Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 17/18

Übungsblatt 9 – Frohe Weihnachten!

Übungsaufgabe 33. [Storch/Fleig]

(i) Haben wir einen Zusammenhang Q auf einem G-Hauptfaserbündel $P \to M$ gegeben, definieren wir $\omega_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_pP$. Das definiert ein $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und sieht, dass $R_g^*\omega = \operatorname{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ für alle $g \in G$, d.h. $\omega_{p\cdot g}(d_pR_g(Z))) = \operatorname{Ad}(g^{-1})(\omega_p(Z))$ für alle $p \in P$ und $Z \in T_pP$, denn:
Ein $Z \in T_pP$ hat immer die Form $\tilde{X}(p) + Y$ mit $X \in \mathfrak{g}$ und $Y \in Q_pP$. Damit ist warum?

$$\begin{aligned}(R_g^*\omega)_p(Z = \tilde{X}(p) + Y) &= \omega_{p\cdot g}(d_pR_g(\tilde{X}(p) + Y)) \\ &= \omega_{p\cdot g}(\operatorname{Ad}\widetilde{(g^{-1})}X(p) + d_pR_g(Y)) \quad \text{da } d_pR_g(\tilde{X}(p)) = \operatorname{Ad}\widetilde{(g^{-1})}X(p) \text{ und } d_pR_g \text{ \_\_\_\_\_\_ warum?} \\ &= \operatorname{Ad}(g^{-1})X \quad \text{da \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ &= \operatorname{Ad}(g^{-1})\omega_p(Z).\end{aligned}$$

Ein Element $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, für welches $\omega(\tilde{X}) = X$, wobei $\bar{X}$ das fundamentale Vektorfeld zu $X \in \mathfrak{g}$ ist, und $R_g^*\omega = \operatorname{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$ gilt, nennt man *Zusammenhangsform* dem G-Hauptfaserbündel $\pi\colon P \to M$. Wir haben also oben aus einem Zusammenhang eine Zusammenhangseinsform konstruiert. Andersherum gehört zu einer Zusammenhangseinsform auch wieder einen Zusammenhang:

$$u \in P \mapsto Q_uP := \ker\, \omega_u$$

Wir wollen zeigen, dass diese Zuordnung wirklich einen Zusammenhang definiert:

$T_pP = Q_pP \oplus T_pP_{\pi(p)}$: Sei $Y \in Q_pP \cap T_pP_{\pi(p)}$. Dann ist Y der Wert eines fundamentalen Vektorfeldes, also $Y = \tilde{X}(p)$ für ein $X \in \mathfrak{g}$. Wegen $\omega(\tilde{X}) = X$ folgt damit $X = 0$ und damit auch $Y = 0$. Da ω_p nach Definition surjektiv ist, folgt aus ____________

Rechtsinvarianz: Ist $Y \in Q_pP$, dann ist $d_pR_g(Y) \in$ ____, denn:

$$\omega_{p\cdot g}(d_pR_g(Y)) = (R_g^*\omega)(Y) = \operatorname{Ad}(g^{-1})(\omega(Y)) = 0.$$

Glattheit: Sei $p \in P$, $x^1, \dots, x^n$ Koordinaten auf U um p und $a_1, \dots, a_k$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann hat $Y \in T_pP$ die Form $Y = Y^i\partial_{x^i}|_p$ für $Y^i \in$ __. Da ω glatt ist, gibt es $\omega_i^j \in C^\infty($____$)$ mit $\omega(\partial_{x^i}) = \omega_i^j a_j$. Damit ist $Y \in \ker\, \omega$ genau dann, wenn ______ $= 0$ für alle $j = 1, \dots, k$. Die Lösungen Y^i hängen glatt von p ab, weswegen $\ker\, \omega$ durch glatte Vektorfelder aufgespannt wird.

Damit folgt, dass obige Zuordnung wirklich ein Zusammenhang ist. Weiterhin sind beide Zuordnungen $Q \mapsto \omega$ und $\omega \mapsto Q = \ker \omega$ invers zueinander, da ____________

(ii) Sei $\Phi\colon G \times M \to M$ eine Rechtswirkung auf M, $x(t)$ eine Kurve in M mit $x(0) = x$ und $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = g$. Sei $z(t) = \Psi(g(t), x(t)) = x(t) \cdot g(t)$. Wir rechnen nach, dass

$$\dot{z}(0) = d_xR_g(\dot{x}(0)) + d_gL_{\widetilde{g^{-1}}(\dot{g}(0))}(x \cdot g)$$

gilt: Es ist $T_{(g,x)}(G \times M) \cong T_x M \underline{\qquad}$ und wir haben

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(g(t), x(t)) = d_{(g,x)}\Psi(\dot{g}(0), \dot{x}(0)) \\
&= d_{(g,x)}\Psi(\dot{g}(0), 0) + d_{(g,x)}\Psi(0, \dot{x}(0)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(\underline{\qquad}) + \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi(\underline{\qquad}) \\
&= d_g\Psi_x(\dot{g}(0)) + \underline{\qquad\qquad}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\tilde{X}(x \cdot g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\underline{\qquad\qquad\qquad}) = d_g\Psi_x\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(g \cdot \exp(tX)\right) = d_g\Psi_x(\underline{\qquad}).$$

Zusammen mit $X = \underline{\qquad\qquad} \in T_1G \cong \mathfrak{g}$ folgt $X(g) = \dot{g}(0)$ und damit zusammen mit (1) die Behauptung.

Übungsaufgabe 34. [Lenthe/Amann] Sei $E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang r mit Zusammenhang ∇^E und Krümmung F. Sei D wie in Definition I.2.44. Zeigen Sie, dass die erste Bianchi-Identität $DF = 0$ gilt. Was hat das bzw. hat das was mit der Bianchi-Identität für Krümmungen auf Hauptfaserbündeln und dem D dort, vgl. Abschnitt I.3.6, zu tun?

Übungsaufgabe 35. [Beisitzer/Jeßberger] Sei $E := P \times_\rho V$ ein zu G-Hauptfaserbündel P und zu $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}(V)$ assoziiertes Vektorbündel. Sei ω eine Zusammenhangseinsform auf P. Finden Sie eine Zuordnung 'Zusammenhang auf P'$\mapsto$ 'Zusammenhang auf E', die im Falle von $P = \mathrm{GL}(E)$ invers zu unserer Konstruktion von Abschnitt I.3.5.1 ist. Ist die Zuordnung immer bijektiv?

Übungsaufgabe 36. [Grom/Stappen]

(i) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und ϕ_t der Fluss von X, d.h. $X(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \phi_t(x))$. Wir zeigen, dass

$$[X, Y](x \in M) = \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\phi_t(x)}\phi_{-t}(Y(\phi_t(x))).$$

Beweis. Taylorentwicklung ergibt $f \circ \phi_t(x) = f(x) + th_t(x)$ mit $h_0(x) = \underline{\qquad\qquad}$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\underline{\quad}}(f \circ \phi_{-t})(Y(\phi_t(x))) &= \lim_{t\to 0} \frac{d_{\underline{\quad}}(f \circ \phi_{-t})(Y(\phi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{d_{\underline{\quad}} f(Y(\phi_t(x))) - d_x f(Y(x))}{t} - d_{\underline{\quad}}\underline{\quad}(Y(\phi_t(x)))\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{Y(f)\circ\phi_t - Y(f)}{t} - Y(\underline{\quad}) \circ \underline{\quad}\right)(x) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} Y(f)\circ\phi_t(x) - Y(h_0(x)) = \left(X(Y(f)) - \underline{\qquad\quad}\right)(x) \\
&= [X, Y](f)(x).
\end{aligned}$$

warum?

$\square$

(ii) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und ϕ_t der Fluss von X. Sei $\psi\colon M \to N$. Dann ist $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ der Fluss von $\psi_* X$ und wir haben mit Übungsaufgabe 21.i

warum?

$$\begin{aligned}
[\psi_* X, \psi_* Y](f) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\underline{\qquad\qquad}}(f \circ \psi \circ \phi_{-t} \circ \psi^{-1})((\underline{\quad})(\phi_t(\psi^{-1}(x)))) \\
&= ((\underline{\quad})(f \circ \psi \circ \phi_{-t} \circ \psi^{-1}))\,(\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}(x)) \\
&= (Y(f \circ \psi \circ \phi_{-t}))\,(\phi_t(\psi^{-1}(x))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\underline{\qquad\qquad}}(f \circ \psi \circ \phi_{-t})(Y(\phi_t(\psi^{-1}(x)))) \\
&= (\psi_*[X, Y])(f).
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für einen Liealgebrenhomomorphismus $\lambda\colon G \to H$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$ zeigt: $[\lambda_* X, \lambda_* Y] = \lambda_*[X, Y]$ mit λ_* wie in Lemma A.1.18

(iii) Sei $P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel mit gegebenem Zusammenhang. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $Y = \mathrm{hor}(Y) \in \mathfrak{X}(P)$. Dann ist $[\tilde{X}, Y]$ auch ein horizontales Vektorfeld.

Beweis. Der Fluss von $\tilde{X}$ ist durch $\phi_t(p) = p \cdot \exp(tX)$ gegeben. Nach (i) ist dann warum?

$$
\begin{aligned}
[\tilde{X}, Y](p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d_{\phi_t(p)}\phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{d_{p\cdot\exp(tX)} R_{\exp}\underline{\hspace{2em}}(Y(p \cdot \exp(tX)))}_{=:\gamma(t)}
\end{aligned}
$$

Da Y horizontal ist und für den Zusammenhang $d_p R_g(Q_p P) = \underline{\hspace{3em}}$ gilt, ist $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(t) \in \underline{\hspace{5em}}$ und damit $[\tilde{X}, Y]$ selbst horizontal. $\square$