Differentialgeometrie II
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 17/18

Übungsblatt 13

Übungsaufgabe 49. Sei (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass durch $\mathrm{cl}(\omega) = \omega \wedge . - \iota_{\omega^\sharp}.$ für $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ eine Cliffordmultiplikation gegeben ist und diese $\Lambda^* M := \oplus_{k=0}^m \Lambda^k M$ mit der induzierten Bündelmetrik und dem induzierten Zusammenhang zu einem Clifforbündel macht für welches der de-Rham Operator aus Beispiel II.3.32 der zugehörige Diracoperator ist.

Übungsaufgabe 50. Zeigen Sie, dass $\tau\colon a \in \Lambda^2(V) \mapsto (v \mapsto [a, v] := \mathfrak{c}(a)\mathrm{cl}(v) - \mathrm{cl}(v)\mathfrak{c}(a)) \in \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Cl}(V))$ ein Isomorphismus aufs Bild $\mathfrak{o}(V) \subset \mathrm{Hom}(V, V) \subset \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Cl}(V))$ ist.

Übungsaufgabe 51.
(i) Zeigen Sie, dass $C^2(V) := \mathfrak{c}(\Lambda^2 V) \subset C(V)$ ist unter der Lieklammer von $C(V)$ abgeschlossen ist.

(ii) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei $A \in \Lambda^2 \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis e_i von V gibt, so dass $A = \sum_{j=1}^{[n/2]} a_j e_{2j-1} \wedge e_{2j}$ ist. Berechnen Sie $\exp_C \mathfrak{c}(A)$.

Übungsaufgabe 52. Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein Diracbündel. Sei D der zugehörige Diracoperator. Dann hat nach Satz II.3.26 D^2 eine Basis aus orthonormalen Eigenfunktionen ϕ_j zu Eigenwerten λ_j. Wir setzen $\psi_j := D\phi_j$. Zeigen Sie, dass dann

(i) $\ker D = \ker D^2$ gilt.

(ii) $D(v_j^\pm := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j \pm \phi_j) = \pm\sqrt{\lambda_j} v_j^\pm$ für $\lambda_j \neq 0$ gilt.

(iii) Es gilt $D^2 \psi_j = \lambda_j \psi_j$.

(iv) Finden Sie mittels (i)-(iii) eine Basis von $L^2(E)$ aus orthonormalen Eigenfunktionen von D.