Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 2

Übungsaufgabe 5 (Grom/Jeßberger)**.** Sei $\pi\colon E \to S^1$ das Möbiusband und $f\colon z \in S^1 \subset \mathbb{C} \to z^k \in S^1$. Zeigen Sie, dass f^*E genau dann trivial ist, wenn k gerade ist.

Übungsaufgabe 6 (Storch/Lenthe)**.** Sei $S^2 = U_0 \cup U_1$ mit $U_{01} := U_1 \cap U_0$ eine Umgebung des Äquators und $U_i \cong \mathbb{R}^2$. Wir identifizieren U_i mit $\mathbb{R}^2$ und U_{01} mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir setzen $\mu_{01}(z) = z^k \in \mathrm{Gl}_1(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{Z}$, in Polarkoordinaten geschrieben:

$$\mu_{01}(r,\theta) = r^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}).$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ definiert das ein reelles Vektorbündel $E_k \to S^2$ vom Rang 2 (und ein komplexes vom Rang 1*).
Zeigen Sie:†

(i) $E_k \otimes_{\mathbb{C}} E_\ell \cong E_{k+\ell}$. Gilt auch $E_k \otimes_{\mathbb{R}} E_\ell \cong E_{k+\ell}$?

(ii) Es gilt $E_k \cong E_\ell$ genau dann, wenn $k = \ell$ ist.

(iii) Berechnen Sie $\iota^* E_k$, wobei $\iota\colon S^2 \to S^2$ die antipodale Abbildung ist.

Übungsaufgabe 7 (Beisitzer/Fleig)**.** (i) Sei $\pi\colon E \to M$ ein Faserbündel. Zeigen Sie, dass dann π eine Submersion ist (d.h. die Tangentialabbildung ist surjektiv).

(ii) Sei $q\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Quotientenabbildung. Dann ist $q^*T\mathbb{R}P^n = TS^n$.

(iii) Sei $\psi\colon E \to E'$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen $\pi\colon E \to M$ und $\pi'\colon E' \to M'$, so dass $\psi|_{E_x}\colon E_x \to E'_{f(y)}$ mit $f \circ \pi = \pi \circ \psi$ für alle $x \in M$ den gleichen Rang hat. Dann ist $\ker\psi$ ein Untervektorbündel von E'.

Übungsaufgabe 8 (Stappen/Amann)**.** (i) Wiederholen Sie die Definition einer Liegruppe G (Def. A.1.1. im Skript) und Beispiele dazu (Bsp. A.1.2).

(ii) Berechnen Sie $T_{\mathrm{Id}_n} U(n)$.‡

(iii) Sei $\phi\colon G \to H$ ein Liegruppenhomomorphismus, d.h. ein Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen, der glatt ist. Zeigen Sie, dass die Tangentialabbildung konstanten Rang hat.

(iv) Folgern Sie aus (iii) ein Kriterium dafür, wann ein Liegruppenhomomorphismus schon ein Liegruppenisomorphismus ist.

---

*Es gibt auch den Begriff des holomorphen Bündels, dass ist ein komplexes Vektorbündel, dessen lokale Trivialisierungen biholomorphe Abbildungen sind bzw. äquivalent dazu, dessen Übergangsfunktionen holomorph sind. Die ist hier der Fall.

†Wir hatten (mittels der Clutchingfunktionen) in der Vorlesung die Bijektion $[S^1, \mathrm{Gl}_1(\mathbb{C})] \to \mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2)$. Die Abbildung $H\colon \mathrm{Gl}_1(\mathbb{C}) \times [0,1] \to S^1$, $a \mapsto (1 - t + t|a|^{-1})a$ gibt eine Homotopieäquivalenz von $\mathrm{Gl}_1(\mathbb{C})$ zu $S^1 = U(1)$. Also ist auch $[S^1, S^1] \to \mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2)$ eine Bijektion. Da S^1 zusammenhängend ist, ist $[S^1, S^1] = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und es sind genau die Vektorbündel aus der Aufgabe, da id_{S^1} der Erzeuger der $\pi_1(S^1)$ ist.

‡Es ist $U(n) := \{A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = \mathrm{Id}_n\}$, wobei A^* die adjungierte Matrix zu A ist, d.h. die Konjugierte der Transponierten.