu \flat wird mit \sharp bezeichnet, d.h. $\omega \in \Omega^1(M) \mapsto \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ – dann ist $\omega_\alpha dx^\alpha \mapsto \omega_\alpha g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$. Wir sagen dazu, dass wir *einen Index mittels g Hochziehen*.[†]

Mit dieser Methode haben wir z.B. auch den Gradienten eines $f \in C^\infty(M)$ definiert, vgl. S. 68. Aber auch aus dem (0, 2)-Ricci-Tensor einen (1, 1)-Ricci-Tensor gemacht, vgl. Bemerkung II.6.10.

Bemerkung II.10.17. In der lokalen Darstellung kann man an der Stellung der Indizes oben/unten sehen, um welche Art von Tensor es sich handelt. Insbesondere transformieren sich obere Indizes anders als untere Indizes unter Koordinatenwechsel. In der Physik sagt man, obere Indizes transformieren sich *kovariant*, unter *kontravariant*.

Differentialformen. Die antisymmetrischen Tensoren in $\alpha \in T_k^0(T_p M)$, d.h.

$$\begin{aligned} & \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) \\ &= -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k), \end{aligned}$$

für alle $i \neq j$, bezeichnen wir mit $\Lambda^k T_p M$.

Eine k -Differentialform ist (0, k)-Tensor

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M),$$

*Auch $X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto \sum_\alpha X^\alpha dx^\alpha$ ist lokal ein Isomorphismus. Er ist aber keine gute Wahl, weil er stark von den gewählten Koordinaten abhängt - er hat nicht das nötige Transformationsverhalten, um in neuen Koordinaten ganz analog definiert zu sein. Das auf der rechten Seite das α beides mal als oberer Index auftaucht, ist das Indiz dafür.

[†]Deshalb auch die Notation mit den musischen Operatoren \sharp bzw. \flat , die auch die Töne in der Musik Hoch- bzw. Runterziehen.

der antisymmetrisch ist. Die Menge der k -Differentialformen auf M bezeichnen wir mit $\Omega^k(M)$.

Die Abbildung $P: \mathcal{T}_k^0(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ definiert durch

$$(PT)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})$$

für alle $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, ist eine Projektionsabbildung, d.h. $P^2 = P$.

Wir definieren in lokalen Koordinaten x^i auf $U \subset M$

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} := k! P(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}).$$

Aus der Antisymmetrie folgt z.B.

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2(X_1, X_2) &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn } \sigma dx^1 \otimes dx^2(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \\ &= dx^1(X_1)dx^2(X_2) - dx^2(X_2)dx^1(X_1), \end{aligned}$$

und damit ist

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad \text{und} \quad dx^i \wedge dx^i = 0.$$

Damit ist $\{dx^{i_1}|_p \wedge dx^{i_2}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p\}_{i_1 < \dots < i_k}$ in jedem $p \in U$ eine Basis der antisymmetrischen Tensoren in $T_k^0(T_p M)$ und $\dim \Lambda^k T_p M = \binom{m}{k}$. Insbesondere ist $\Lambda^{k>m} T_p M = \{0\}$ und damit $\Omega^{k>m}(M) = \{0\}$. Außerdem ist $\Lambda^m T_p M = \mathbb{R} \cdot dx^1|_p \wedge \dots \wedge dx^m|_p$ und aus $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^m(M)$ folgt somit die Existenz einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $\omega_1 = f\omega_2$.

Das Dachprodukt/Wedge-Produkt für Differentialformen Seien $\omega \in \Omega^k(M) \subset \mathcal{T}_k^0(M)$ und $\eta \in \Omega^\ell(M) \subset \mathcal{T}_\ell^0(M)$. Dann sei das *Dachprodukt* definiert Vorl. 26 - 25.01.

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} P(\omega \otimes \eta) \in \Omega^{k+\ell}(M).$$

Der Faktor vor P ist so gewählt, dass

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}) = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}$$

gilt. Man kann direkt folgende Eigenschaften des Dachprodukts nachrechnen:

Lemma II.10.18. *Das Dachprodukt ist assoziativ und antikommutativ. Antikommutativ heißt hier*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^\ell(M).$$

Beispiel II.10.19. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sind $X_i, i = 1, \dots, k$, Vektorfelder auf M , dann ist $X_i^\flat \in \Omega^1(M)$ und damit $\omega := X_1^\flat \wedge \dots \wedge X_k^\flat \in \Omega^k(M)$. In einem Punkt $p \in M$ verschwindet dieses $\omega|_p \in \Lambda^k T_p M$ genau dann, wenn $X_1(p), \dots, X_k(p)$ linear abhängig sind.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Pullback von Differentialformen Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Wir definieren $F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ als

$$(F^*\alpha)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) = \alpha_{F(p)}(d_p F(X_1(p)), \dots, d_p F(X_k(p)))$$

für alle $\alpha \in \Omega^k(N)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Lemma II.10.20. *In lokalen Koordinaten gilt*

$$F^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = (f_{i_1 \dots i_k} \circ F) \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Weiterhin ist $F^*f = f \circ F$ für $f \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$ und $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ für alle $\alpha \in \Omega^k(N)$ und $\beta \in \Omega^\ell(N)$.

Sind N und M m -dimensional lokal mit den Koordinaten x^i bzw y^j versehen und ist $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega^m(N)$, dann gilt

$$F^*\omega = \det dF dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m. \quad (\text{II.18})$$

Beweis. Direktes Nachrechnen. Die Formel für $F^*\omega$ folgt dann direkt aus dem Entwicklungssatz für Determinanten. \square

Die Änderung lokaler Koordinaten ist auch immer ein lokaler Diffeomorphismus. D.h. insbesondere, dass die letzte Formel für $F^*\omega$ insbesondere zeigt, dass $\omega \in \Omega^m(M)$ unter Koordinatentransformationen das gleiche Verhalten zeigt, wie wir es von dem Transformationssatz für Oberflächenintegrale kennen. Das wird der Grund sein, warum wir später Topformen (also die m -Formen einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit) wohldefiniert integrieren können.

Die äußere Ableitung $d = d_M^k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ soll die Tangentialabbildung df von Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern. Für solche $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$ ist df eine lineare Abbildung von $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und kann damit als 1-Form aufgefasst werden: $df \in \Omega^1(M)$.

Wir definieren $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ durch: Sei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und x^i lokale Koordinaten um $p \in M$. In diesen Koordinaten habe α die Form $f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Dann sei $d\alpha$ die $k+1$ -Form, die in diesen lokalen Koordinaten die Form $d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ hat.

Wohldefiniertheit von d ? Wie überprüft man, dass die lokalen Formeln ein globales Objekt definieren?

Man überprüft, dass für Darstellungen in zwei verschiedenen lokalen Koordinaten, auch die Bilder der Abbildungen wieder das gleiche Objekt nur in verschiedenen Koordinaten darstellen: Sei y^i andere Koordinaten um p . Dann hat α in diesen Koordinaten die Form

$$\alpha = f_{i_1 \dots i_k}(x(y)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_k}$$

und

$$d\alpha = \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial y^b} dy^b \wedge \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_k}.$$

Benutzt man die Definition von $d\alpha$ in den Koordinaten y^i erhält man:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial y^b} dy^b \wedge \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_k} \\ &+ f_{i_1 \dots i_k}(x(y)) \frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial y^{j_1} \partial y^b} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^b \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k} \\ &+ \dots \text{(ähnliche zweite Ableitungen der anderen } \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{j_r}} \text{)}. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist genau $d\alpha$ wie oben definiert und die ganzen anderen Summanden verschwinden wegen der Antisymmetrie von \wedge und dem Lemma von Schwarz. Die zeigt die Unabhängigkeit der Definition von d von der Wahl der Koordinaten.

Oft wird d auch abstrakt eingeführt, im Sinne, dass die folgenden Eigenschaften den Operator d eindeutig bestimmen:

Lemma II.10.21. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Mannigfaltigkeiten M existiert genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d = d_M^k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ist $d_M^0 f$ gerade die Tangentialabbildung df
- (2) (Leibnizregel) Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ gilt $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- (3) $d^2 = d_M^{k+1} \circ d_M^k = 0$
- (4) (Natürlichkeit) Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, dann gilt $F^* \circ d_N^k = d_M^k \circ F^*$.

Der Operator d heißt äußere Ableitung.

Beweis. Das 'unser' d von oben, die Eigenschaften erfüllt, kann man mit der lokalen Darstellung einfach nachrechnen. Dann rechnet man nach (induktiv über k), dass ein d welches diese Eigenschaften hat, sich lokal wie unser d von oben verhalten muss. \square

Beispiel II.10.22. (Die äußere Ableitung im \mathbb{R}^3) Sei $M = \mathbb{R}^3$, $f, \omega_i, V_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann haben wir $df = (\text{grad} f)^b$. Für $\omega = \omega_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_i dx^i) = \partial_j \omega_i dx^j \wedge dx^i \\ &= (\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 \omega_3 - \partial_3 \omega_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 \omega_1 - \partial_1 \omega_3) dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Es ist $(\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1, \partial_2 \omega_3 - \partial_3 \omega_2, \partial_3 \omega_1 - \partial_1 \omega_3) = \text{rot}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$.

Jede zwei-Form $\alpha = V_3 dx^1 \wedge dx^2 + V_1 dx^2 \wedge dx^3 + V_2 dx^3 \wedge dx^1$ kommt von einem Vektorfeld $V = (V_1, V_2, V_3)$ und es gilt

$$d\alpha = (\text{div} V) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Ist $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$, dann ist $d\omega = 0$, da $\Omega^{k \geq \dim N}(N) = \{0\}$ ist.

Die äußere Ableitung implementiert in \mathbb{R}^3 damit die klassischen Operatoren der Vektorrechnung. Die Identität $d^2 = 0$ ist dann einfach $\text{rot grad } f = 0$ und $\text{div rot } V = 0$.

Lemma II.10.23. Für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Hier bedeutet \check{X}_i , dass der i -te Index in dieser Folge ausgelassen wird. Insbesondere gilt für Einsformen $\omega \in \Omega^1(M)$:

$$d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]). \quad (\text{II.19})$$

Beweis. Wir rechnen hier nur den Fall $k = 1$ lokal nach, die allgemeine Formel geht analog: Sei $\omega = \omega_i dx^i$, $X = X^i \partial_i$ und $Y = Y^j \partial_j$. Dann gilt $d\omega = \partial_j \omega_i dx^j \wedge dx^i$ und damit

$$\begin{aligned} X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) &= X^i \partial_i (\omega_j Y^j) - Y^j \partial_j (\omega_i X^i) - \omega_i (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \\ &= X^i Y^j \partial_i \omega_j - Y^j X^i \partial_j \omega_i = d\omega(X, Y). \quad \square \end{aligned}$$

Vorl. 27 - 30.01.

Differentialformen und Orientierbarkeit

Satz II.10.24. Eine Mannigfaltigkeit M^m ist genau dann orientierbar, wenn es nirgends verschwindende m -Form $\omega \in \Omega^m(M)$ gibt.

Beweis. Sei ω zuerst eine nirgends verschwindende m -Form auf M . Sei \mathcal{A} ein Atlas von M und $r: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (-x^1, \dots, x^m)$, die Reflexion in der ersten Koordinate. Sei \mathcal{A}' die Menge aller Karten aus \mathcal{A} für deren lokale Koordinaten $\omega(\partial_1, \dots, \partial_m) > 0$ gilt. Wir setzen

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}' \cup \{r \circ \kappa \mid \kappa \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'\}.$$

Dann ist \mathcal{B} ein Atlas von M . Weiterhin gilt für ein Paar $\kappa: U \rightarrow V$ und $\eta: U' \rightarrow V'$ von Karten in \mathcal{B} mit $U \cap U' \neq \emptyset$ und zugehörigen Koordinaten x^i bzw. y^i :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial(\kappa^j \circ \eta^{-1})}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

und damit wegen Multilinearität und Antisymmetrie

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \det D(\kappa \circ \eta^{-1}) \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}\right).$$

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Da beide Ausdrücke in ω nach Konstruktion von \mathcal{B} punktweise positiv sind, folgt $\det D(\kappa \circ \eta^{-1}) > 0$. Damit ist \mathcal{B} ein orientierter Atlas.

Sei andererseits M orientierbar. Dann gibt es einen orientierten Atlas $\mathcal{B} = \{\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ für M . Sei ρ_α eine untergeordnete Zerlegung der Eins zu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Wir setzen

$$\omega := \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} dx_{\alpha}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\alpha}^m,$$

wobei x_{α}^i die zu κ_{α} zugehörigen Koordinaten seien. Es ist $\omega \in \Omega^m(M)$. Für $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, folgt aus der Orientierbarkeit von M und $\dim \Lambda^m T_p M = 1$, dass $dx_{\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_1}^m$ punktweise ein positives Vielfaches von $dx_{\alpha_2}^1 \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_2}^m$ ist. Damit ist ω nirgends verschwindend. \square

Bemerkung II.10.25. Jede nicht orientierbare Mannigfaltigkeit M hat eine zweifache Überlagerung \tilde{M} , die orientierbar ist. (Eine zweifache Überlagerung \tilde{M} von M ist eine Mannigfaltigkeit, die eine freie \mathbb{Z}_2 -Gruppenwirkung besitzt, deren Orbitraum wieder M ist.)

Lemma II.10.26. *Ist (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert*

$$dvol_g(v_1 \in T_p M, \dots, v_m \in T_p M) := \det (g_p(v_i, e_j))_{ij}$$

(d.h. $dvol_g|_p = e_1^b \wedge \dots \wedge e_m^b$), für e_i eine positiv orientierte Orthonormalbasis in $T_p M$, eine nirgends verschwindende Form $dvol_g \in \Omega^m(M)$. Bzgl. lokaler Koordinaten x^i einer positiv orientierten Karte um p gilt $dvol_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$.

Beweisschritte: Man rechnet erst nach, dass für gegebenes $p \in M$ die Definition nicht von der gewählten Orthonormalbasis abhängt. Wegen der Antisymmetrie der Determinante folgt dann $dvol_g|_p \in \Lambda^m T_p M$. Lokal gibt es immer glatte Vektorfelder e_i die punktweise eine Orthonormalbasis des zugehörigen Tangentialraumes bilden. Wegen Wohldefiniertheit in jedem Punkt folgt $dvol_g \in \Omega^m(M)$.

Sei κ eine positive orientierte Karte mit lokalen Koordinaten x^i . Dann ist $dvol_g = f(x = (x^1, \dots, x^m)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, da $\Lambda^m T_p M$ für jedes $p \in M$ eindimensional ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (dvol_g(\partial_1, \dots, \partial_m))^2 = \det^2 (g(\partial_i, e_j)) \\ &= \det (g(\partial_i, e_j)_{i,j}) \cdot \det (g(e_j, \partial_{\ell})_{j,\ell}) = \det (g(\partial_i, \partial_{\ell})_{i,\ell}) = \det g_{i\ell}. \end{aligned} \quad \square$$

Integration von Differentialformen Beim Koordinatenwechsel von Topformen mit einem lokalen Diffeomorphismus in (II.18) haben wir schon gesehen, dass diese das gleiche Verhalten wie im Transformationssatz haben. Das ist der Grund, warum unsere nachfolgende Definition vom Integral einer Topform unabhängig der gewählten Koordinaten ist.

Sei $\omega \in \Omega^m(M)$. Sei $\kappa : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ mit lokalen Koordinaten x^i . Dann hat $(\kappa^{-1})^* \omega$ die Form $a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ mit $a \in C^\infty(V)$. Das können wir über V integrieren:

$$\int_V (\kappa^{-1})^* \omega := \int_V a dx^1 \dots dx^m.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

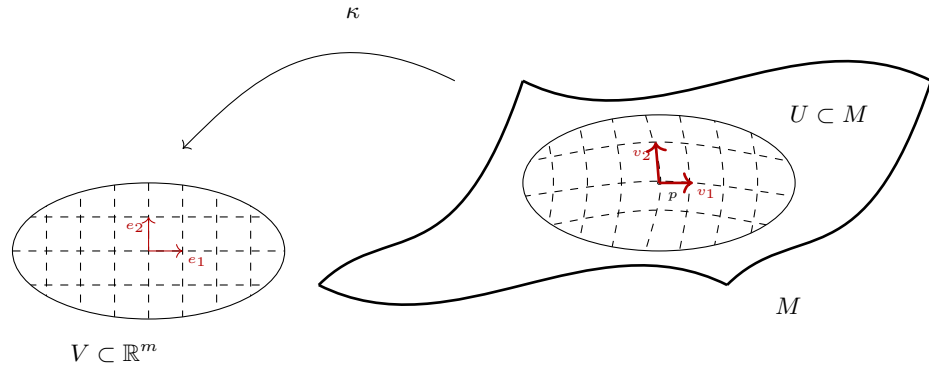


Abb. II.14.: Sei e_i eine Orthogonalbasis vom \mathbb{R}^m mit $\|e_i\| = \epsilon$ und $v_i := (d_p \kappa)^{-1}(e_i)$. Dann ist der Flächeninhalt des Parallelepipeds, welches durch v_i gebildet wird, geteilt durch ϵ^m im Limes für $\epsilon \rightarrow 0$ gleich $\sqrt{\det g_{ij}(p)}$.

Haben wir einen orientierten Atlas von M mit Karten $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins ρ_α . Dann definieren wir

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{V_\alpha} (\kappa_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega).$$

Man kann nachrechnen (mittels Transformationssatz für Integrale und (II.18)), dass diese Definition unabhängig vom gewählten Atlas (bei gegebener Orientierung ist) ist. Ändert man die Orientierung der Mannigfaltigkeit, ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Für $M = \{p\}$ positiv bzw. negativ orientiert und $f \in C^\infty(M)$ (was einfach nur eine Zuordnung $p \mapsto c \in \mathbb{R}$ ist), sei $\int_M f = f(p)$ bzw. $\int_M f = -f(p)$.

Ist (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann bezeichnen wir mit $\text{vol}(M, g) := \int_M \text{dvol}_g$ das *Volumen von (M, g)* . Während dvol_g global nur für orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert ist, kann man $\text{vol}(M, g)$ auch allgemein für Riemannsche Mannigfaltigkeiten definieren, indem man die Additivität des Volumen nutzt, sowie dass lokal alle Mannigfaltigkeiten orientierbar ist und dass das Volumen nichtnegativ ist.

Anschaung: $\sqrt{\det g_{ij}}$ misst die Volumenänderung eines kleinen Parallelepipeds unter der Karte, vgl. Abbildung II.14.

Lemma II.10.27. *Ist $f: Y \rightarrow X$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten, dann gilt*

$$\int_X \omega = \int_Y f^* \omega.$$

Auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit können wir nur m -Formen integrieren. D.h. aber auch das wir auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit, die Einschränkung einer k -Form aus $\Omega^k(M)$ integrieren können:

Sei $\Sigma \subset M$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M und $\iota: \Sigma \hookrightarrow M$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$. Dann ist $\omega|_{\Sigma} := \iota^*\omega \in \Omega^k(\Sigma)$ und wir setzen

$$\int_{\Sigma} \omega := \int_{\Sigma} \iota^*\omega =: \int_{\Sigma} \omega|_{\Sigma}.$$

Beispiel II.10.28. (Integration über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3)

- (i) Sei $\omega = \omega_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ und $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3): S^1 = [0, 1]/\{0 \sim 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Einbettung. Sei $\gamma(S^1)$ so orientiert, dass $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\gamma(S^1)$ positiv orientiert ist. (Bildet γ sogar nach \mathbb{R}^2 ab, dann ist $\gamma(S^1)$ positiv orientiert, γ mathematisch positiv durchlaufen wird.) Dann ist

$$\gamma^* dx^i = \dot{\gamma}^i(s) ds$$

und damit

$$\int_{\gamma(S^1)} \omega = \int_{S^1} (\omega_i \circ \gamma) \gamma^* dx^i = \int_0^1 \omega_i(\gamma(s)) \dot{\gamma}^i(s) ds.$$

Betrachten wir $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ als Vektorfeld V in \mathbb{R}^3 , dann ist $\int_{\gamma(S^1)} \omega = \int_{\gamma} V \cdot d\gamma$, also gleich dem Wegintegral zweiter Art*.

- (ii) Sei $\iota: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ der Graph einer Funktion $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\omega = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2$.

Wir benutzen $h(x^1, x^2) = (x^1, x^2, G(x^1, x^2))$ als lokale Parametrisierung von Σ . Zusammen mit der Orientierung induziert von der Mannigfaltigkeit

$$\hat{\Sigma} := \{(x, y, z) \mid z \leq G(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit Rand $\partial\hat{\Sigma} = \Sigma$. Dann ist

$$N = (1 + |\partial_1 G|^2 + |\partial_2 G|^2)^{-\frac{1}{2}} (-\partial_1 G, -\partial_2 G, 1)$$

das ins Äußere von $\hat{\Sigma}$ zeigende Einheitsnormalenvektorfeld von Σ , ist damit h ein orientierter Atlas von M , d.h. $\partial_1 h, \partial_2 h$ ist eine positive orientierte Basis auf Σ und damit

$$d\text{vol}_g = \sqrt{1 + |\partial_1 G|^2 + |\partial_2 G|^2} dx^1 \wedge dx^2$$

und

$$\begin{aligned} \iota^*\omega &= f_1 dx^2 \wedge (\partial_1 G dx^1 + \partial_2 G dx^2) + f_2 (\partial_1 G dx^1 + \partial_2 G dx^2) \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \\ &= (-f_1 \partial_1 G - f_2 \partial_2 G + f_3) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Insbesondere ist damit $\int_{\Sigma} \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \langle (f_1, f_2, f_3)^T, N \rangle dx^1 dx^2$.

*<https://de.wikipedia.org/wiki/Kurvenintegral>

II.10.4. Satz von Stokes

Satz II.10.29. (Satz von Stokes) Sei M^m eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand, und sei $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei ∂M mit der induzierten Orientierung (vgl. S. 101) versehen ist.

Bevor wir den schauen wir uns zuerst ein Spezialfälle an, die wir schon aus der Analysis kennen:

Beispiel II.10.30. (Spezialfälle)

- (i) Für $M = [a, b]$ mit der Standardorientierung von \mathbb{R} , ist $\partial M = \{a, b\}$ eine null-dimensionale Mannigfaltigkeit, so dass a negativ und b positiv orientiert ist. Für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty([a, b])$ gilt

$$\int_a^b f' dx = \int_M df = \int_{\partial M} f = f(b) - f(a).$$

- (ii) Gebiete $U \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand und Standardorientierung des \mathbb{R}^2 : Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die den Rand ∂U gegen den Uhrzeigersinn parametrisiert. Dann ist $\dot{\gamma}(t)$ eine positiv orientierte Basis von $T_{\gamma(t)}\partial U$.

Für $V \in \mathfrak{X}(U)$ definiert

$$\omega_V(X) = \langle V, X \rangle$$

eine Einsform $\omega_V \in \Omega^1(U)$. Es ist $\omega_V = V^1 dx^1 + V^2 dx^2$ für $V = V^i \partial_i$. Damit haben wir $d\omega_V = (\partial_2 V^1 - \partial_1 V^2) dx^1 \wedge dx^2$ und nach Stokes

$$\int_U (\partial_1 V^2 - \partial_2 V^1) dx^1 dx^2 = \int_U d\omega_V = \int_{\partial U} \omega_V \stackrel{\text{Bsp. II.10.28.i}}{=} \int_{\gamma} \langle V, \dot{\gamma} \rangle.$$

Das ist der Satz von Green.

Vorl. 28 - 01.02.

- (iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Hyperfläche. Sei g die induzierte Metrik auf M . Sei $\Sigma \subset M$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 mit Rand. Dann ist $\partial\Sigma$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, so dass $\dot{\gamma}(t)$ eine positiv orientierte Basis von $T_{\gamma(t)}\partial\Sigma$ ist.

Sei $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $\omega_V(X) = \langle V, X \rangle$ wieder eine Einsform auf \mathbb{R}^3 und nach Beispiel II.10.22 ist $d\omega_V = f_3 dx^1 \wedge dx^2 + f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1$ für $\text{rot } V = (f_1, f_2, f_3)$. Damit haben wir

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot } V, N \rangle d\text{vol}_g \stackrel{\text{Bsp. II.10.28.ii}}{=} \int_{\Sigma} d\omega_V = \int_{\partial\Sigma} \omega_V \stackrel{\text{(ii)}}{=} \int_{\partial\Sigma} \langle V, \dot{\gamma} \rangle.$$

Das ist der klassische Satz von Stokes.

- (iv) Gebiete $U \subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand Σ : Dann ist Σ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 und die Standardorientierung auf $U \subset \mathbb{R}^3$ induziert auf $\Sigma = \partial U$ eine Orientierung. Sei N das Einheitsnormalenvektorfeld von Σ , was von U weg zeigt, und sei g die induzierte Metrik auf Σ .

Sei $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ und $\omega = V_3 dx^1 \wedge dx^2 + V_2 dx^3 \wedge dx^1 + V_1 dx^2 \wedge dx^3$.

Dann ist

$$\int_U \operatorname{div} V dx^1 dx^2 dx^3 \stackrel{\text{Bsp. II.10.22}}{=} \int_U d\omega = \int_\Sigma \omega \stackrel{\text{Bsp. II.10.28.ii}}{=} \int_\Sigma \langle V, N \rangle \operatorname{dvol}_g.$$

Das ist der Gaußsche Integralsatz.

Beweis vom Satz von Stokes. Sei $\mathcal{A} = \{\kappa_\alpha: U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}_+^m\}_\alpha$ ein orientierter Atlas von M und ρ_α eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Sei zunächst $\operatorname{supp} \omega \subset U$ für ein $\kappa: U \rightarrow V$ aus \mathcal{A} . Dann ist

$$\int_M d\omega = \int_V (\kappa^{-1})^*(d\omega) = \int_V d((\kappa^{-1})^*\omega).$$

Da $(\kappa^{-1})^*\omega$ eine $(m-1)$ -Form auf \mathbb{R}^m ist, hat sie die Form

$$(\kappa^{-1})^*\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \check{d}x^i \wedge \dots \wedge dx^m$$

für $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^m)$ mit $\operatorname{supp} f_i \subset V$. Damit ist

$$d((\kappa^{-1})^*\omega) = \sum_{i=1}^m \partial_i f_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^m$$

und

$$\int_V d((\kappa^{-1})^*\omega) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}_+^m} \partial_i f_i dx^1 \dots dx^m = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \dots dx^{m-1}.$$

Die zweite Gleichheit folgt mittels Fubini und indem man im i -ten Summanden zuerst über x^i integriert und $\operatorname{supp} f_i \subset V$ nutzt.

Es ist

$$\begin{aligned} \kappa^*\omega|_{\mathbb{R}^{m-1}} &= (-1)^{m-1} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1} \\ &= - f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) \operatorname{dvol}_{\mathbb{R}^{m-1}}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit benutzt, dass nach Definition der induzierten Orientierung ist für den Rand \mathbb{R}^{m-1} von \mathbb{R}_+^m die Basis $\{(-1)^m e_1, \dots, e_{m-1}\}$ positiv orientiert. Damit ist

$$\int_V d((\kappa^{-1})^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \kappa^*\omega|_{\mathbb{R}^{m-1}} = \int_{\partial M} \omega.$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Für allgemeines $\omega \in \Omega^m(M)$ gilt somit

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\partial M} \rho_{\alpha} \omega = \sum_{\alpha} \int_M d(\rho_{\alpha} \omega) = \int_M d\omega. \quad \square$$

Der Satz von Stokes gilt auch für Mannigfaltigkeiten mit Ecken:

Definition II.10.31. Eine *glatte Mannigfaltigkeit mit Ecken* ist ein topologischer Raum (M, \mathcal{T}) , so dass die Topologie Hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis besitzt und lokal homöomorph zu

$$\mathbb{R}_{++}^m := \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^{m-1} \geq 0, x^m \geq 0\}$$

ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ um p , eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}_{++}^m$ und eine Abbildung $\kappa: U \rightarrow V$, so dass κ ein Homöomorphismus ist und dass die Kartenwechsel $\kappa \circ (\kappa')^{-1}$ für jedes Paar von Karten $\kappa: U \rightarrow V$ und $\kappa': U' \rightarrow V'$ glatte Abbildungen sind. Wir nennen

$$\partial M := \{p \in M \mid \exists \text{ Karte } \kappa: U \rightarrow V \text{ von } M \text{ mit } \kappa(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}\}$$

den *Rand* von M und

$$\partial^2 M := \{p \in M \mid \exists \text{ Karte } \kappa: U \rightarrow V \text{ von } M \text{ mit } \kappa(p) \in \mathbb{R}^{m-2} \times \{(0, 0)\}\}$$

die *Ecken* von M .

Ähnlich wie bei Mannigfaltigkeiten mit Rand sieht man, dass $\partial M \setminus \partial^2 M$ und $\partial^2 M$ wieder Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind.

Beispiel II.10.32. Sei $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ eine Karte einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M . Sei $P \subset U$ ein Gebiet dessen topologischer Rand ein Polygon in U ist. Dann ist $\kappa^{-1}(U)$ eine Mannigfaltigkeit mit Ecken.

Es gilt auch für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Ecken der Satz von Stokes, wobei $\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M \setminus \partial^2 M} \omega$ ist. Der Beweis ist sehr analog zum Fall von Mannigfaltigkeiten mit Rand.

II.10.5. Gauß-Bonnet

Sei (M, g) eine zweidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Aufgrund der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors kann für eine positiv orientierte Orthonormalbasis e_1, e_2 von $T_p M$ nur $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121}$ nicht Null sein. Dieses $K = R_{1221}$ wird dann *Gaußkrümmung* von (M, g) genannt.

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Gesamtkrümmung $\int_M K \, \text{dvol}_g$ von kompakten (M, g) nicht von der Metrik auf M abhängt, sondern nur von der Topologie von M . Dies wird der Satz von Gauß-Bonnet sein.

Dazu brauchen wir jedoch zunächst

Zusammenhangs- und Krümmungsformen

Sei (M^m, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $U \subset M$ eine Umgebung von p klein genug, so dass es Vektorfelder $e_i \in \mathfrak{X}(U)$, $i = 1, \dots, m$, gibt, die in jedem $u \in U$ eine Basis von T_uM bilden. Solche U existieren immer, z.B. der Definitionsbereich von geodätischen Normalkoordinaten um p .

Wir definieren $\omega_j^i: \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$ und $\Omega_j^i: \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$ durch

$$\nabla_X e_j =: \omega_j^i(X)e_i, \quad R(X, Y)e_j = \Omega_j^i(X, Y)e_i$$

Da ∇ tensoriell in der ersten Komponente und R ein Tensor ist, der antisymmetrisch in den ersten beiden Komponenten ist, ist $\omega_j^i \in \Omega^1(U)$ und $\Omega_j^i \in \Omega^2(U)$ für alle i, j . Die ω_j^i heißen *lokale Zusammenhangsformen* und die Ω_j^i *lokale Krümmungsformen*.

Lemma II.10.33. (Strukturgleichung)

$$d\omega_j^i = \Omega_j^i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\Omega_j^i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X, Y)e_i &= \Omega_j^i(X, Y)e_i - \omega_k^i(X)\omega_j^k(Y)e_i + \omega_k^i(Y)\omega_j^k(X)e_i \\ &= R(X, Y)e_j - \omega_j^k(Y)\nabla_X e_k + \omega_j^k(X)\nabla_Y e_k \\ &= \nabla_X \nabla_Y e_j - \nabla_Y \nabla_X e_j - \nabla_{[X, Y]} e_j - \omega_j^k(Y)\nabla_X e_k + \omega_j^k(X)\nabla_Y e_k \\ &= X.(\omega_j^k(Y))e_k - Y.(\omega_j^k(X))e_k - \omega_j^k([X, Y])e_k \\ &\stackrel{(II.19)}{=} d\omega_j^k(X, Y)e_k \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

Lemma II.10.34. Für zweidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt für die Zusammenhangs- und Krümmungsformen berechnet für eine positiv orientierte Orthonormalbasis e_i von T_pM

Vorl. 29 - 06.02.

$$\begin{aligned} \Omega_2^1(e_1, e_2) &= K \text{ und } \Omega_2^1 = K \text{dvol}_g \\ d\omega_2^1 &= \Omega_2^1 \end{aligned}$$

Beweis. Ist e_i eine positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist $\omega_j^i(X) = g(\nabla_X e_j, e_i)$ und $\Omega_j^i(X, Y) = g(R(X, Y)e_j, e_i)$. Damit ist $\Omega_2^1(e_1, e_2) = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = K$ und $\Omega_2^1 = K e_1^b \wedge e_2^b = K \text{dvol}_g$. Weiterhin ist damit $\omega_i^i = \frac{1}{2} X.g(e_i, e_i) = 0$, und damit folgt aus der Strukturgleichung

$$d\omega_2^1 = \Omega_2^1 - \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 - \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 = \Omega_2^1. \quad \square$$

Sei (M, g) eine orientierte zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Karte von M und $P \subset V$ ein abgeschlossenes Gebiet, dessen Rand ein Polygon in $V \subset \mathbb{R}^2$ mit Ecken P_1, \dots, P_k ist, s. Abbildung II.15.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

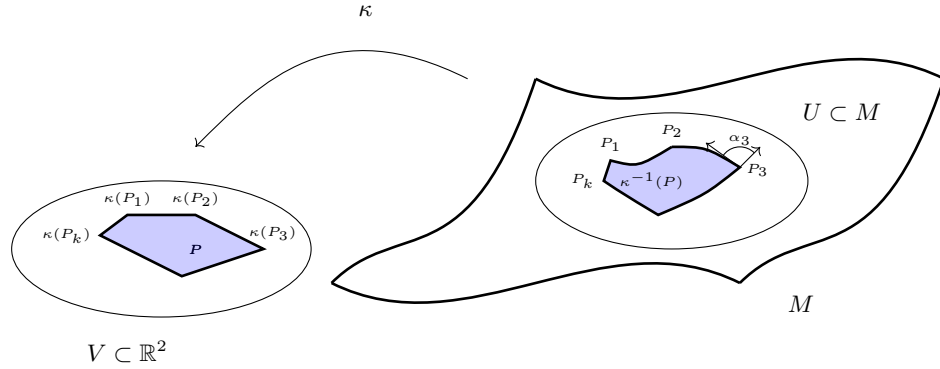


Abb. II.15.: Abbildung zum lokalen Gauß-Bonnet

Sei $\gamma: S^1 \rightarrow \partial(\kappa(P))$ eine stückweise glatte Kurve, die nur in $\kappa(P_i)$ nicht glatt ist und $\partial(\kappa(P))$ in positiver Orientierung durchläuft. Die zugehörigen Außenwinkel in diesen Punkten seien α_i . Für $v \in T_p M \setminus \{0\}$ sei v^\perp der Vektor in $T_{\gamma(s)}(M)$ für den $g(v^\perp, v^\perp) = g(v, v)$, $g(v, v^\perp) = 0$ gilt und für den (v, v^\perp) eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ ist. Wir nennen $\kappa_g(s) := g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)^\perp)$ die *geodätische Krümmung* von γ .

Es ist $\kappa_g = 0$ genau dann, wenn γ eine Geodäte von (M, g) ist: Denn dann ist, da M zweidimensional, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \parallel \dot{\gamma}$ und man kann durch Umparametrisierung $\hat{\gamma} = \gamma \circ \psi$ immer erreichen, dass $\hat{\gamma}$ eine Geodätische ist. Wegen

$$\nabla_{\dot{\hat{\gamma}}(s)} \dot{\hat{\gamma}}(s) = \psi'(s) \nabla_{\dot{\gamma}(\psi(s))} (\dot{\gamma}(\psi(s)) \psi'(s)) = (\psi'(s)^2 a(s) + \psi'(s) \psi''(s)) \dot{\gamma}(\psi(s))$$

(mit $a(s)$ der obige Proportionalitätsfaktor) muss dazu $\psi'(s) = \exp(-\int_0^s a(u) du)$ gewählt werden.

Lemma II.10.35. (*Lokaler Satz von Gauß-Bonnet*) In der eben beschriebenen Situation gilt

$$\int_{\kappa^{-1}(P)} K \, \text{dvol}_g + \int_{S^1} \kappa_g(s) |\dot{\gamma}(s)| \, ds + \sum_{i=1}^k \alpha_i = 2\pi.$$

Beweis. Es ist $\int_{S^1} \kappa_g(s) |\dot{\gamma}(s)| \, ds = \int_{\gamma} \kappa_g \, \text{dvol}_{g|_{\gamma}}$ und damit unabhängig von der gewählten Orientierung (solange diese positiv gewählt ist). Seien e_i Vektorfelder auf U , die in jedem Punkt eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p M$ bilden. Dann ist $K \, \text{dvol}_g = \Omega_2^1$. Nach Lemma II.10.34 und Stokes (die Ecken seien bei s_i mit $s_1 = 0$, $s_{k+1} = L$ und o.B.d.A. sei γ stückweise nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. $L = L(\gamma)$)

gilt somit

$$\begin{aligned} \int_{\kappa^{-1}(P)} K \, \text{dvol}_g &= \int_{\kappa^{-1}(P)} d\omega_2^1 = \int_{\gamma} \omega_2^1 \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \omega_2^1(\dot{\gamma}(s)) \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_2, e_1) \, ds. \end{aligned}$$

Wir haben (dort wo γ differenzierbar ist)

$$\dot{\gamma}(s) = \cos \alpha(s) e_1 + \sin \alpha(s) e_2 \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(s)^\perp = \cos \alpha(s) e_2 - \sin \alpha(s) e_1$$

für eine Funktion $\alpha: [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ eine stückweise stetige Funktion mit $\alpha(s_i + 0) - \alpha(s_i - 0) = \alpha_i$ für $i = 2, \dots, k$ und $\alpha(L) - \alpha(1) = 2\pi - \alpha_1$.

Somit ist

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)^\perp) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} (\cos \alpha(s) e_1 + \sin \alpha(s) e_2), \cos \alpha(s) e_2 - \sin \alpha(s) e_1) \\ &= g(\cos \alpha(s) \nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_1 - \alpha'(s) \sin \alpha(s) e_1 + \sin \alpha(s) \nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_2 + \alpha'(s) \cos \alpha(s) e_2, \\ &\quad \cos \alpha(s) e_2 - \sin \alpha(s) e_1) \\ &= \cos^2 \alpha(s) g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_1, e_2) - \sin^2 \alpha(s) g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_2, e_1) + \alpha'(s) \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_1, e_2) + \alpha'(s), \end{aligned}$$

wo wir in den letzten beiden Schritt verwendeten, dass

$$g(\nabla_X e_i, e_j) + g(\nabla_X e_j, e_i) = X \cdot g(e_i, e_j) = 0$$

gilt. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \kappa_g \, \text{dvol}_{g|_{\gamma}} &= \sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} (g(\nabla_{\dot{\gamma}(s)} e_1, e_2) + \alpha'(s)) \, ds \\ &= \int_{\gamma} -\omega_2^1 + \sum_{i=1}^k (\alpha(s_{i+1} - 0) - \alpha(s_i + 0)) = - \int_{\gamma} \omega_2^1 + 2\pi - \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^k \alpha_i - \int_{\kappa^{-1}(P)} K \, \text{dvol}_g \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel II.10.36.

- (i) Sei $M = B_1(r) \subset \mathbb{R}^2$ mit der induzierten Orientierung von \mathbb{R}^2 . Dann ist $\partial M = S^1(r) \subset \mathbb{R}^2$. Sei $\gamma(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$. Dann ist γ nach Bogenlänge parametrisiert mit $\text{Bild}(\gamma) = S^1(r)$ und $\dot{\gamma}$ positiv orientiert. Es ist $K = 0$ und

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}^\perp \rangle \\ &= \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma}^\perp \rangle = \left\langle -\frac{1}{r} (\cos(s/r), \sin(s/r)), -(\cos(s/r), \sin(s/r)) \right\rangle = 1/r. \end{aligned}$$

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Damit ist

$$\underbrace{\int_{B_1(0)} K \, d\text{vol}_g}_{=0} + \int_{\gamma} \kappa_g(s) \, ds = 2\pi,$$

was Gauß-Bonnet entspricht.

- (ii) Sei $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ die Standardsphäre mit Radius r und der induzierten Orientierung von $B_1(r) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $M_h = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq h\}$. Bzgl. der Parametrisierung

$$F(\phi, \theta) = r(\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta)$$

ist $\{\frac{1}{r \cos \theta} \partial_\phi F, \frac{1}{r} \partial_\theta F\}$ eine positive orientierte Orthonormalbasis von $T_{F(\phi, \theta)} S^2(r)$, vgl. auch Abbildung II.16.

Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(\sqrt{r^2 - h^2} \cos \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), \sqrt{r^2 - h^2} \sin \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), h \right)^T \\ &= F(s(r^2 - h^2)^{-1/2}, \arcsin \frac{h}{r}) \end{aligned}$$

nach Bogenlänge parametrisiert mit $\text{Bild}(\gamma) = \partial M_h$ und $\dot{\gamma}$ positiv orientiert. Damit ist (wegen der Orthogonalität von $\partial_\phi F$ zu $\partial_\theta F$)

$$\dot{\gamma}^\perp(s) = \frac{1}{r} \partial_\theta F(s(r^2 - h^2)^{-1/2}, \arcsin \frac{h}{r}).$$

Die geodätische Krümmung von γ ist

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}^\perp \rangle = \langle (\ddot{\gamma})^{\text{tan}}, \dot{\gamma}^\perp \rangle = \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma}^\perp \rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{r^2 - h^2}} \left\langle \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), 0 \right), \dot{\gamma}^\perp \right\rangle \\ &= \frac{h}{r \sqrt{r^2 - h^2}} \end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^{2\pi \sqrt{r^2 - h^2}} \kappa_g(s) \, ds = 2\pi \frac{h}{r}.$$

Mit $K = \frac{1}{r^2}$ und $d\text{vol}_g = r^2 \cos \theta \, d\phi \wedge d\theta$ folgt

$$\int_{M_h} K \, d\text{vol}_g = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\arcsin \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{r^2} (r^2 \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{h}{r}\right).$$

Es gilt also $\int_{M_h} K \, d\text{vol}_g + \int_0^{2\pi \sqrt{r^2 - h^2}} \kappa_g(s) \, ds = 2\pi$.

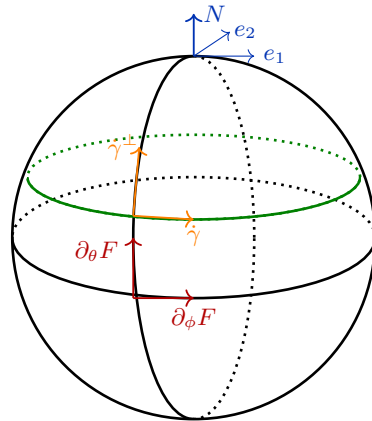


Abb. II.16.: In blau eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^3 . Damit ist $\{e_1, e_2\}$ eine (für die induzierte Orientierung aus $S^2(r)$ als Rand von $\overline{B_r(0)}$) positiv orientierte Basis am Nordpol der Sphäre. Wegen Stetigkeit sind damit auch die Basen in rot und orange (immer angefangen mit dem Vektor entlang des Breitenkreises) positiv orientiert. Für $S^2(r) \cap \{z \geq h\}$ ist damit die induzierte Orientierung am grünen Rand: $\dot{\gamma}$ ist positiv orientiert.

(iii) Sei $\Delta \subset M$ mit $M = \mathbb{R}^2, S^2, \mathbb{H}^2$, jeweils mit Standardmetrik g , so dass $\partial\Delta$ ein (geodätisches) Dreieck in M ist. Dann ist $K = 0, 1, -1$, $\kappa_g = 0$ und damit nach Gauß-Bonnet

Vorl. 30 - 08.02.

$$\underbrace{\int_{\Delta} K \, d\text{vol}_g}_{=K \, \text{vol}(M, g)} + \underbrace{\int_{\partial M} \kappa_g \, d\text{vol}|_{g|_{\partial M}}}_{=0} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\alpha_i}_{\pi - \beta_i} = 2\pi,$$

wobei β_i der zu α_i gehörige Innenwinkel ist. Damit ist

$$K \, \text{vol}(\Delta, g) + \pi = \sum_{i=1}^3 \beta_i$$

und wir haben

- im \mathbb{R}^2 : Innenwinkelsumme im geodätischen Dreieck = π ,
- im S^2 : Innenwinkelsumme im geodätischen Dreieck $> \pi$,
- im \mathbb{H}^2 : Innenwinkelsumme im geodätischen Dreieck $< \pi$.

Wir kommen nun zum globalen Satz von Gauß-Bonnet, d.h. es geht um kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) . Um $\int_M K \, d\text{vol}_g$ zu berechnen, wollen

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

wir die Mannigfaltigkeit zerlegen in Gebiete von Mannigfaltigkeiten mit Ecken, die die Form von Lemma II.10.35 haben.

Dazu benutzen wir das Konzept der Triangulierung von (zweidimensionalen) Mannigfaltigkeiten:

Definition II.10.37. Eine glatte Triangulierung einer zweidimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M (ggf. mit Rand und Ecken) besteht aus Abbildungen σ_i , $i = 1, \dots, k$, so dass

- (i) $\sigma_i : \Delta_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow M$ glatt und ein Diffeomorphismus aufs Bild* ist.
- (ii) $M = \cup_{i=1}^k \sigma_i(\Delta_2)$, die Mengen in $\{\sigma_i(\text{Inneres}(\Delta_2))\}_i$ sind paarweise disjunkt und $\sigma_i(\Delta_2) \cap \sigma_j(\Delta_2)$ ist für alle $i \neq j$ entweder leer, das Bild einer Ecke von Δ_2 oder das Bild einer Kante von Δ_2 ist.[†]

Man kann zeigen, dass es eine solche Triangulierung immer gibt. Ist M orientiert, können die σ_i immer so gewählt werden, dass sie orientierungserhaltende Abbildungen sind.

Sei nun eine solche Triangulierung gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \#\{\text{Ecken der Triangulierung}\} := \#\{\sigma_i((0, 0)), \sigma_i(1, 0), \sigma_i(0, 1) \mid i = 1, \dots, k\} \\ \mathcal{K} &:= \#\{\text{Kanten der Triangulierung}\} \\ &:= \#\{\sigma_i(\Delta_2 \cap \mathbb{R} \times \{0\}), \sigma_i(\Delta_2 \cap \{0\} \times \mathbb{R}), \sigma_i(\Delta_2 \cap \{(x, 1-x)\}) \mid i = 1, \dots, k\} \\ \mathcal{F} &:= \#\{\text{Flächen der Triangulierung}\} = k \end{aligned}$$

Lemma II.10.38. $\chi(M) = \mathcal{E} + \mathcal{F} - \mathcal{K}$ ist unabhängig von der gewählten Triangulierung von M und wird Eulercharakteristik genannt.

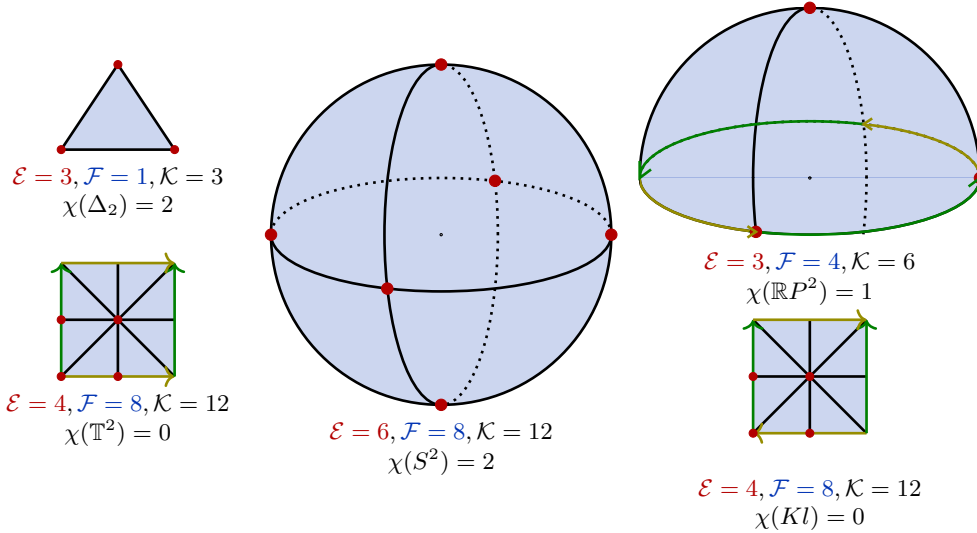
Beweisidee. Durch schrittweises Hinzufügen von Eckpunkten und Fallunterscheidung sieht man, dass $\chi(M)$ unter Verfeinerung einer Triangulierung konstant bleibt: Fügt man eine Ecke hinzu im Inneren eines Dreiecks hinzu braucht man noch 3 neue Kanten zu den Eckpunkten dieses Dreiecks: Dabei gewinnt man insgesamt eine Ecke, 3 Kanten und 2 Flächen; $\chi(M)$ ändert sich also nicht. Ein anderer Fall ist das Hinzufügen einer Ecke auf einer schon bestehenden Kante, teilt diese also in zwei neue Kanten. Dann muss man um weiterhin eine Triangulierung zu erhalten auch zwei Kanten zum gegenüberliegenden Eckpunkt der angrenzenden Dreiecke hinzufügen. Dabei entstehen auch zwei Flächen mehr. Auch hier bleibt $\chi(M)$ insgesamt konstant. Das sind schon

*Streng genommen haben wir glatt für Mannigfaltigkeiten mit Rand und/oder Ecken noch nicht definiert, aber es ist das was man erwarten würde: Die Kartenwechsel müssen glatt sein. Diese gehen nun von einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}_+^m in eine offene Teilmenge in \mathbb{R}_+^m . Eine solche Abbildung heiße glatt, wenn es eine glatte Erweiterung zwischen offene Teilmengen des \mathbb{R}^m gibt.

[†]Manchmal definiert man Triangulierungen auch allgemeiner, nämlich dass verschiedene Ecken bzw. Kanten von Δ_2 im Bild auf M die gleiche Ecke/Kante sein dürfen. Dann stimmt das folgende auch noch immer. Für uns reicht aber obige Definition. Es bedeutet nur, dass wir ggf. mehr Ecken und Kanten für eine Triangulierung brauchen, als in der allgemeineren Definition.

alle Fälle, die auftreten, da man bei Triangulierungen ohne neue Ecken keine neuen Kanten oder Flächen erzeugen kann. Zu verschiedenen Triangulierungen gibt es nun aber immer eine gemeinsame Verallgemeinerung. \square

Beispiel II.10.39.



Die beiden Oliven bzw. die beiden grünen Kanten (wenn in einem Bild vorhanden) sind jeweils in Pfeilrichtung miteinander identifiziert, so dass es sich unten links um einen Torus, oben rechts um den RP^2 und unten rechts um die Kleinsche Flasche handelt.

Definition II.10.40. Seien M_1 und M_2 zwei (orientierte) m -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Sei $p_i \in M_i$ und $U_i \subset M_i$ offene Umgebung von p_i mit Diffeomorphismen $\phi_i: B_1(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_i$ ist. Sei $V_i := \phi_i(B_{1/2}(0))$ und sei $\psi: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ ein (orientierungserhaltender) Diffeomorphismus. Die *zusammenhängende Summe* ist dann definiert als

$$M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus U_1) \cup (M_2 \setminus U_2) / (x \sim \psi(x) \text{ für } x \in \partial V_1).$$

Bemerkung II.10.41. $M_1 \# M_2$ kann mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeiten versehen werden, so dass $M_i \setminus U_i \hookrightarrow M_1 \# M_2$ Einbettungen sind (die glatte Struktur vererbt sich also von den M_i). Sind die M_i orientiert, dann ist auch die zusammenhängende Summe orientiert, so dass die Einbettungen $M_i \setminus U_i \hookrightarrow M_1 \# M_2$ orientierungserhaltend sind.

Diese Konstruktion ist bis auf Diffeomorphismen unabhängig von der Wahl der p_i und der U_i . Sie ist symmetrisch und assoziativ.

$M^m \# S^m$ ist diffeomorph zu M^m .

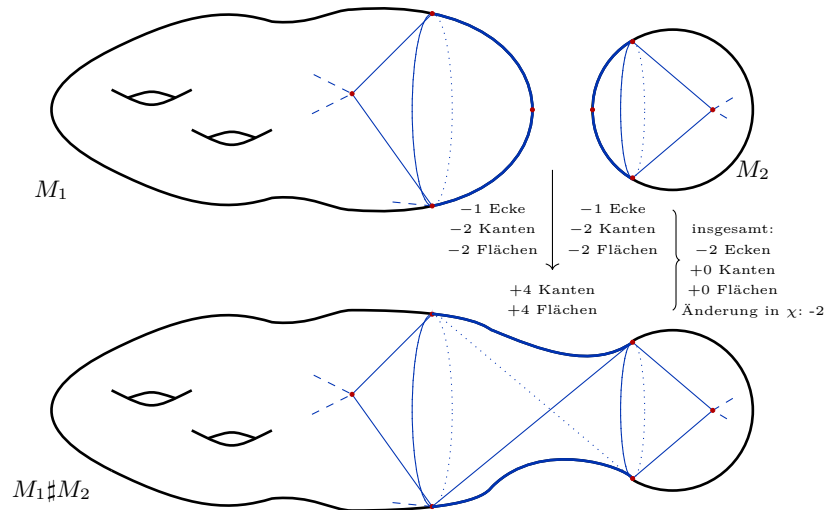
Die Kleinsche Fläche ist $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

Lemma II.10.42. Für zwei dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 gilt

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Beweis.



□

Bemerkung II.10.43. Es gibt folgende Klassifikationsresultate für Flächen:

Sei M eine orientierbare kompakte zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist M diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von S^2 mit k Tori, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aus letztem Lemma folgt, dass die Eulercharakteristik einer solchen Fläche $2 - 2k$ ist.

Sei M eine nicht-orientierbare kompakte zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist M diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von $k \mathbb{R}P^2$, $k \in \mathbb{N}$. Aus letztem Lemma folgt, dass die Eulercharakteristik einer solchen Fläche $2 - k$ ist.

In beiden Fällen nennt man k dann das *Geschlecht* der Fläche M .

Satz II.10.44. (Globaler Satz von Gauß-Bonnet) Sei (M, g) eine orientierte zweidimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\int_M K \, dvol_g = 2\pi\chi(M).$$

Beweis. Wir wählen eine Triangulierung $\sigma_i, i = 1, \dots, \mathcal{F}$ von M , so dass die σ_i orientierungserhaltend sind. Für jedes $\sigma_i(\Delta_2)$ haben wir den lokalen Gauß-Bonnet:

II.10. Integration auf Mannigfaltigkeiten

$$\int_{\sigma_i(\Delta_2)} K \, \text{dvol}_g + \int_{\gamma_i=\sigma_i(\partial\Delta_2)} \kappa_g^i \, \text{dvol}_{g|_{\gamma_i}} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^i = 2\pi,$$

wobei κ_g^i die geodätische Krümmung von $\sigma_i(\partial\Delta_2)$ (mit induzierter Orientierung) ist und α_j^i die Außenwinkel von $\sigma_i(\Delta_2)$.

Summe über alle i liefert

$$\int_M K \, \text{dvol}_g + \sum_{i=1}^{\mathcal{F}} \int_{\gamma_i=\sigma_i(\partial\Delta_2)} \kappa_g^i \, \text{dvol}_{g|_{\gamma_i}} + \sum_{i=1}^{\mathcal{F}} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^i = 2\pi\mathcal{F}.$$

Jede Kante der Triangulierung gehört zu zwei Dreiecken und die jeweils induzierte Orientierung auf der Kante durch die Dreiecke ist entgegengesetzt zueinander. D.h. der Teil von $\int_{\gamma_i=\sigma_i(\partial\Delta_2)} \kappa_g^i \, \text{dvol}_{g|_{\gamma_i}}$ zu einer Kante wird durch den zugehörigen Summanden des angrenzenden Dreiecks aufgehoben. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{F}} \int_{\gamma_i=\sigma_i(\partial\Delta_2)} \kappa_g^i \, \text{dvol}_{g|_{\gamma_i}} = 0.$$

Da jede Fläche drei Kanten hat und jede Kante zu zwei Flächen gehört, ist $3\mathcal{F} = 2\mathcal{K}$.

Sei $\beta_j^i = \pi - \alpha_j^i$ der jeweils zugehörige Innenwinkel. Jeder Innenwinkel kommt genau einmal vor. Also ist

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{F}} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^i = 3\pi\mathcal{F} - 2\pi\mathcal{E} = 2\pi\mathcal{K} - 2\pi\mathcal{E}$$

und wir haben insgesamt

$$\int_M K \, \text{dvol}_g = 2\pi(\mathcal{F} + \mathcal{E} - \mathcal{K}) = 2\pi\chi(M). \quad \square$$

Mit dem gleichem Vorgehen beweist man auch

Satz II.10.45. (*Gauß-Bonnet - globale Version mit Rand und Ecken*) Sei M eine zwei dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ecken. Seien α_i die Außenwinkel an den Ecken. Dann gilt

$$\int_M K \, \text{dvol}_g + \int_{\partial M} \kappa_g \, \text{dvol}_{g|_{\partial M}} + \sum_i \alpha_i = 2\pi\chi(M).$$

Bemerkung II.10.46. (Folgerungen aus dem globalen Satz von Gauß-Bonnet) Sei M eine orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit. Aus dem globalen Satz von Gauß-Bonnet folgt:

- (i) Ist $\chi(M) < 0$, dann gibt es keine Metrik auf M mit $K \geq 0$.

II. (Semi-)Riemannsche Geometrie

- (ii) Ist $\chi(M) = 0$, dann gibt es keine Metrik auf M mit $K > 0$ bzw. $K < 0$.
- (iii) Ist $\chi(M) > 0$, dann gibt es keine Metrik auf M mit $K \leq 0$.

Sei M eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit. Dann gelten die oberen Aussagen auch: Annahme es gibt eine Metrik g auf M mit $K \geq 0$ bei $\chi(M) < 0$. Sei

$$\tilde{M} := \{(p, o) \in M \setminus \{\pm 1\} \mid o \text{ Orientierung von } T_p M\}$$

die *orientierbare zweifache Überlagerung* von M mit Projektion $\pi: \tilde{M} \rightarrow M, (p, o) \mapsto p$.*

Man kann weiterhin sich überlegen, dass $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$ ist. Sei $\tilde{g} := \pi^*g$. Das macht π zu einer lokalen Isometrie und damit ist auch die Gaußkrümmung von \tilde{g} nichtnegativ. Dann kann allerdings $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$ nicht negativ sein. Die anderen Aussagen sieht man ganz analog.

*Man muss sich überlegen, dass \tilde{M} genau eine glatte Struktur trägt, so dass π glatt ist. Man muss zeigen, dass \tilde{M} orientierbar ist. Weiterhin war M genau dann nicht orientierbar, falls \tilde{M} zusammenhängend ist.

A. Interpretation: Riemannsche Krümmung mittels Paralleltransport

Sei $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte um p mit $\kappa(p) = 0$, $d_0\kappa^{-1}(e_1) = v \in T_pM$ und $d_0\kappa^{-1}(e_2) = w \in T_pM$. Weiterhin sei $z \in T_pM$.

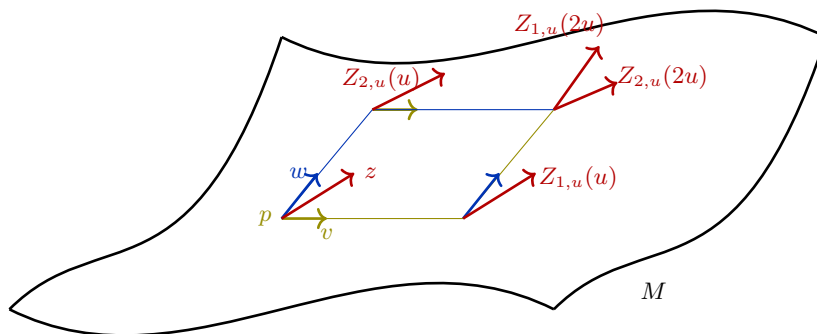
Seien $\gamma_i: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, die Kurven mit

$$\gamma_1(s) = \begin{cases} (s, 0) & s \leq 1 \\ (1, s-1) & 1 < s \end{cases} \quad \gamma_2(s) = \begin{cases} (0, s) & s \leq 1 \\ (s-1, 1) & 1 < s \end{cases}.$$

Die Spur von γ_1 ist der untere und rechte Rand des Einheitsquadrates in \mathbb{R}^2 und analog von γ_2 der Rest des Randes.

Wir setzen $c_{i,u}: [0, 2u] \rightarrow M$, $x_{i,u}(s) = u\gamma_i(s/u)$ und $c_{i,u}(s) = \kappa^{-1}x_{i,u}(s)$ (Das u skaliert einfach nur die Größe des Quadrates in \mathbb{R}^2). Damit ist $c_{1,u}(s)$, so dass mit $c_{1,u}(0) = p$, $\dot{c}_{1,u}(0) = v$ ($\dot{x}_{1,u}(0) = e_1$) für $s \in (0, u)$ und $\dot{c}_{1,u}(u) = w$ ($\dot{x}_{1,u}(u) = e_2$) für $s \in (u, 2u)$. Analog für $c_{2,u}$. Insbesondere ist $c_{1,u}(2u) = c_{2,u}(2u)$.

Sei $z \in T_pM$. Sei $Z_{1,u}(s) = \parallel_{0,s}^{c_{1,u}} z$ und $Z_{2,u}(s) = \parallel_{0,s}^{c_{2,u}} z$. Wir suchen $Z_{1,u}(2u) - Z_{2,u}(2u) \in T_{c_{1,u}(2u)}M$ für kleine u .



Für den Paralleltransport gilt $\nabla_{\dot{c}_{1,u}} Z_{1,u} = 0$ – also in lokalen Koordinaten):

$$\dot{Z}_{1,u}^k(s) = -\dot{x}_{1,u}^i(s)\Gamma_{ij}^k(x_{1,u}(s))Z_{1,u}^j(s). \quad (\text{A.1})$$

A. Interpretation: Riemannsche Krümmung mittels Paralleltransport

Wir sind an der Taylorentwicklung von $Z_{1,u}^k(2u)$ in u interessiert. Wir entwickeln bis zur zweiten Ordnung, da wir erwarten, dass die Differenz von $Z_{1,u}^k(2u)$ und $Z_{2,u}^k(2u)$ im Limes $u \rightarrow 0$ mit der Krümmung in p geht.

Da $c_{1,u}$ nur stückweise glatt ist, entwickeln wir zuerst $Z_{1,u}^k(u)$ und nutzen das für die Entwicklung von $Z_{1,u}^k(2u)$:

$$\begin{aligned} Z_{1,u}^k(u) &= \underbrace{Z_{1,u}^k(0)}_{z^k} + u \underbrace{\dot{Z}_{1,u}^k(0)}_{-\Gamma_{1j}^k(0)z^j} + \frac{1}{2}u^2 \ddot{Z}_{1,u}^k(0) + O(u^3), \\ Z_{1,u}^k(2u) &= Z_{1,u}^k(u) + u \underbrace{\dot{Z}_{1,u}^k(u+0)}_{-\Gamma_{2j}^k(x_{1,u}(u))Z_{1,u}^j(u)} + \frac{1}{2}u^2 \ddot{Z}_{1,u}^k(u+0) + O(u^3). \end{aligned}$$

Wir benötigen dafür noch $\ddot{Z}_{1,u}$. Differentiation von (A.1) ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{1,u}^k(s) &= - \underbrace{\ddot{x}_{1,u}^i(s)}_{=0} \Gamma_{ij}^k(x_{1,u}(s)) Z_{1,u}^j(s) - \dot{x}_{1,u}^i(s) \Gamma_{ij,\ell}^k(x_{1,u}(s)) \dot{x}_{1,u}^\ell(s) Z_{1,u}^j(s) \\ &\quad - \dot{x}_{1,u}^i(s) \Gamma_{ij}^k(x_{1,u}(s)) \dot{Z}_{1,u}^j(s) \end{aligned}$$

und damit (wegen $\dot{x}_{1,u}^i(0) = \delta_1^i$)

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{1,u}^k(0) &= -\Gamma_{1j,\ell}^k(0) \dot{x}_{1,u}^\ell(0) Z_{1,u}^j(0) + \Gamma_{1j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) Z_{1,u}^r(0) \\ &= -\Gamma_{1j,1}^k(0) z^j + \Gamma_{1j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) z^r \end{aligned}$$

sowie (wegen $\dot{x}_{1,u}^i(u) = \delta_2^i$)

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{1,u}^k(u+0) &= -\Gamma_{2j,2}^k(x_{1,u}(u)) Z_{1,u}^j(u) + \Gamma_{2j}^k(x_{1,u}(u)) \Gamma_{2r}^j(x_{1,u}(u)) Z_{1,u}^r(u) \\ &= -\Gamma_{2j,2}^k(0) z^j + \Gamma_{2j}^k(0) \Gamma_{2r}^j(0) z^r + O(u). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir

$$Z_{1,u}^k(u) = z^k - u \Gamma_{1j}^k(0) z^j - \frac{1}{2} u^2 \left(-\Gamma_{1j,1}^k(0) z^j + \Gamma_{1j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) z^r \right) + O(u^3)$$

und

$$\begin{aligned} Z_{1,u}^k(2u) &= Z_{1,u}^k(u) - u \Gamma_{2j}^k(x_{1,u}(u)) Z_{1,u}^j(u) + \frac{1}{2} u^2 \left(-\Gamma_{2j,2}^k(p) z^j + \Gamma_{2j}^k(0) \Gamma_{2r}^j(0) z^r \right) + O(u^3) \\ &= z^k + \frac{1}{2} u^2 \left(-\Gamma_{1j,1}^k(0) z^j + \Gamma_{1j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) z^r - \Gamma_{2j,2}^k(0) z^j + \Gamma_{2j}^k(0) \Gamma_{2r}^j(0) z^r \right) \\ &\quad - u \left(\Gamma_{1j}^k(0) + \Gamma_{2j}^k(0) \right) z^j + u^2 \left(\Gamma_{2j,1}^k(0) z^j - \Gamma_{2j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) z^r \right) + O(u^3), \end{aligned}$$

wo wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{2j}^k(x_{1,u}(u)) Z_{1,u}^j(u) &= \left(\Gamma_{2j}^k(0) + u \Gamma_{2j,\ell}^k(0) \dot{x}_{1,u}^\ell(0) + O(u^2) \right) \left(z^j - u \Gamma_{1r}^j(0) z^r + O(u^2) \right) \\ &= \Gamma_{2j}^k(0) z^j + u \left(\Gamma_{2j,1}^k(0) z^j - \Gamma_{2j}^k(0) \Gamma_{1r}^j(0) z^r \right) + O(u^2) \end{aligned}$$

benutzt haben. Analog erhalten wir $Z_{2,u}^k(2u)$.

Für die Differenz beider Paralleltransporte haben wir damit

$$\begin{aligned} Z_{1,u}^k(2u) - Z_{2,u}^k(2u) &= u^2(-\Gamma_{2j,1}^k(0) + \Gamma_{1j,2}^k(0) + \Gamma_{2r}^k(0)\Gamma_{1j}^r(0) - \Gamma_{1r}^k(0)\Gamma_{2j}^r(0))z^j + O(u^3) \\ &= u^2 R_{21j}^k(0)z^j + O(u^3) = u^2(R_p(w, v)z)^k + O(u^3), \end{aligned}$$

also

$$Z_{1,u}(2u) - Z_{2,u}(2u) = u^2 R_p(w, v)z + O(u^3).$$

B. Wdh: Lineare Abbildungen und Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum mit nichtdegenerierter Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien e_i und f_i zwei Basen von V mit Transformationsmatrix $Q \in GL(V)$, d.h. $f_i = Q_i^j e_j$.

- (i) Sei B^e die darstellende Matrix der Bilinearform bzgl e_i , d.h. $(B^e)_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, und analog B^f die darstellende Matrix. Also ist z.B. $\langle x, y \rangle = \langle x^i e_i, y^j e_j \rangle = x^i (B^e)_{ij} y^j$. und $(B^f)_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle = \langle Q_i^k e_k, Q_j^l e_l \rangle = Q_i^k (B^e)_{kl} Q_j^l = (QB^eQ^T)_{ij}$, also

$$B^f = QB^eQ^T.$$

- (ii) Sei $h: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

Sei A^e die darstellende Matrix bzgl. e_i und A^f die bzgl. f_i , d.h. $Ae_i = (A^e)_i^j e_j$. Wegen $Af_i = AQ_i^j e_j = Q_i^j Ae_j = Q_i^j (A^e)_j^k e_k = (QA^e)_i^k (Q^{-1})_k^l f_l = (QA^eQ^{-1})_i^l f_l$, ist

$$A^f = QA^eQ^{-1}.$$

- (iii) Die *Determinante einer linearen Abbildung* $h: V \rightarrow V = \det A^e$ ist unabhängig von der Basis, da $\det A^e = \det Q^{-1}A^fQ = \det A^f$.

- (iv) Die Determinante der darstellenden Matrix einer Bilinearform ist basisabhängig, da

$$\det B^f = \det QB^eQ^T = (\det Q)^2 \det B^e.$$

- (v) *Spur einer linearen Abbildung* $h: V \rightarrow V$ bzgl der gegebenen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist gegeben durch:

$$\text{Spur}(h) = (A^e)_i^i.$$

Das ist unabhängig von der Wahl der Basis, denn

$$\begin{aligned} (A^e)_i^i &= (Q^{-1}A^fQ)_i^i = (Q^{-1})_i^j (A^f)_j^k Q_k^i \\ &= \underbrace{(Q_k^i (Q^{-1})_i^j)}_{\delta_k^j} (A^f)_j^k = (A^f)_k^k. \end{aligned}$$

- (vi) Spuren werden auch für Bilinearformen definiert. Allerdings sind sie dort abhängig von der Wahl einer nichtdegenerierten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, die man benutzt um aus der Bilinearform eine lineare Abbildung zu machen:

$$\langle v, a(w) \rangle_2 \stackrel{!}{=} \langle v, w \rangle \text{ für } a: V \rightarrow V.$$

B. Wdh: Lineare Abbildungen und Bilinearformen

Sei \tilde{B}^e die darstellende Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ bzgl der Basis e_i . Dann ist \tilde{A}^e die darstellende Matrix von a bzgl e_i . Dann ist $(B^e)_{ij} = (\tilde{B}^e)_{ik}(\tilde{A}^e)_j^k$

$$\text{Spur}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_2} \langle \cdot, \cdot \rangle := \text{Spur}(a) = (\tilde{A}^e)_j^j = (B^e)_{ij}((\tilde{B}^e)^{-1})^{ij}.$$

Sowohl Bilinearform als auch lineare Abbildungen werden bzgl. einer Basis durch Matrizen dargestellt, aber diese Matrizen haben andere Transformationsverhalten bezüglich Basiswechsel.

Literaturverzeichnis

- [AE01] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis. III. Grundstudium Mathematik*. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [Bre11] Simon Brendle. Der Sphärensatz in der Riemannschen Geometrie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 113(3):123–138, 2011.
- [CE08] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2008. Revised reprint of the 1975 original.
- [GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [Gre69] Robert E. Greene. Isometric embeddings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75:1308–1310, 1969.
- [Gün89] Matthias Günther. Zum Einbettungssatz von J. Nash. *Math. Nachr.*, 144:165–187, 1989.
- [LPZ13] Leandro A. Lichtenfelz, Paolo Piccione, and Abdelghani Zeghib. On the isometry group of Lorentz manifolds. In *Recent trends in Lorentzian geometry*, volume 26 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 277–293. Springer, New York, 2013.
- [MS39] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 40(2):400–416, 1939.
- [Nas56] John Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 63:20–63, 1956.
- [Whi57] Hassler Whitney. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.