Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (3+1+1)**.** Seien $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ und $Z \subset \mathbb{R}^\ell$ beliebige Teilmengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ glatt.

(i) Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon X \to Z$ glatt ist.

(ii) Ist $\mathrm{id}\colon X \to X$ eine glatte Abbildung? Begründen Sie.

(iii) Sei $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x,y)^T \mapsto \begin{cases} \frac{1-y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ist f glatt? Begründen Sie.

Aufgabe 6 (2+1,5+1,5)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, seien $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeiten $M_h = \mathrm{Graph}(h)$ und $M_g = \mathrm{Graph}(g)$. Sei $f\colon M_h \to M_g$ gegeben durch

$$(u, h(u))^T \mapsto (u, g(u))^T.$$

(i) Zeigen Sie einmal mittels der Definition und einmal mittels der zweiten Bedingung in Folgerung ? aus der Vorlesung, dass f glatt ist.

(ii) Berechnen Sie $T_pM_h \subset \mathbb{R}^3$ für $p \in M_h$ und geben Sie explizit eine Basis an.

(iii) Berechnen Sie d_pf in der Basis aus (ii) für T_pM_h und T_pM_g.

Aufgabe 7. (2,5+2,5) Sei $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Wir definieren die *Hamiltonsche Funktion* (=kinetische + potentielle Energie) durch

$$H\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ H(x,y) := \frac{1}{2}|y|^2 + V(x).$$

Zeigen Sie:

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein regulärer Wert von H, wenn es ein regulärer Wert von V ist.

(ii) Sei c regulärer Wert von H und $(x,y) \in M := H^{-1}(c)$. Dann gilt

$$T_{(x,y)}M = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla V(x), \xi \rangle + \langle y, \eta \rangle = 0\},$$

wobei $\nabla V := \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x^n}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der *Gradient* von V ist.

Aufgabe 8 (3+2)**.** Sei $K_n := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = (x^{n+1})^2, x^{n+1} \geq 0\}$ für

(i) $n = 1$

(ii) $n = 2$.

Skizzieren Sie K_n und zeigen Sie, dass K_n keine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Abgabe am Donnerstag 03.11.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen