Differentialgeometrie Maximilian Gerhards, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 16/17

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (1.5+1.5+2)**.** Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten? Begründen Sie und geben Sie ggf. lokale Parametrisierungen an. Skizzieren Sie die Mengen (Wählen Sie ggf. $m = 2$).

(i) $S^m = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = 1\}$

(ii) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$

(iii) $G = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^{m+1} = f(x^1, \dots, x^m)\}$ für eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3+2)**.** (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

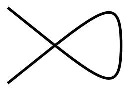
(ii) Zeigen Sie mittels des Kriteriums vom regulären Wert, dass

$$T^n = \left\{ \left(x^1, x^2, \dots, x^{2n-1}, x^{2n}\right) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \ldots = (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1 \right\}$$

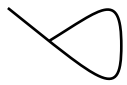
eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

Aufgabe 3 (2+2+1+2*)**.** Sei $c\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ glatt (Man nennt c dann eine (glatte) *parametrisierte Kurve* im $\mathbb{R}^n$. Entscheiden Sie in welchen Fällen, die *Spur* der Kurve ($=$ Bild(c)) eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Begründen Sie.

(i) Sei $n = 2$ und die Spur von c sei:



(ii) Sei $n = 2$ und die Spur von c sei:



wobei das Bild so verstehen ist, dass c injektiv ist, aber $\lim_{t \to b} c(t) = c(s)$ für ein $s \in (a, b)$ ist.

(iii) Sei c ein Homöomorphismus aufs Bild und sei c *regulär* (d.h. $|c'(t)| \neq 0$ für alle $t \in I$).

(iv*) Sei $I = \mathbb{R}$ und sei c eine reguläre periodische[0] Kurve, die eine einfach geschlossene [1] Kurve parametrisiert.

---

*=Zusatzaufgabe

[0]periodisch = Es gibt ein $a > 0$, so dass $c(t + a) = c(t)$ für alle t ist (a heißt *Periode* von c).

[1]Sei c periodisch und sei a_0 die kleinste Periode von c. Dann heißt c *einfach geschlossen*, falls $c|_{[t, t+a_0)}$ für alle t injektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere Teilmenge. Wir setzen

$$\mathcal{T} = \{V \cap M \mid V \text{ ist offene Teilmenge von } \mathbb{R}^m\}.$$

Zeigen Sie, dass $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist, siehe Definition unten.

Definition. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$ (die leere und die gesamte Menge liegen in $\mathcal{T}$)

(ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder eine offene Menge.

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder eine offene Menge.

$(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*. Elemente in $\mathcal{T}$ nennt man *offene Mengen* in X.

Beispiel. Die Familie aller offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ ('offen' hier wie in Analyis definiert) liefert eine Topologie auf $\mathbb{R}^m$ - die sogenannte *Standardtopologie* des $\mathbb{R}^m$. Das ist das Standardbeispiel nach dem der Topologiebegriff gebaut wurde, und deshalb heißen Elemente einer allgemeinen Topologie auch offene Mengen.

Abgabe am Donnerstag 27.10.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen