Differentialgeometrie II
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 17/18

Übungsblatt 6

Übungsaufgabe 21 (Lenthe/ Beisitzer)**.** Sei $\phi\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(N)$. Der Pushforward $\phi_*\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ ist definiert durch $(\phi_* X)(p) := d_{\phi^{-1}(p)}\phi(X(\phi^{-1}(p)))$. Zeigen Sie:

(i) $(\phi_* X)(f) = X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$

(ii) $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$[1]

(iii) $\phi_*(fX) = (f \circ \phi^{-1})(\phi_* X)$

Übungsaufgabe 22 (Fleig/Storch)**.** Sei $f\colon N \to M$ glatt, $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E. Sei $s \in \Gamma_f(E)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

(i) Berechnen Sie die lokale Darstellung der Zusammenhangs- und Krümmungsformen von ∇^{f^*E} in Abhängigkeit derer von ∇^E.

(ii) Zeigen Sie, dass dann $R^{f^*E}(X, Y)s = R^E(f_* X, f_* Y)s$ gilt.

Übungsaufgabe 23 (Stappen/Amann)**.** (Krümmung mittels Paralleltransport) Sei $E \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇^E.

(i) Sei $c\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ stückweise glatt[2] und $c_s(t) := c(s,t)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 22.ii, dass für $\phi \in \Gamma_c(E)$ mit $\nabla^{c^*E}_{\partial_s}\phi(.,0) = 0$ und $\nabla^{c^*E}_{\partial_t}\phi(.,.) = 0$ gilt:

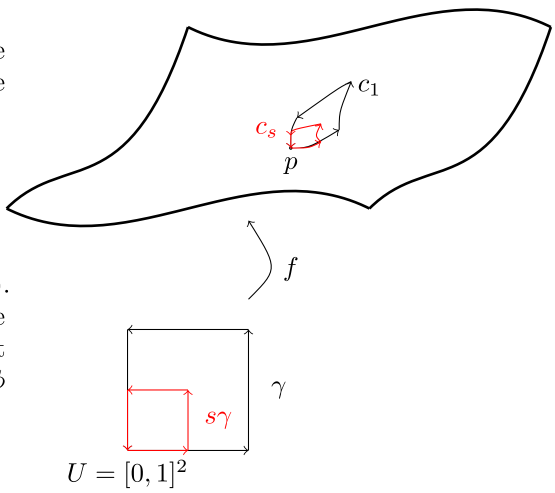
$$\nabla^{c^*E}_{\partial_s}\phi(s,1) = \int_0^1 R_{s,t}\phi(s,1)dt =: \left(\int_0^1 R_{s,t}dt\right)\phi(s,1),$$

wobei $R_{s,t} := \|^{c_s}_{t,1} \circ R^E(\partial_t c, \partial_s c) \circ \|^{c_s}_{1,t}$ ist. (Hinweis: Beginnen Sie mit der Berechnung von $R^E(\partial_t c, \partial_s c)$.)

Sei $p \in M$ und $f\colon U = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \to M$ eine glatte Abbildung mit $f(0) = p$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (4t, 0) & t \le 1/4 \\ (1, 4t-1) & 1/4 < t \le 1/2 \\ (3-4t, 1) & 1/2 < t \le 3/4 \\ (0, 3-4t) & 3/4 < t \end{cases}.$$

Wir setzen $c\colon [0,1]^2 \to M$, $c_s(t) = c(s,t) = f(s\gamma(t))$. Sei $\phi_0 \in E_p$. Für alle $s \in [0,1]$ sei $\phi(s,.)$ der horizontale Lift von ϕ_0 entlang c_s. Wegen der Differenzierbarkeit der Lösungen in Abhängigkeit der Anfangsdaten ist ϕ auch in s glatt.



Zeigen Sie,

[1] Für den Spezialfall $\phi = L_h\colon G \to G$ für eine Liegruppe G folgt daraus insbesondere, dass die Lieklammer linksinvarianter Vektorfelder wieder linksinvariant ist – also $\mathfrak{g}$ unter der Lieklammer abgeschlossen ist.

[2] c ist zwar nur stückweise glatt, aber Paralleltransport funktioniert noch genau so - man löst die Differentialgleichung auf den glatten Stück und klebt die dann einfach zusammen.

(ii) $\nabla^{c^*E}_{\partial_s}\phi(s,1) = \frac{\partial}{\partial s}\phi(s,1)$ und damit $\frac{\partial}{\partial s}\,\|^{c_s}_{1,u} = \left(\int_0^1 R_{s,t}dt\right)\|^{c_s}_{1,u}$ für alle $u \in [0,1]$.

(iii) $\frac{1}{4s}R_{s,t} \to R(\partial_x f, \partial_y f)$ für $s \to 0$ und uniform in t konvergiert.

(iv) $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\,\|^{c_s}_{1,0}\,\phi_0 = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial s^2}|_{s=0}\,\|^{c_s}_{1,0}\,\phi_0 = 2R(u,v)\phi_0$ mit $u = \partial_x f(0 \in \mathbb{R}^2)$, $v = \partial_y f(0)$.

Übungsaufgabe 24 (Jeßberger/Grom). (i) Zeigen Sie, dass für eine Liegruppe, das Tangentialbündel immer trivial ist. Folgern Sie daraus, dass S^2 keine Gruppenstruktur trägt, die es zu einer Liegruppe macht.

(ii) Sei $\psi\colon G_1 \to G_2$ ein Liegruppenhomomorphismus. Sei $\psi_*\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, $X \mapsto \psi_* X$, wobei $(\psi_* X)(g) := d_1 L_g(d_1\psi(X(1)))$ ist. Zeigen Sie, dass $\psi(\exp X) = \exp \psi_* X$ für alle $X \in \mathfrak{g}_1$. (Hinweis: Setzen Sie $\gamma(t) := \psi(\exp(tX))$. Dann reicht es $\dot\gamma(t) = \psi_* X(\gamma(t))$ nachzurechnen.)