

Präsenzübungsblatt

Aufgabe. Skizzieren Sie:

- (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + 2z = 1\}$
- (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$
- (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, x + y + 2z = 1\}$
- (iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 = z^2, x + y + 2z = 0\}$

Im Rest dieses Blattes soll es um die Wiederholung und Anschauung des Satzes über implizite Funktionen (und des Satzes zur lokalen Umkehrbarkeit) gehen.

Satz über implizite Funktionen. Sei $f: V \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ($n = m + k$). Sei $(a, b) \in V$ mit $f(a, b) = 0$. Weiterhin sei

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a, b) \right)_{1 \leq i \leq k, m+1 \leq j \leq n} \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von (a, b) , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$ und eine glatte Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$, so dass $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

Satz über die lokale Umkehrbarkeit = Umkehrsatz. Seien $O, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p_0 \in O$. Sei $f: O \rightarrow V$ glatt und sei $D_{p_0}f$ invertierbar ($\cong \det D_{p_0}f \neq 0$). Dann gibt es eine Umgebung $U \subset O$ von p_0 und eine Umgebung U' von $q_0 = f(p_0)$, so dass $f: U \rightarrow U'$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $D_{f(p)}(f^{-1}) = (D_p f)^{-1}$ für $p \in U$.

Aufgabe. Wiederholen Sie den Satz über implizite Funktionen und den Satz zur lokalen Umkehrbarkeit (s.oben). Sie besagen jeweils, dass das Determinantenkriterium hinreichend ist. Wir schauen uns hier jeweils nur den Satz über implizite Funktionen an, für den Umkehrsatz könnte man aber ähnliches machen.

- (i) (Linearisierte Version vom implizite Funktionensatz) Sei $f: \mathbb{R}^{n=m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, also gegeben durch $f(x) = Ax$, bzw. $f(x) = (x^1, \dots, x^m)^T = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$ mit $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x^j$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n}$.

Unter welchen Bedingungen existiert ein $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$. Geben Sie das g , wenn existent, explizit an.

- (ii) Das Determinantenkriterium ist aber z.B. nicht notwendig, wenn die Auflösung bzw. Umkehrabbildung nur existieren aber nicht zwingend glatt sein soll. Zeigen Sie dies, indem Sie ein Beispiel $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ finden.

Aufgabe (Satz über implizite Funktionen am Beispiel). Sei eine glatte Funktion $f: \mathbb{R}^{n=m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ gegeben:

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x^1, x^2)^T \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1$
- (b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto ((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, x^1 - x^3)^T$
- (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x^1, x^2)^T \mapsto (x^1)^2 - (x^2)^3$

(i) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrix

$$D_x f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) \right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}.$$

(ii) Skizzieren Sie die Menge $S := f^{-1}(0 \in \mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$.

(iii) Finden Sie einen Punkt $x_0 = (a, b) \in S$ mit $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^k$, so dass es eine offene Umgebung von $U \subset \mathbb{R}^m$ von a und eine glatte Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$ und $f(u, g(u)) = 0$ für all $u \in U$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel auch U und g explizit an.

(iv) Gibt es einen Punkt $x_0 \in S$, für den (iii) nicht möglich ist?

Dieses Blatt wird in der ersten Übung besprochen.

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2.5+2.5). Geben Sie genügend lokale Parametrisierungen an, um zu sehen, dass folgende Mengen Untermannigfaltigkeiten sind.

(i) $S^m = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = 1\}$

(ii) ${}^1G = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^{m+1} = f(x^1, \dots, x^m)\}$ für eine glatte Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3+2). (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b , so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b , so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

(ii) Zeigen Sie mittels des Kriteriums vom regulären Wert, dass

$$T^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^{2n-1}, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \dots = (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2n} ist.

Aufgabe 3 (2+3+2*). Sei $c: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt (Man nennt c dann eine (glatte) *parametrisierte Kurve* im \mathbb{R}^n . Entscheiden Sie in welchen Fällen, die *Spur* der Kurve (= Bild(c)) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(i) Sei $n = 2$ und die Spur von c sei:



(ii) Sei c ein Homöomorphismus aufs Bild und sei c *regulär* (d.h. $|c'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$).

Kann man hier auch die 'Homöomorphismus aufs Bild'-Bedingung durch c ist injektiv ersetzen und trotzdem immer eine Untermannigfaltigkeit erhalten?

(iii*) Sei $I = \mathbb{R}$ und sei c eine reguläre periodische² Kurve, die eine einfach geschlossene³ Kurve parametrisiert.

Abgabe am Donnerstag 26.10.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

*=Zusatzaufgabe

¹(ii) ist der Standardfall – vgl. Satz 1.5

²periodisch = Es gibt ein $a > 0$, so dass $c(t+a) = c(t)$ für alle t ist (a heißt *Periode* von c).

³Sei c periodisch und sei a_0 die kleinste Periode von c . Dann heißt c *einfach geschlossen*, falls $c|_{[t, t+a_0)}$ für alle t injektiv ist.

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (2+1,5+1,5). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, seien $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeiten $M_h = \text{Graph}(h)$ und $M_g = \text{Graph}(g)$. Sei $f: M_h \rightarrow M_g$ gegeben durch

$$(u, h(u))^T \mapsto (u, g(u))^T.$$

- (i) Zeigen Sie einmal mittels der Definition und einmal mittels der zweiten Bedingung in Lemma I.2.12. aus der Vorlesung, dass f glatt ist.
- (ii) Berechnen Sie $T_p M_h \subset \mathbb{R}^3$ für $p \in M_h$ und geben Sie explizit eine Basis an.
- (iii) Berechnen Sie $d_p f$ in der Basis aus (ii) für $T_p M_h$ und $T_p M_g$.

Aufgabe 5. (2+1,5+1+0,5) Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = x^T A x$.

- (i) Zeigen Sie, dass $M_c = f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Was ist die Dimension von M_c ?
- (ii) Berechnen Sie $T_x M_c$ für die M_c aus (i).
- (iii) Wenden Sie (i) und (ii) auf

$$M_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = c\}$$

an.

- (iv) Stimmt (i), wenn A nicht symmetrisch ist?

Aufgabe 6 (1,5+0,5+1+1+1). Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche. Wir nennen M *orientierbar*, falls es ein stetiges nirgends verschwindendes Normalenfeld gibt.

- (i) Sei $p \in M$ und $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung um p . Zeigen Sie, dass $F(U)$ orientierbar ist.
- (ii) Ist S^2 orientierbar?
- (iii) Sei

$$\text{Mö} = \{F(s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (-1, 1), s \in \mathbb{R}\}$$

mit

$$F(s, t) = \left(\cos(s) \left(2 + t \cos \frac{s}{2} \right), \sin(s) \left(2 + t \cos \frac{s}{2} \right), t \sin \frac{s}{2} \right)^T.$$

Skizzieren Sie Mö und zeigen Sie, dass $\text{Mö} \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit in dem sie genügend lokale Parametrisierungen angeben. Zeigen Sie, dass Mö nicht orientierbar ist.

- (iv) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, falls es ein glattes nirgends verschwindendes Normalenfeld gibt.
- (v) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, falls es lokale Parametrisierungen $F_i: U_i \rightarrow V_i$ von M gibt, die M überdecken (d.h. es gilt $M \subseteq \cup_i V_i$) und $\det D_{F_i^{-1}(p)}(F_j^{-1} \circ F_i) > 0$ für alle i, j und $p \in V_i \cap V_j \cap M$ gilt. (Hinweis: Erweitern Sie $\frac{\partial F_i}{\partial u^i}(u)$ mittels eines Einheitsnormalenvektors $\nu_i(p = F(u))$ zu einer positiv orientierten Basis und diskutieren Sie, wann $\nu_i(p) = \nu_j(p)$ ist.)

Abgabe am Donnerstag 2.11.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

Übungsblatt 3

Aufgabe 7. (1+1+2+1)

- (i) Sei V ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass $T_v V = V$ für alle $v \in V$ gilt.
- (ii) Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie $T_p U$ und $T_p M$ für $p \in U$.
- (iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$ gilt und $d_p \iota: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung ist.
- (iv) Berechnen Sie explizit den Tangentialraum an $M_a := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a\}$ ($a > 0$) im Punkt $(\sqrt{a}, 0, 0)$.

Aufgabe 8. (2+2+1) Sei $X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$. Sei $(x, y) \sim (x', y')$ genau dann, wenn beide gleich sind oder $x = x' > 0$ ist. Wir setzen $M = X / \sim$ und

$$\kappa_{\pm}: U_{\pm} := \mathbb{R} \times \{\pm 1\} / \sim \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad [(x, \pm 1)] \mapsto x.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\kappa_+ \circ \kappa_-^{-1}: \kappa_-(U_+ \cap U_-) \rightarrow \kappa_+(U_- \cap U_+)$ glatt ist.
- (ii) Sei \mathcal{T} , die eindeutige Topologie, bzgl. derer die κ_{\pm} stetig sind (vgl. Beispiel I.3.6). Zeigen Sie, dass \mathcal{T} gleich der Quotiententopologie auf M der Surjektion $X \rightarrow X / \sim$ ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass \mathcal{T} nicht Hausdorffsch ist.

Aufgabe 9. (je 1) Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum und Y eine Menge. Sei $q: X \rightarrow Y$ surjektiv.

- (i) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{T}' = \{U \subset Y \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ eine Topologie auf Y ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass \mathcal{T}' die feinste Topologie auf Y ist, so dass q stetig ist. D.h. zeigen Sie: Ist $\hat{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf Y , für die q stetig ist, dann gilt $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}'$.

Wir betrachten nun Y mit der Topologie \mathcal{T}' .

- (iii) Zeigen Sie, dass für jeden weiteren topologischen Raum (Z, \mathcal{T}'') und jede Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ gilt: f ist genau dann stetig, wenn $f \circ q$ stetig ist.
- (iv) (Universelle Eigenschaft) Sei $\tilde{f}: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung für die $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $q(x_1) = q(x_2)$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ mit $\tilde{f} = f \circ q$ gibt.
- (v) Für welche der Aussagen (i)-(iv) benötigt man die Surjektivität von q ? Begründen Sie.

Abgabe am Donnerstag 9.11.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (1+1+3). Seien $f: M^m \rightarrow N^n$, $g: N^n \rightarrow Z^z$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

- (i) Zeigen Sie, dass $d_p \text{id}_M = \text{id}_{T_p M}$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f$ ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, v \mapsto d_p f(v)$$

und

$$df: TM \rightarrow TN, (p \in M, v \in T_p M) \mapsto (f(p), d_p f(v))$$

glatt sind.

Aufgabe 11. (2,5+2,5) Wir betrachten auf \mathbb{R}^2 die Äquivalenzrelation gegeben durch:

$$(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \sim (x', y')^T \in \mathbb{R}^2 \text{ genau dann, wenn es } m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (x, y) = (x' + m, y' + n) \text{ gibt.}$$

- (i) Zeigen Sie, dass \mathbb{R}^2 / \sim versehen mit der Quotiententopologie eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass \mathbb{R}^2 / \sim diffeomorph zu $S^1 \times S^1$ ist.¹

Aufgabe 12. (2+1+2) Sei $M := ([-1, 1] \times \{-1\}) \cup ([-1, 1] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times [-1, 1]) \cup (\{1\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$.

- (i) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu S^1 ist. Folgern Sie daraus, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit ist.
- (ii) Ist M eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ? Begründen Sie.
- (iii) Zeigen Sie, dass M für geeignete Wahl der Karten eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Abgabe am Donnerstag 16.11.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

¹Man sieht leicht, dass das Produkt $M \times N$ zweier Mannigfaltigkeiten wieder eine Mannigfaltigkeit ist, in dem aus zwei Karten $\kappa_1: U_1 \rightarrow V_1$ von M und $\kappa_2: U_2 \rightarrow V_2$ von N mittels $\kappa_1 \times \kappa_2: U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \times V_2$ eine Karte auf $M \times N$ baut.

Übungsblatt 5

Gruppen, die glatte Mannigfaltigkeiten sind, und deren Multiplikations- und Inversenbildung glatte Abbildungen sind, nennt man *Liegruppen*.

Die Gruppe $\mathbb{O}(n)$ ist eine Liegruppe: Dass $\mathbb{O}(n) \subset M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, wissen wir aus Beispiel I.1.6.v. Dass deren Multiplikations- und Inversenbildung glatte Abbildungen sind, folgt daher, dass die Erweiterungen dieser Abbildungen auf die offene Teilmenge $\text{Gl}_n(\mathbb{R}) \subset M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ glatt sind.

(Alle Matrixuntergruppen von $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $\text{Gl}_n(\mathbb{C})$ sind Liegruppen.)

Aufgabe 13. (1+1+1+2)

- (i) Zeigen Sie, dass auch $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_{\mathbb{R}}(n, n)$ und eine Liegruppe ist.
- (ii) Was ist der Tangentialraum von $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ in $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$?
- (iii) Berechnen Sie explizit den Tangentialraum von $\mathbb{O}(n)$ in der Identitätsmatrix.
- (iv) Für eine Liegruppe G und ein $h \in G$ sei $L_h: G \rightarrow G$ definiert als $g \in G \mapsto hg$. Berechnen Sie $d_g L_h$ für $G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $G = \mathbb{O}(n)$.

Aufgabe 14. (2+2+1) Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M . Sei $\kappa: U \rightarrow V$ eine Karte von M mit lokalen Koordinaten x^i .

In diesen Koordinaten habe X die Form $X(p) = X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ für $p \in U$. Für $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt setzen wir $(X.f)(p) := X^i(v) \frac{\partial f \circ \kappa^{-1}}{\partial x^i}(v)$ für $p = \kappa^{-1}(v) \in U$.

- (i) Zeigen Sie, dass $(X.f)(p)$ unabhängig von der gewählten Karte ist und eine glatte Funktion $X.f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.
- (ii) Zeigen Sie, dass $X.f = df(X)$ ist, d.h. $(X.f)(p) = d_p f(X(p))$ für alle $p \in M$ gilt, wobei wir $T_{f(p)}\mathbb{R}$ mit \mathbb{R} identifizieren.
- (iii) $X.f$ sei analog für nicht zwingend glatte Vektorfelder definiert (X sei eine Abbildung von M nach TM mit $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$). Zeigen Sie, dass X genau dann glatt ist, wenn $X.f$ für alle glatten $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ selbst glatt ist.

Aufgabe 15. Sei $R: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

- (i) $R(f + g) = R(f) + R(g)$
- (ii) $R(\alpha f) = \alpha R(f)$
- (iii) $R(fg) = R(f)g + R(g)f$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges glattes Vektorfeld X auf M mit $R(f) = X.f$ gibt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 14. Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Fall, dass Sie M mit einer Karte überdecken können (Dazu am besten f bis zur ersten Ordnung (+Restglied) in lokalen Koordinaten Taylor entwickeln.). Für den allgemeinen Fall eine Zerlegung der Eins benutzen.

Abgabe am Donnerstag 23.11.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

Übungsblatt 6

Aufgabe 16. (2+2+1) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow N$ glatt.

- (i) Sei $f(W)$ offen in $f(X)$ ($f(X)$ mit der induzierten Topologie von N) für alle W offen in M . Sei f injektiv. Zeigen Sie, dass dann f homöomorph aufs Bild abbildet.
- (ii) Zeigen Sie, dass jede eigentliche injektive Immersion eine Einbettung ist.
- (iii) Sei M kompakt. Zeigen Sie, dass dann jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ eigentlich ist.

Aufgabe 17. (1,5+(0,5+1+2))

- (i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $F: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M . Berechnen Sie die vom euklidischem Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n induzierte Metrik g in der Karte $\kappa := F^{-1}: U := W \cap M \rightarrow V$.
- (ii) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $M = \text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Sei g die induzierte Metrik auf M . Wir betrachten die Parametrisierung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x^1, x^2)^T \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))^T$.
 - (a) Berechnen Sie g_{ij} in den Koordinaten x^i .
 - (b) Berechnen Sie ein Einheitsnormalenfeld $\nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 - (c) Zerlegen Sie $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \left(= \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x) \right)$ für alle $i, j \in \{1, 2\}, x \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \frac{\partial F}{\partial x^2}(x)$ und $\nu(x)$ des \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 18. Betrachten Sie die stereographische Projektion des hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf den Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\phi: \mathbb{H}^n \rightarrow B_1(0), \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1+x^0} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Sei g die auf $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch die Lorentz-Metrik des \mathbb{R}^{n+1} induzierte Riemannsche Metrik. Berechnen Sie $(\phi^{-1})^*g$.¹

Man nennt $(B_1(0), (\phi^{-1})^*g)$ das *Poincarésche Ballmodell des hyperbolischen Raumes*.

Abgabe am Donnerstag 30.11.23 bis 14 Uhr in die Briefkästen

¹Zur Berechnung von ϕ^{-1} z.B. den Ansatz $(y^1, \dots, y^n) \in B_1(0) \mapsto (a, by^1, \dots, by^n) \in \mathbb{H}^n$ machen und a, b bestimmen.

Übungsblatt 7

Aufgabe 19. (2+0,5+2,5) Wir betrachten $S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Sei $SU(2) = \{A \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \mid A\bar{A}^T = \text{Id}_2, \det A = 1\}$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\phi: (a, b) \in S^3 \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten ist.

Mittels diesem Diffeomorphismus können wir auf S^3 eine Gruppenstruktur derart definieren, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

- (ii) Was ist dann $(a, b) \cdot (c, d)$ für $(a, b), (c, d) \in S^3$?

Für $x \in S^3$ sei $L_x: S^3 \rightarrow S^3, y \mapsto x \cdot y$. Weiterhin versehen wir $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ mit der Standardmetrik genannt σ .

- (iii) Zeigen Sie, dass die Standardmetrik S^3 *linksinvariant* ist, d.h. dass $L_x^* \sigma = \sigma$ für alle $x \in S^3$ gilt.

Aufgabe 20. (1+1,5+2,5) ($S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik) Wir betrachten die lokale Parametrisierung

$$F: (\phi, \psi)^T \mapsto (\cos \phi \cos \psi, \cos \phi \sin \psi, \sin \phi)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $\partial_\phi := \frac{\partial}{\partial \phi}$ und $\partial_\psi := \frac{\partial}{\partial \psi}$.

- (i) Berechnen Sie $D_{\partial_\phi} \partial_\phi, D_{\partial_\phi} \partial_\psi, D_{\partial_\psi} \partial_\phi, D_{\partial_\psi} \partial_\psi$.
- (ii) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion der Vektoren aus (i) auf den jeweiligen Tangentialraum der Sphäre in der Basis $\partial_\phi, \partial_\psi$.
- (iii) Sei $c: I \rightarrow S^2, c(t) = F(\phi(t), \psi(t))$. Berechnen Sie \ddot{c}^{tan} und bestimmen Sie alle Lösungen von $\ddot{c}^{\text{tan}} = 0$ für $c(0) = (1, 0, 0)$ und $\dot{c}(0) = (0, 0, 1)$.

Aufgabe 21 (2+(1+2)). Es sei der Rotationstorus gegeben:

$$\{F(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- (i) $F|_{u, v \in (0, 2\pi)}$ ist eine lokale Parametrisierung. Berechnen Sie die Geodätengleichung in diesen Koordinaten.
- (ii) Bestimmen Sie, welche der Koordinatenlinien $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$ Geodätische sind.
- (a) Einmal mittels der in (i) aufgestellten Geodätengleichung.
- (b) Einmal mittels des Geodätenkriteriums für Hyperflächen aus Beispiel II.2.5.

Abgabe am Donnerstag 7.12.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

Übungsblatt 8

Aufgabe 22. (4+1)

- (i) Seien $(M, g), (N, h)$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Isometrie und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir schreiben $f_*X := df(X)$ (=Push-Forward, d.h. $(f_*X)(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$). Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) und $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf (N, h) . Zeigen Sie, dass $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.
- (ii) Seien die Levi-Civita-Zusammenhänge zu zwei Metriken g und \hat{g} auf M gleich. Folgt daraus schon, dass $g = \hat{g}$ ist? Begründen Sie.

Aufgabe 23 (1,5+3,5). (Noch einmal $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik) Sei F wie in ÜA 20.

- (i) Berechnen Sie die induzierte Metrik auf S^2 in den durch F gegebenen lokalen Koordinaten (zum Vergleich: $g = (d\phi)^2 + \cos^2 \phi (d\psi)^2$).
- (ii) Berechnen Sie die Christoffelsymbole bzgl. dieser Koordinaten und stellen Sie damit die Geodätengleichung auf.

Aufgabe 24. (1+(2+2)) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (i) Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir $T_{X,Y}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ durch $T_{X,Y}(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Zeigen Sie, dass $T_{[X,Y]}$ eine *Derivation* ist, d.h. eine Abbildung wie in ÜA 15, und damit eindeutig ein Element in $\mathfrak{X}(M)$ definiert, welches wir *Lieklammer* von X und Y nennen und mit $[X, Y]$ bezeichnen.

Die Lieklammer $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- (a) Bilinearität
- (b) Antisymmetrie, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (c) Jacobiidentität, d.h. für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
- (a) und (b) sieht man sofort. (c) muss man nachrechnen. Soll hier nicht gemacht werden – aber man würde verwenden, dass aus ÜA 15 folgt, dass ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$ schon das Nullvektorfeld sein muss.

In lokalen Koordinaten gilt:¹ $[X, Y] = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \partial_i$

- (ii) Zeigen Sie, dass für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ die folgenden Identitäten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gelten:

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

- (b) (Koszul-Formel)

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])$$

Abgabe am Donnerstag 14.12.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

¹ $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$

Übungsblatt 9

Sei (M, g) semi-Riemansche Mannigfaltigkeit. Sei $f \in C^\infty(M)$. Da g nichtentartet ist, gibt es genau ein $Z \in \mathfrak{X}(M)$ mit $g(Z, X) = df(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dieses Vektorfeld heißt *Gradient* $\text{grad}_g f$ von f bzgl. g . Es ist in lokalen Koordinaten zu einer Karte $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$:

$$(\text{grad}_g f)(p \in U) = g^{ij}(\kappa(p)) \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x^i}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \quad \text{kurz: } \text{grad}_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Aufgabe 25 (3+2). Sei (M, g) semi-Riemansche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇ .

- (i) Sei $\phi \in C^\infty(M)$, $g_\phi = e^{2\phi}g$ und $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang zu g_ϕ . Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X, Y)\text{grad}_g \phi$$

gilt.

- (ii) Sei (M, g) Lorentzsch und $c: I \rightarrow M$ eine lichtartige Geodätische (lichtartig heißt, dass $\dot{c}(t)$ für alle $t \in I$ lichtartig ist, also $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0$ für alle $t \in I$). Zeigen Sie, dass dann das Bild von c auch für $g_\phi = e^{2\phi}g$, $\phi \in C^\infty(M)$, eine Geodäte ist.

Aufgabe 26. (1+2+1+1) Sei $H = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der Metrik $g_H = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ gegeben.

- (i) Zeigen Sie, dass $(x, y)^T \mapsto (x + c, y)^T$ und $(x, y)^T \mapsto (ax, ay)^T$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ Isometrien von (H, g_H) sind.¹
- (ii) Zeigen Sie, dass die Kurven

$$c_1: \mathbb{R} \rightarrow H, s \mapsto (0, e^s)$$

$$c_2: \mathbb{R} \rightarrow H, s \mapsto (\tanh s, (\cosh s)^{-1})$$

Geodätische sind. Skizzieren Sie die Mengen $c_1(\mathbb{R})$ und $c_2(\mathbb{R})$.

- (iii) Nutzen Sie (i) und (ii), um alle Geodäten in (H, g) zu beschreiben.

(H, g) ist ein Modell des zweidimensionalen hyperbolischen Raumes, d.h. es existiert eine Isometrie zu \mathbb{H}^2 mit der Standardarmetrik wie in Bsp. II.1.4: Eine Isometrie zwischen H und dem Poincaréschen Ballmodell des hyperbolischen Raumes aus ÜA 18 bzw. Bsp. II.1.17 ist gegeben durch $H \rightarrow B_1(0)$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, wobei H und $B_1(0)$ beide als Teilmengen von \mathbb{C} aufgefasst werden.

- (iv) Was sind die Geodäten im zweidimensionalen Poincaréschen Ballmodell des hyperbolischen Raumes?

¹Fassen wir $H \subset \mathbb{C}$ auf. Zusammen mit der Spiegelung $z \mapsto -\bar{z}$, den Isometrien aus (i) und Hintereinanderausführung erhält man alle Isometrien von H : Die Möbiustransformationen

$$z \in H \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in H$$

für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ alle orientierungserhaltenen Isometrien sind.

Aufgabe 27. Sei $\gamma: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte nach Bogenlänge parametrisierte Kurve (also: $|\dot{\gamma}| = 1$), die eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ ist. Sei M die Fläche, die durch Rotation von γ um die z -Achse entsteht (Dann automatisch eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3).

Verwenden Sie als Koordinaten zur Beschreibung von M die Koordinate zu I und den Rotationswinkel ϕ . Berechnen Sie die induzierte Metrik und die zugehörigen Hamiltongleichungen. Welche Erhaltungsgröße können Sie dabei direkt ablesen? Was ist die anschauliche Bedeutung dieser Erhaltungsgröße²?

Abgabe am Donnerstag 21.12.23 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

²Irgendwas mit Geschwindigkeitsvektor der Geodätischen und einem Winkel...

Übungsblatt 10– Frohe Weihnachten!

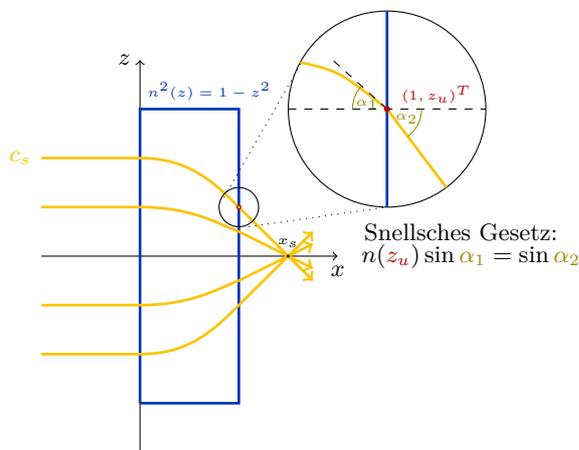
Aufgabe 28. (2.5+1+1.5) Seien (M, g) und (N, h) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $(M \times N, g + h)$. Sei ∇^g, ∇^h bzw. ∇^{g+h} jeweils der Levi-Civita Zusammenhang auf M, N bzw. $M \times N$. Sei $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y, W \in \mathfrak{X}(N)$. Dann ist $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\nabla_{(X,Y)}^{g+h}(Z, W) = (\nabla_X^g Z, \nabla_Y^h W)$ gilt.
- (ii) Sei $c(t) = (c_M(t), c_N(t))$ eine Kurve in $M \times N$. Folgern Sie mittels (i), dass c genau dann Geodätische in $M \times N$ ist, falls $c_M(t)$ eine Geodätische in M und $c_N(t)$ eine Geodätische in N ist.
- (iii) Sei $(M = N \times \mathbb{R}, g = h - dt^2)$ mit (N, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\pi: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, ist $c: I \rightarrow N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in N , dann ist $\gamma(t) = (c(t), t)$ eine lichtartige Geodätische in M . Zeigen Sie weiterhin, dass es für jede Geodätische c_N auf N eine lichtartige Geodätische c_M in M mit $\pi \circ c_M = c_N$ gibt.¹

Aufgabe 29/30. (3+2+5)

- (i) Sei eine Metrik auf \mathbb{R}^2 gegeben als: $n^2(z)((dx)^2 + (dz)^2)$. Zeigen Sie, dass für eine Geodätische $c(s) = (x(s), z(s))$ die beiden Größen $n^2(z)(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = C_2$ und $n^2(z)\dot{x} = C_1$ konstant in s sind. Folgern Sie daraus, dass eine Geodätische $\dot{z}^2 = n^{-2}(z)(C_2 - C_1^2 n^{-2}(z))$ erfüllt.
- (ii) Betrachten Sie die Geodätischen aus (i) als Graph über x , also $\tilde{z}(x(s)) = z(s)$. Zeigen Sie, dass dann $(\tilde{z}')^2 = \frac{C_2}{C_1^2} n^2(\tilde{z}) - 1$ gilt.
- (iii) (Gradientenlinse²)

Licht (nach Bogenlänge parametrisiert) bewege sich parallel zur x -Achse auf eine Gradientenlinse $(M = [0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2)$ (Koordinaten (x, z)) gegeben mit $g = n^2(z)g_E$ mit $n^2(z) = 1 - z^2$ zu, also $c_u(0) = (0, u)^T$ und $\dot{c}_u(0) = (\frac{1}{n(u)}, 0)^T$. Berechnen Sie c_u (in der Linse) unter Nutzung von (ii). Bei $x = 1$ tritt c_u wieder aus der Linse aus und befolgt dort das Snellsche Brechungsgesetz, siehe Abbildung. Der ausgetretene Lichtstrahl schneide die x -Achse in x_u . Rechnen Sie nach, dass $x_u = \text{const} + O(u^2)$ gilt.



Abgabe am Donnerstag 11.01.24 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

¹Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche aus einem lichtleitendem Material. Dann ist M mit induzierter Metrik Riemannsch. Wir betrachten $(N = \mathbb{R}, -(dt)^2)$ und $M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{3,1}$ (Lokal ist $\mathbb{R}^{3,1}$ eine gute Näherung für die Raumzeit (=Lorentzmannigfaltigkeit), in der wir leben.). Sendet eine Quelle in $p \in M$ in Richtung $v \in T_p M$ dann einen Lichtstrahl aus, dann bewegt sich das Licht in $M \times \mathbb{R}$ auf einer Geodäten. (iii) heißt also, dass die räumliche Bewegung des Lichtes, die wir dann sehen, eine Geodäte in M ist.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics

Übungsblatt 11

Aufgabe 31. (2+3)

- (i) Betrachten Sie $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik. Sei $p \in S^2$. Sei $c: [0, \pi] \rightarrow S^2$ eine minimierende Geodätische von p nach $-p$. Bestimmen Sie die Menge der $v \in T_{-p}S^2$, für die es ein Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $J(\pi) = v$ gibt.
- (ii) Betrachten Sie den Zylinder $Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit induzierter Metrik und die Geodätische $c: t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \in Z$. Bestimmen Sie alle periodischen Jacobifelder J längs c (also $J(t + 2\pi) = J(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 32. (3+1+1) Sei $f: M \rightarrow N$ eine lokale Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) . Zeigen Sie:

- (i) $f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(d_p f(v))$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_p M$ für die $\exp_p(v)$ definiert ist.
- (ii) $\text{dist}_h(f(p), f(q)) \leq \text{dist}_g(p, q)$ für alle $p, q \in M$.
- (iii) $\text{dist}_h(f(p), f(q)) = \text{dist}_g(p, q)$ für alle $p, q \in M$, falls f schon eine Isometrie ist.

Aufgabe 33. (4+1) Sei (M, g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei $\delta > 0$ klein genug, dass $\exp_p: \overline{B_\delta(0)} \subset T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $v: S^1 \rightarrow T_p M$ eine Parametrisierung von $S_1(0) := \{v \in T_p M \mid g_p(v, v) = 1\}$. Sei $F: (\rho, \phi) \in (0, \delta) \times (-\pi, \pi) \rightarrow M$ gegeben als $F(\rho, \phi) = \exp_p(\rho v(\phi))$.

- (i) Nehmen Sie erst einmal an, dass F eine Parametrisierung der Fläche ist. Zeigen Sie, dass für die Metrik g in den lokalen Koordinaten $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\rho\phi} = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} g_{\phi\phi} = 0$ und $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \sqrt{g_{\phi\phi}} = 1$ gilt.
(Hinweis: Um zu zeigen, dass $g_{\rho\phi} = 0$ ist, berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial \rho} g_{\rho\phi}$ und $\lim_{\rho \rightarrow 0} g_{\rho\phi}(\rho, \phi_0)$.)
- (ii) Folgern Sie aus obigen Rechnungen, dass F eine Parametrisierung der Fläche ist.

Übungsblatt 12

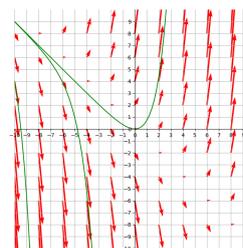
Auf diesem Übungsblatt bauen die verschiedenen Aufgaben aufeinander auf. *Sie können bei jeder Teilaufgabe alle Aussagen, die davor stehen als gegeben voraussetzen* (auch wenn Sie diese verwendeten Teile selbst nicht lösen.)

Sie können folgendes¹ zu Flüssen von Vektorfeldern verwenden (wo nötig):

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$. Die Gleichung

$$\dot{\gamma}_p(t) = X(\gamma_p(t)), \quad \gamma_p(0) = p$$

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit gegebenem Anfangswert und hat damit (am besten Übergang zu lokalen Koordinaten, damit Differentialgleichung auf \mathbb{R}^n) zumindest für kurze Zeit eine eindeutige Lösung nach Picard-Lindelöf. Das maximale Intervall, nennen wir (a_p, b_p) (es ist $0 \in (a_p, b_p)$).



Der *Fluß des Vektorfeldes* X ist definiert durch

$$\Phi: \Sigma_X \rightarrow M, \quad \Phi_t(p) := \Phi(t, p) := \gamma_p(t)$$

mit $\Sigma_X := \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid a_p < t < b_p\}$.

Vektorfeld (rot): $X(x, y) = (1, x + y)^T$

DGL: $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x(t) + y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = p$

Integralkurven (grün):

$$\gamma_p(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + t, (y_0 + x_0 + 1)e^t - t - x_0 - 1)^T.$$

Ist $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$, nennen wir das Vektorfeld X *vollständig*. Die Kurven $\gamma_p(t)$ nennen wir *Integralkurven/Flußlinien* des Vektorfeldes.

Man kann zeigen: Ist X vollständig, dann ist $\Phi_t: M \rightarrow M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

Allerdings sind nicht alle Vektorfelder vollständig (nicht mal auf \mathbb{R}): Man kann durch konkretes Lösen obiger Differentialgleichung direkt sehen, dass z.B. $x^2 \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ nicht vollständig ist.

Aber man kann z.B. zeigen, dass jedes glatte Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig ist.

Kommen wir nun zum spezielleren Kontext der folgenden Aufgaben:

Sei G von nun an eine Liegruppe. Für $g \in G$ sei $L_g: G \rightarrow G, h \mapsto g \cdot h$ und $R_g: G \rightarrow G, h \mapsto h \cdot g$.

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ ist *linksinvariant*, falls $(L_g)_* X = X$ für alle $g \in G$ gilt. Ist $v \in T_e G$, dann ist $V(g) := d_e L_g(v)$ das eindeutig linksinvarianten Vektorfeld mit $V(e) = v$.

Man kann zeigen, dass für X, Y linksinvariante Vektorfelder auch $[X, Y]$ wieder linksinvariant ist². Damit ergibt die Lieklammer auch eine Abbildung auf $T_e G$ durch

$$[v \in T_e G, w \in T_e G] := [V, W](e),$$

wobei V bzw. W , die zu v bzw. w gehörigen linksinvarianten Vektorfelder sind. Diese Lieklammer auf $T_e G$ erbt die Bilinearität, die Antisymmetrie und die Jacobiidentität der Lieklammer auf Vektorfeldern (vgl. ÜA 24) und macht $T_e G$ so zu einer *Liealgebra*³.

¹Beweise dazu finden sich, z.B. in Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer 2017, 7th ed.: Sec. 2.3

²Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer 2017: Lemma 2.3.6

³<https://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Algebra>

Für Liegruppen definiert man eine Abbildung, die *Exponentialabbildung* genannt wird, durch

$$\exp: T_e G \rightarrow G, \quad v \mapsto \gamma_V(1),$$

definiert, wobei $V(g) = d_e L_g(v)$ (also $V \in \mathfrak{X}(G)$) und γ_V die zu V gehörige Integralkurve mit $\gamma_V(0) = e$ ist. Eine Riemannsche Metrik σ auf G heißt *bi-invariant*, falls $L_g^* \sigma = R_g^* \sigma = \sigma$ für alle $g \in G$ ist. Jede kompakte Liegruppe besitzt eine bi-invariante Metrik⁴.

Von nun sei σ eine solche bi-invariante Metrik auf G . In den folgenden Aufgaben werden wir sehen, dass die Exponentialabbildung einer Liegruppe, wie oben definiert, gleich der Exponentialabbildung für (G, σ) , wie wir sie für beliebige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten in der Vorlesung definiert haben, ist. Weiterhin werden wir sehen, warum die Abbildung eigentlich Exponentialabbildung heißt.

Aufgabe 34. (2+1,5+1,5)

- (i) Vervollständigen Sie den folgenden Beweis, dass $\iota: g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ eine Isometrie ist:

Sei $M: G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ die Gruppenmultiplikation in G . Sei $\gamma: I \rightarrow G$ eine Kurve mit $\gamma(0) = g$. Dann ist

$$e = \gamma(t) \cdot \gamma(t)^{-1} = M(\gamma(t), \iota(\gamma(t))).$$

Differentiation ergibt

$$\underline{\hspace{2cm}} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} M(\gamma(t), \iota(\gamma(t))) = d_{(g, g^{-1})} M(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}}), d_{\underline{\hspace{1cm}}} \iota(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}})))$$

$$\begin{aligned} \text{warum?} &\approx d_{(g, g^{-1})} M(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}}), 0) + d_{(g, g^{-1})} M(0, d_{\underline{\hspace{1cm}}} \iota(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}}))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} M(\gamma(t), \underline{\hspace{1cm}}) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} M(\underline{\hspace{1cm}}, \iota(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\underline{\hspace{1cm}}}(\gamma(t)) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{\underline{\hspace{1cm}}}(\iota(\gamma(t))) = d_{\underline{\hspace{1cm}}} R_{\underline{\hspace{1cm}}}(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}})) + d_{\underline{\hspace{1cm}}} L_{\underline{\hspace{1cm}}}(d_{\underline{\hspace{1cm}}} \iota(\dot{\gamma}(\underline{\hspace{1cm}}))). \end{aligned}$$

Daraus folgt $d_g \iota(u) = -(d_{\underline{\hspace{1cm}}} L_{\underline{\hspace{1cm}}})^{-1} (d_{\underline{\hspace{1cm}}} R_{\underline{\hspace{1cm}}}(u))$. Da $\underline{\hspace{2cm}}$, ist ι eine Isometrie.

Insbesondere gilt

$$d_e \iota(u) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (ii) Sei $\gamma: I \rightarrow G$ eine Geodätische mit $\gamma(0 \in I) = e$. Folgern Sie, dass auch $s \in I \mapsto \gamma(s)^{-1}$ und $s \in I \mapsto \gamma(s_0)\gamma(s)$ für $s_0 \in I$ Geodätische sind und $\gamma(s_0)\gamma(s) = \gamma(s_0 + s)$ für alle $s_0, s, s_0 + s \in I$ gilt.
 (iii) Folgern Sie, dass die Geodätische γ auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

Aufgabe 35. (1,5+2+1,5) Seien X, Y, Z, U linksinvariante Vektorfelder auf G . Zeigen Sie:

- (i) Die Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfeldes sind Geodätische. Für $v \in T_e G$ ist $\exp(v)$, wie oben definiert, gleich $\exp_e(v)$ für die Exponentialfunktion von (G, σ) .
 (ii) Es ist $\nabla_X X = 0$, $\nabla_X Y = -\nabla_Y X$, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, und $g(X, Y)$ ist konstant auf G .
 (iii) Es gilt $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$ und $\sigma(R(X, Y)Z, U) = -\frac{1}{4}\sigma([X, Y], [Z, U])$. Insbesondere ist die Schnittkrümmung nichtnegativ.

Aufgabe 36. (1+1+1,5+1,5) Sei $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ für \mathbb{K} gleich \mathbb{R} oder \mathbb{C} eine Matrixuntergruppe (und damit insbesondere eine Liegruppe). Es gilt $T_{\text{Id}}G \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(n, n)$ (Warum?).

- (i) Wie sehen linksinvariante Vektorfelder aus?
 (ii) Zeigen Sie, dass $[A, B] = AB - BA$ für $A, B \in T_e G$ gilt (Die Lieklammer auf $T_e G$ ist oben definiert).
 (iii) Zeigen Sie, dass $\exp A = e^A$ ist. Hier ist $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ die Exponentialfunktion für Matrizen.
 (iv) Betrachten Sie $G = SO(2)$. Geben Sie explizit $T_{\text{Id}}G$, eine bi-invariante Metrik auf $SO(2)$ und die Exponentialabbildung an.

Abgabe am Donnerstag 25.01.24 bis 12 Uhr in den Briefkasten – 3.OG

⁴Petersen: Riemannian geometry, 2nd ed, Springer 2006: S.18

Übungsblatt 13

Aufgabe 40. (3+1+1) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die zwischen je zwei Punkten $p, q \in M$ mindestens eine minimale Geodätische $c: [a, b] \rightarrow M$ ($c(a) = p$ und $c(b) = q$) existiert, d.h. $d(c(t_1), c(t_2)) = L(c: [t_1, t_2] \rightarrow M)$ für alle $t_{1,2} \in [a, b]$. Sei $p \in M$, $v \in T_p M$ derart, dass $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0, 1]$ eine minimale Geodätische ist. Weiterhin sei γ_v nicht mehr minimierend für $t > 1$.

(i) Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle eintreten muss:

- (a) Es existiert ein $w \in T_p M$ mit $v \neq w$, $|v| = |w|$ und $\exp_p(v) = \exp_p(w)$.
- (b) p und $\exp_p(v)$ sind konjugierte Punkte längs γ_v .

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall (a) auch $\gamma_w(t)$ auf $[0, 1]$ eine minimierende Geodäte ist.

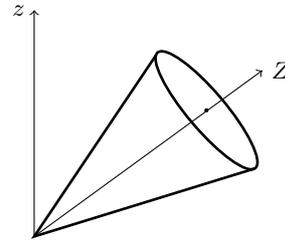
(iii) Seien $w_1, w_2 \in T_p M$ derart, dass $w_1 \neq w_2$ und beide $\exp_p(tw_i)$ auf $[0, 1]$ minimierende Geodätische mit $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2)$ sind. Zeigen Sie, dass für $t > 1$ keine dieser beiden Geodätische minimierend sein kann. (Hinweis: Verwenden Sie, dass Geodätische immer glatt sind.)

Aufgabe 41. Sei (M, g) eine geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und nicht kompakt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in M$ ein $v \in T_p M$ gibt, so dass $c_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0, \infty)$ minimal ist (es gibt also einen längenminimierenden geodätischen Strahl nach unendlich).

Aufgabe 42 (0,5 + (1+0,5) + 1 + (2+1*+2*)). (Symmetrischer schwerer Kreisel)

Wir wollen die Kreiselbewegung eines symmetrischen Kreisels, wie im Bild (Grundfläche des Kegels ist ein Kreis, Dichte sei konstant), beschreiben, im Spezialfall, dass seine Spitze an einem Ort fixiert ist.

Dazu wollen wir die Lagrangefunktion aufstellen, also kinetische minus potentielle Energie. Die kinetische Energie des Kreisels enthält dabei die Energie, die zur Rotation gehört. Da wir uns im Spezialfall befinden, dass keine Bewegung der Spitze vorliegt, ist die kinetische Energie des Kreisels rein durch die Rotation desselben um seine Spitze beschrieben.



Insbesondere muss dazu die Orientierung/Lage eines festen Körpers (hier des Kegels) im dreidimensionalen euklidischen Raum beschrieben werden. Dazu verwendet man im Allgemeinen *Eulerwinkel*. Diese führen wir in (i) unten ein. In (ii) stellen wir dann die Rotationsenergie in diesen Koordinaten dar und stellen die Lagrangefunktion des Kreisels auf. Mit der Lagrangefunktion erhält man dann natürlich durch die Euler-Lagrange-Gleichungen direkt die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die die Bewegung des Kreisels beschreiben. Um aber Effekte wie Präzession und Nutation diskutieren zu können, vgl. (iv), ist es besser nicht direkt zu den vollständigen Euler-Lagrange-Gleichungen zu gehen, sondern Erhaltungsgrößen einzuführen (das machen wir in (iii)).

(i) Man beschreibt die Lage eines Koordinatensystems X, Y, Z in Relation zu einem anderen Koordinatensystem x, y, z (beide mit gleichem Ursprung) mittels dreier Winkel (hier ϕ, θ, ψ genannt). Man sucht also eine Parametrisierung der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit (und Liegruppe) $SO(3)$.

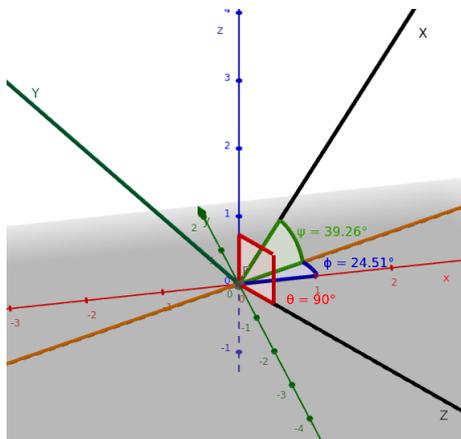
Man stellt sich die Bedeutung der Winkel wie folgt vor: X, Y, Z entsteht aus x, y, z durch Hintereinanderausführung dreier 'Elementardrehung': Zuerst eine Drehung um die z -Achse um den Winkel ϕ , dann eine Drehung um die x -Achse um den Winkel θ und zum Schluss eine Drehung um die z -Achse um den Winkel ψ . Die Hintereinanderausführung gibt die Gesamtrotaion

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(3)$$

und damit die Matrix des Basiswechsels zwischen den (X, Y, Z) -Koordinaten und den (x, y, z) -Koordinaten. Damit die Abbildung injektiv ist, sei $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi)$ und $\psi \in (0, 2\pi)$.

Zwar wird ϕ mittels Drehung um die z -Achse eingeführt, aber es folgen dann noch zwei andere Elementardrehungen, so dass ϕ am Ende die Drehung der Z -Achse um die z -Achse beschreibt (vgl. die Präzession beim Kreisel in (iv). Ähnlich bei θ und der Nutation.).

Hat man die Koordinatensysteme gegeben, kann man die Eulerwinkel auch wie folgt ablesen: Sei N der Schnitt der xy -Ebene mit der XY -Ebene (also eine Gerade, die senkrecht auf der z - und der Z -Achse steht).



Eulerwinkel: Bild mit Geogebra¹

- Der erste Euler-Winkel ϕ ist der Winkel zwischen der x -Achse und der Geraden N (gemessen in Richtung der y -Achse).
- Der zweite Euler-Winkel θ ist der Winkel zwischen z -Achse und der Z -Achse.
- Der dritte Euler-Winkel ψ ist der Winkel zwischen der Geraden N und der X -Achse.

Zur Beschreibung der Rotation des Kegels (oder eines anderen starren Körpers K) seien (x, y, z) die Standardkoordinaten des \mathbb{R}^3 und (X, Y, Z) ein Koordinatensystem, was fest an den starren Körper gebunden ist (vgl. Bild). D.h. ein fester Punkt $P = (X_P, Y_P, Z_P)^T \in K$ bewegt sich dann durch Rotation des Kegels im Raum auf der Bahn $p(t) = (x(t), y(t), z(t))^T = R(t)P$.

Die zugehörige Geschwindigkeit ist

$$v_P(t) = \partial_t p(t) = \dot{R}(t)P = \underbrace{\dot{R}(t)R(t)^{-1}}_{=: \hat{\omega}(t)} p(t).$$

Sei ω die räumliche Winkelgeschwindigkeit, d.h. $v_P(t) = \omega(t) \times p(t)$.

Aufg. in (i): Überlegen Sie sich, dass aus $R \in SO(3)$ folgt, dass $\hat{\omega}(t)$ antisymmetrisch ist, also die Form

$$\hat{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & \omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & -\omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

hat und damit $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$ ist.

¹Die Geogebra-Datei dazu findet sich [hier](https://www.geogebra.org/calculator). Zieht man diese Datei ins Fenster auf <https://www.geogebra.org/calculator> kann man das Bild dort auch bewegen.

Ausrechnen ergibt:

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (ii) Die Rotationsenergie wird berechnet durch das Trägheitsmoment des Körpers und dessen Winkelgeschwindigkeit. Das Trägheitsmoment gibt die Trägheit eines starren (=nicht verformbaren) Körpers K gegenüber seiner Winkelgeschwindigkeitsänderung bei der Drehung um eine gegebene Achse an – also das, was die Masse für die Geschwindigkeitsänderung ist. Die Formel² zur Berechnung des Trägheitsmoments bei Rotation um eine Achse A ist gegeben als

$$J_A = \int_K \rho(x) \text{dist}(x, A)^2 \text{dvol}_x,$$

wobei ρ die Dichte des Körpers ist. Die Rotationsenergie bei Drehung um eine feste Achse A mit Winkelgeschwindigkeit $|\omega|$ ist dann $T = \frac{1}{2} J_A |\omega|^2$.

Beim Kreisel ändert sich die Rotationsachse. Das heißt, man braucht Trägheitsmomente um alle Achsen. Es stellt sich heraus, dass man diese in einem symmetrischen $(0, 2)$ -Tensor (symmetrische Bilinearform) zusammenfassen kann – dem *Trägheitstensor* J . Damit ist die Rotationsenergie $E = \frac{1}{2} \omega^T J \omega$.

Da J symmetrisch ist, ist es diagonalisierbar und hat in der zugehörigen Basis (diese Richtungen werden *Hauptträgheitsachsen* genannt) dann Diagonalform $\text{diag}(I_1, I_2, I_3)$.³ Für unseren symmetrischen Kreisel ist (wenn I_3 zur Symmetrieachse des Kreisels gehört) wegen der Symmetrie, dann $I_1 = I_2$.⁴

- Aufg. (a) zu (ii) Berechnen Sie die Rotationsenergie T des symmetrischen Kreisels in Abhängigkeit von I_1, I_3 (Die I_j seien schon für die Rotation um die Spitze des Kreisels berechnet.) und den Eulerwinkeln (bzw. deren Ableitungen).

Damit fehlt für die Lagrangefunktion $L = T - V$ noch die potentielle Energie V .

- Aufg. (b) zu (ii) Der Schwerpunkt des Kreisels befinde sich im Abstand ℓ von der Spitze. Die potentielle Energie ist $V = Mgh$ mit M Masse des Kreisels, g Erdbeschleunigung und h Abstand des Schwerpunkts zur xy -Ebene. Berechnen Sie V in Abhängigkeit der Eulerwinkel (M, ℓ gegeben⁵).

Aus (ii) sollten Sie die Lagrangefunktion auf der Mannigfaltigkeit $M = SO(3)$ (in lokalen Koordinaten der Eulerwinkel geschrieben)

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta$$

erhalten haben.

- (iii) Die Eulerwinkel ϕ und ψ tauchen nicht explizit (sondern höchstens mit ihrer Ableitung) in L auf (in der Physik nennt man diese Variablen *zyklisch*). Verwenden Sie diese um Erhaltungsgrößen (p_ϕ und p_ψ) zu erhalten. Was ist die Interpretation dieser zwei Erhaltungsgrößen? Zusätzlich ist die Gesamtenergie $E = T + V$ noch erhalten, vgl. S.67 im Skript. Schreiben Sie E , indem Sie die zyklischen Variablen durch Terme in den zugehörigen Erhaltungsgrößen ersetzen.

Sie sollten nun einen Ausdruck in folgender Form haben:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta),$$

²https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment#Motivation_der_Definition

³Deshalb heißt der zugehörige Satz in der Linearen Algebra auch *Trägheitssatz* von Sylvester.

⁴Die genauen Werte der Trägheitsmomente des Kegels kann man über obiges Integral ausrechnen oder nachschlagen, wenn man möchte (Wir rechnen hier mit den abstrakten I_j). Beim Nachschlagen aber aufpassen: Die Trägheitsmomente, die man in der Literatur findet z.B. [hier](#) sind immer bei Rotation um den Schwerpunkt. Unser Kreisel dreht sich, aber um die Spitze. D.h. man muss da noch umrechnen mittels des [Steinerschen Satzes](#).

⁵Könnte man natürlich bei gegebener Geometrie ausrechnen.

wobei V_{eff} (*effektives Potential* genannt) eine Funktion in θ ist (D.h. sie darf noch von Erhaltungsgrößen der zyklischen Variablen abhängen, allerdings nicht von $\dot{\theta}$ oder den anderen Eulerwinkeln). Skizzieren Sie das effektive Potential (es sollte ein globales Minimum haben).

Insbesondere ist damit $\theta(t)$ durch

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{I_1}(E - V_{\text{eff}}(u))}} = t - t_0$$

bestimmt. Mit den Erhaltungsgrößen (bestimmt durch die Anfangswerte) erhält man so dann auch $\phi(t)$ und $\psi(t)$.

Die Bewegung des symmetrischen schweren Kreisels ist eine Überlagerung folgender Effekte:

- **Präzession:** Die Drehung der Symmetrieachse des Kegels (die Z -Achse) um die z -Achse – beschrieben durch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$.
 - **Nutation:** Eine periodische Änderung des Kippwinkels θ zwischen der Z - und der z -Achse.
 - Es bleibt $\dot{\psi}$. Das ist die Winkelgeschwindigkeit der Präzession des Drehimpulsvektors um die Z -Achse.
- (iv) Berechnen Sie $p_\phi - p_\psi \cos \theta$ als Funktion der Eulerwinkel. Es sollte eine Funktion in θ und $\dot{\phi}$ entstehen. Stellen Sie diese nach $\dot{\phi}$ um.

Sei θ_m das globale Minimum vom effektivem Potential.

- (a) Sei $E = V_{\text{eff}}(\theta_m)$.⁶ Was bedeutet dies für $\theta(t)$ und $\dot{\phi}(t)$ und für die $\sigma := p_\phi - p_\psi \cos \theta_0$? Damit $\dot{\phi}(t)$ überall reell sein kann, muss σ reell sein. Rechnen Sie nach, dass dies nur für $\theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ der Fall sein kann und berechnen Sie die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ als Funktion der Anfangswerte.
- (b*) Sei $E > V_{\text{eff}}(\theta_m)$ und $|p_\phi| > |p_\psi|$. Was bedeutet dies für $\dot{\phi}$ und die Präzession des Kreisels? Skizzieren Sie die Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels auf der S^2 .
- (c*) Sei $E > V_{\text{eff}}(\theta_m)$ und $|p_\phi| < |p_\psi|$. Nehmen Sie an, dass sich θ im Intervall $[\theta_1, \theta_2] \subset (0, \frac{\pi}{2})$ bewegt. Führen Sie den Hilfswinkel $\alpha := \arccos \frac{p_\phi}{p_\psi}$ ein. Diskutieren Sie qualitativ, die Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels (Präzession/Nutation) in Abhängigkeit von α .

Abgabe am Donnerstag 01.02.24 bis 14 Uhr in die Briefkästen

⁶D.h. die Anfangswerte der Kreiselbewegung seien so gewählt, dass diese Gleichung gilt.

Übungsblatt 14

Das Übungsblatt muss nicht mehr abgegeben werden, kann aber für Zusatzpunkte genutzt werden. Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt. (Abgabe ggf. 08.02.24 bis 12 Uhr).

Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$.

- (1) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie M und zeigen Sie, dass $F: (r, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, r^2)$ eine lokale Parametrisierung von M ist. Berechnen Sie die induzierte Metrik g in den Koordinaten (r, ϕ) .
- (2) Berechnen Sie die Geodätengleichung in den (r, ϕ) Koordinaten aus (1). Ist $s \in (0, \infty) \mapsto F(s, \phi_0)$ für $\phi_0 \in (0, 2\pi)$ Geodäte? Falls ja, kann man diese Kurve, parametrisiert als Geodätische, auf ganz \mathbb{R} fortsetzen?
- (3) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der nach Bogenlänge parametrisierten Breitenkreise. Sind diese Kurven Geodätische? Berechnen Sie den Paralleltransport von $\partial_r F(r_0, 0)$ entlang des zugehörigen nach Bogenlänge parametrisierten Breitenkreises.
- (4) Was ist der maximale Definitionsbereich für $\exp_{(0,0,0)}$ und $\exp_{(1,0,1)}$? Berechnen Sie $d((0, 0, 0), (5, 0, 25))$. Zeigen Sie $\sqrt{2} < d((1, 0, 1), (0, 1, 1)) < \pi/2$.
- (5) Berechnen Sie $g(R(\partial_r, \partial_\phi)\partial_\phi, \partial_r)$ und die Gaußkrümmung K in den Koordinaten (r, ϕ) aus (1). Was ist die Gaußkrümmung in $(0, 0, 0)$?
- (6) Geben Sie eine (nichttriviale¹) Wirkung $\Phi: S^1 \times M \rightarrow M$ von S^1 auf M an, so dass $\Phi(z, \cdot)$ für alle $z \in S^1$ isometrisch ist. Ist diese Wirkung frei? Geben Sie eine möglichst große Teilmenge N von M an, so dass S^1 auf dieser Teilmenge N wirkt und N/S^1 eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Was ist die induzierte Metrik auf N/S^1 , also die Metrik h auf dem Orbitraum für die $\pi^*h = g$ gilt, wobei $\pi: N \rightarrow N/S^1$ die Projektionsabbildung ist?
- (7) Ist M orientierbar? Wenn ja, wählen Sie eine Orientierung und geben Sie die Volumenform dvol_g von (M, g) in den Koordinaten (r, ϕ) an bzgl. dieser Orientierung an.
- (8) Sei $M_h := \{(x, y, z) \in M \mid z \leq h\}$. Berechnen Sie $\int_{M_h} K \text{dvol}_g$ einmal direkt und einmal, in dem Sie Gauß-Bonnet für M_h benutzen und den Limes für $h \rightarrow \infty$ bilden. Geben Sie explizit die Zusammenhangsformen $\omega_\phi^r, \omega_r^\phi, \omega_r^r, \omega_\phi^\phi$ bzgl. des orthonormalen Rahmen $\partial_r, \partial_\phi$ an und berechnen Sie explizit $d\omega_\phi^r$. Lesen Sie mit Hilfe der Strukturgleichung auch die Gaußkrümmung ab.

¹D.h. $\Phi(z, p) = p$ für alle $p \in M$ und $z \in S^1$ zählt nicht.