Differentialgeometrie Maximilian Gerhards, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 16/17

Präsenzübungsblatt

In diesem Blatt soll es um die Wiederholung und Anschauung des Satzes über implizite Funktionen (und des Satzes zur lokalen Umkehrbarkeit) gehen.

Aufgabe. Wiederholen Sie den Satz über implizite Funktionen und den Satz zur lokalen Umkehrbarkeit (nächste Seite). Sie besagen jeweils, dass das Determinantenkriterium hinreichend ist. Es ist aber nicht notwendig. Zeigen Sie dies, indem Sie ein Beispiel $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden.

Aufgabe. (Am Beispiel) Sei eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n=m+k} \to \mathbb{R}^k$ gegeben:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x^1, x^2)^T \mapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x^1, x^2, x^3)^T \mapsto \big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, x^1 - x^3\big)^T$

Lösen Sie für jede dieser Funktionen die folgenden Aufgaben:

(i) Skizzieren Sie die Menge $S := f^{-1}(0 \in \mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Finden Sie einen Punkt $x_0 = (a, b) \in S$ mit $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^k$, so dass es eine offene Umgebung von $U \subset \mathbb{R}^m$ von a und eine glatte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$ und $f(u, g(u)) = 0$ für all $u \in U$ gibt. Geben Sie für Ihr Beispiel auch U und g explizit an.

(iii) Finden Sie einen Punkt $x_0 \in S$, für den (ii) nicht möglich ist.

(iv) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrix

$$D_x f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x)\right)_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x^2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x^2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f_k}{\partial x^2}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

wobei $x = (x^1, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ mit $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.

(v) Bestimmen Sie die Determinante von $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x)\right)_{1\leq i\leq k, m+1\leq j\leq n}$ für x jeweils gleich Ihrem x_0 aus (ii) und (iii).

Aufgabe. (Die LinAlg-Version vom implizite Funktionensatz) Sei $f\colon \mathbb{R}^{n=m+k} \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, also gegeben durch $f(x) = Ax$, bzw. $f(x = (x^1, \dots, x^m)^T) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$ mit $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x^j$ und $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq k, 1\leq k\leq n}$.
Wir zerlegen: $A = (A_1, A_2)$ wobei A_2 eine $k \times k$-Matrix ist. Dann ist $f(\underbrace{x^1, \dots, x^m}_{=:u}, \underbrace{x^{m+1}, \dots, x^n}_{=:v}) = A_1 u + A_2 v$

(i) Berechnen Sie $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x)\right)_{1\leq i\leq k, m+1\leq j\leq n}$.

(ii) Bestimmen Sie, sofern existent, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ mit $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$.

Satz über implizite Funktionen. Sei $f\colon V \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ glatt ($n = m + k$). Sei $(a, b) \in V$ mit $f(a, b) = 0$. Weiterhin sei

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a, b) \right)_{1 \le i \le k, m+1 \le j \le n} \neq 0.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von (a, b), eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$ und eine glatte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ mit $g(a) = b$, so dass $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

Satz über die lokale Umkehrbarkeit = Umkehrsatz. Seien $O, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p_0 \in O$. Sei $f\colon O \to V$ glatt und sei $D_{p_0} f$ invertierbar ($\cong \det D_{p_0} f \neq 0$). Dann gibt es eine Umgebung $U \subset O$ von p_0 und eine Umgebung U' von $q_0 = f(p_0)$, so dass $f\colon U \to U'$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $D_{f(p)}(f^{-1}) = (D_p f)^{-1}$ für $p \in U$.

Dieses Blatt wird in der ersten Übung besprochen.