Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 11

Übungsaufgabe 41. [Fleig/Amann]

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sigma_\ell(P)(x,\xi)z = \frac{\mathrm{i}^\ell}{\ell!} P(f^\ell u)|_x,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 0$ und $d_x f = \xi$ sowie $u \in \Gamma(E)$ mit $u(x) = z$ ist und berechnen Sie das Hauptsymbol der äußeren Ableitung $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

(ii) Rechnen Sie folgende Formeln für den formalen adjungierten Operator $\delta := \delta^\dagger$ bzgl. einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) nach:

- $\delta = (-1)^{km-1} * d*$ (Benutzen Sie, dass $\int_M d\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Omega_c^{m+1}(M) := \Gamma_c(\Lambda^{m+1}M)$ gilt (Satz von Stokes)).
- In geodätischen Normalkoordinaten x^i um p gilt im Punkt p die Formel $\delta\alpha = -\iota_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha$, wobei $e_i = \partial_{x^i}|_p$ und ∇ der vom Levi-Civita Zusammenhang induzierte Zusammenhang ist. (Hierbei ist ι das innere Produkt, welches durch $(\iota_X\alpha)(X_1,\ldots,X_{k-1}) = \alpha(X,X_1,\ldots,X_{k-1})$ für alle $X, X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$ definiert ist, vgl. Tabelle I.2.

Übungsaufgabe 42. [Lenthe/Storch] Sei T^2 der zweidimensionale Torus, aufgefasst als $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ mit identifizierten Seiten und ausgestattet mit flacher Metrik $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$.

(i) Benutzen Sie Fourierreihen um zu sehen, für welche $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Laplacegleichung $\Delta u = f$ eine Lösung besitzt.

(ii) Probieren Sie den gleichen Ansatz für $(-\partial^2_{x^1} + \partial^2_{x^2})u = f$ aus.

(iii) Was sind die Eigenwerte λ und zugehörigen Eigenfunktionen u_λ von Δ auf T^2, d.h. für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es ein $u_\lambda \in C^\infty(T^2)$ mit $\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda$?

(iv) Lösen Sie die Wärmegleichung unter Nutzung des Ansatzes $u(x,t) = \sum a_j(t)u_j(x)$ (für u_j Eigenfunktionen von ∇) und schreiben Sie diese als $u(x,t) = \int_{T^2} H(x,y,t)f(y)dy$ für geeignetes H. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Übungsaufgabe 43. [Beisitzer/Jeßberger]

(i) Der Laplaceoperator Δ einer (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) sei der Operator Δ dessen Wert Δu für $u \in C^\infty(M)$ durch

$$\int_M g(du, d\phi)\mathrm{dvol}_g = -\int_M \phi\Delta u \mathrm{dvol}_g$$

für alle $\phi \in C_c^\infty(M)$ definiert ist. Berechnen Sie den Laplaceoperator in lokalen Koordinaten.

(ii) Überprüfen Sie, dass der Zusammenhang $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ eines Vektorbündels $E \to M$ ein Differentialoperator erster Ordnung ist und bestimmen Sie auch hier das Hauptsymbol. Sei $E \to M$ über (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) mit Bündelmetrik $\langle .,. \rangle$ und Zusammenhang $\nabla^E\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$. Berechnen Sie die lokale Darstellung von $(\nabla^E)^\dagger\colon \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$ und $(\nabla^E)^\dagger\nabla^E$.

Übungsaufgabe 44. [Grom/Stappen] Zeigen Sie, dass es für jeden skalare Differentialoperator $P\colon C^\infty(M,\mathbb{R})$ erster Ordnung ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gibt, so dass $Pu = X(u) + fu$ für alle $u \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt.