Differentialgeometrie II
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 17/18

Übungsblatt 4

Übungsaufgabe 13 (Grom/Amann). (i) Sei $\pi\colon E \to M$ ein Geradenbündel (=Vektorbündel vom Rang 1). Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}(E)$ ein triviales Bündel ist.

(ii) Es gilt $\mathrm{Hom}(E, E' \oplus E'') \cong \mathrm{Hom}(E, E') \oplus \mathrm{Hom}(E, E'')$ für Vektorbündel E, E', E'' über M.

(iii) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon \cong \underbrace{\tau \oplus \ldots \oplus \tau}_{(n+1)\text{-mal}}$ gilt, wobei ϵ das triviale Bündel und τ das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{R}P^n$ ist.

Übungsaufgabe 14 (Fleig/Stappen). (i) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und x^i lokale Koordinaten auf $U \subset M$. Betrachten Sie $\flat\colon X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^\flat := g(X, .) \in \Omega^1(M)$ und die Umkehrabbildung $\sharp$. Bestimmen Sie die lokalen Darstellungen von $X^\flat$ und $\alpha^\sharp$ bzgl. der lokalen Darstellung von $X \in \mathfrak{X}(M)$ bzw. $\alpha \in \Omega^1(M)$ in den Koordinaten x^i.

(ii) Auf $\mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik haben wir zeitabhängige Vektorfelder $E(x,t)$ und $B(x,t)$ sowie zeitabhängige Skalare $\rho(x,t)$ und $j(x,t)$ (Die Zeitabhängigkeiten sind wie alles andere auch glatt.) Rechnen Sie nach, dass die Gleichungen auf der linken Seite äquivalent zu denen auf der rechten Seite sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} & \qquad * dE^\flat &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^\flat \\
\mathrm{div}B &= 0 & d(*B^\flat) &= 0 \\
\mathrm{rot}B &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j & * dB^\flat &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^\flat + \frac{4\pi}{c}j^\flat \\
\mathrm{div}E &= 4\pi\rho & d(*E^\flat) &= 4\pi\rho\,\mathrm{dvol}_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 15 (Beisitzer/Jeßberger). Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$.

(i) Zeigen Sie: Für jedes Intervall (a,b) um $0 \in \mathbb{R}$ mit $|b-a|$ klein genug, hat

$$\dot\gamma_x(t) = X(\gamma_x(t)),\ \gamma_x(0) = x$$

eine Lösung. Ist das Intervall maximal, so ist die Lösung eindeutig – das maximale Intervall, nennen wir (a_x, b_x).
Der *Fluss des Vektorfeldes* X ist definiert durch

$$\Phi\colon \Sigma_X = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times M \mid a_x < t < b_x\} \to M,\ \Phi_t(x) := \Phi(t,x) := \gamma_x(t).$$

Ist $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$, nennen wir das Vektorfeld X *vollständig*.

(ii) Ist X vollständig, dann ist $\Phi_t\colon M \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

(iii) Ist $x^2\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ vollständig?

(iv) Jedes beschränkte Vektorfeld auf einer vollständigen Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Übungsaufgabe 16 (Lenthe/Storch)**.** Sei $\pi\colon E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang r mit M kompakt.

(i) Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ für ein $r \leq m < \infty$, so dass es für alle $x \in M$ die Einschränkung $g|_{E_x}$ injektiv und linear ist.

Sei $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m) = \{r\text{-dimensionale Untervektorräume von } \mathbb{K}^m\}$ die Grassmannmannigfaltigkeit.[1] Dann ist $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}P^{m-1}$, für welches wir in Beispiel 1.2(iii) das kanonische/tautologische Geradenbündel τ kennengelernt haben. Analog kann man das tautologische Bündel über $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ definieren:

$$\gamma_r^m := \{(\ell, v) \in \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \mid v \in \ell\} \to \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m).$$

Das ist ein Vektorbündel vom Rang r - insbesondere ein Unterbündel von trivialen Faserbündel $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^n \to \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$. Weiterhin ist $q\colon (\ell, v) \in \gamma_r^m \mapsto v \in \mathbb{K}^m$ ein g wie aus (i).

(ii) Zeigen Sie: Gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist, dann ist qu ein g wie aus (i). Ist andersherum $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ wie in (i) gegeben, dann gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist und für den $g = qu$ gilt.

(iiii) Folgern Sie, dass für jedes $\mathbb{K}$-Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ vom Rang r eine Abbildung $f\colon M \to \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ gibt, so dass $f^*\gamma_r^m \cong E$ gilt.[2]

[1] Man kann $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ auch als Teilmenge von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ verstehen, nämlich $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m) = \{P \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \mid P^2 = P, P^T = P, \mathrm{Spur}(P) = k\}(= \{P$ ist Orthongonalprojektion auf einen k dimensionalen Untervektorraum$\})$. Dann ist $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ der Dimension $r(m-r)$.

[2] Warum ist das toll? Das ist ein wichtiges Resultat in der Differentialtopologie - für die Klassifikation von Vektorbündeln. Es sagt, dass jedes Vektorbündel als Pullback von diesen tautologischen Vektorbündeln mit geeignetem m aufgefasst werden kann. Man kann sich überlegen, dass man Einbettungen $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^{m+1}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^{m+2}) \hookrightarrow \ldots$ hat und $\gamma_r^{m-1}|_{\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)} \cong \gamma_r^m$ gilt. Damit kann man den direkten Limes der Grassmannschen $\mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^m)$ und der Bündel γ_r^m für $m \to \infty$ bilden und erhält ein *universelles Bündel* $\gamma_r^\infty \to \mathrm{Gr}_r(\mathbb{K}^\infty)$. Das ist nicht mehr ein Vektorbündel in unserem Sinne, da die Räume keine Mannigfaltigkeiten mehr sind, aber ansonsten verhält es sich ähnlich. Es heißt universell, weil nun (durch 'Weglassen' der Dimensionseinschränkung) jedes Vektorbündel als Pullback dieses universellen Bündels dargestellt werden kann.