Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 1

Übungsaufgabe 1 (Hofmeister/Tscherner). Sei $\pi\colon E \to M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F. Für $x \in M$ definieren wir $E_x:=\pi^{-1}(x)$.

(i) Ist E_x eine Untermannigfaltigkeit von E?*

(ii) Ist $T\nu E:=\sqcup_{e\in E} T_e(E_{\pi(e)}) \to M$, $v \in T_e(E_{\pi(e)}) \mapsto \pi(e) \in M$, ein Faserbündel?

Übungsaufgabe 2 (Stappen/Storch). Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und seien $\mu_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F/\sim \xrightarrow{\pi} M,\ [(x,v)] \mapsto x,$$

wobei $(x,v) \in U_\alpha \times F \sim (y,w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\alpha\beta}(x)v = w$ ist, sowie $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, $[(x,v) \in U_\alpha \times F] \mapsto (x,v)$. Zeigen Sie, dass E ein Faserbündel definiert.

Übungsaufgabe 3 (Fleig/Beisitzer). (i) Zeigen Sie das TS^1 das triviale Faserbündel über S^1 mit Fasertyp $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Sei ϵ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus \epsilon$ das triviale Faserbündel über S^n mit Fasertyp $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(iii*) Ist TS^2 trivial?

Übungsaufgabe 4 (Lenthe/Amann). Sei $E \to M \times [0,1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp F.

(i) Seien die Einschränkungen $E|_{M\times[0,c]}$ und $E|_{M\times[c,1]}$ triviale Faserbündel. Zeigen Sie, dass dann auch $E \to M \times [0,1]$ ein triviales Faserbündel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von M gibt, so dass alle Einschränkungen $E|_{U_i\times[0,1]}$ trivial sind.†

(iii) Sei U_i wie in (ii) und ϕ_i eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze $\psi_i = \sum_{j\leq i} \phi_j$. Sei $E_i:=E|_{\Gamma_i}$ mit $\Gamma_i:=\{(x,\psi_i(x)) \mid x \in M\}$. Die Abbildung $(x,\psi_i(x)) \in \Gamma_i \to (x,\psi_{i-1}(x)) \in \Gamma_{i-1}$ induziert eine Bündelisomorphismus $h_i\colon E_i \to E_{i-1}$.

(iv) Konstruieren Sie aus obigen h_i einen Bündelisomorphismus von $E|_{M\times\{0\}}$ und $E|_{M\times\{1\}}$.

---

*Eine Teilmenge $N \subset M$ einer Mannigfaltigkeit ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $\kappa\colon U \subset M \to \mathbb{R}^m$ mit $\kappa(U \cap N) = \mathbb{R}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^{m-n}\}$ gibt. Äquivalente Definition: Um jeden Punkt $p \in N$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ und eine glatte Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^{m-n}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = N \cap U$ ist. (Die Äquivalenz zeigt man ganz analog zum Fall von Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum, vgl. DiffgeoI, Satz I.1.4.)

†Unsere Mannigfaltigkeiten haben immer eine abzählbare Basis. Daraus folgt insbesondere, dass sie *Lindelöf-Räume* sind, d.h. dass jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt.