Übungsblatt 3

Aufgabe 9. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. Sei $p \in M$ und seien $F\colon U \to V$ bzw. $\tilde{F}\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ lokale Parametrisierungen um p bzw. $f(p)$. Seien $a_i^j \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$d_p f\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)\right) = \sum_j a_i^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}_0) \in T_{\tilde{p}=f(p)}N$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann in lokalen Koordinaten

$$D_{u_0}(\tilde{F}^{-1} \circ f \circ F)(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$$

gilt, s. Bemerkung 2.20.c.

Aufgabe 10. (2+1,5+1,5) Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und nicht die Nullmatrix. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = x^T A x$.

(i) Zeigen Sie, dass $M = f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Berechnen Sie $T_x M$ für die M aus (i).

(iii) Wenden Sie (i) und (ii) auf
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = c\}$$
an.

Aufgabe 11. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n=m+1}$ eine Hyperfläche. Zeigen Sie: M^m ist genau dann orientierbar, falls es lokale Parametrisierungen $F_i\colon U_i \to V_i$ von M gibt, die M überdecken (d.h. es gilt $M \subseteq \cup_i V_i$) und für alle i, j und $p \in V_i \cap V_j \cap M$ ist $\det D_{F_i^{-1}(p)}(F_j^{-1} \circ F_i) > 0$.[1]
(Hinweis: Erweitern Sie $\frac{\partial F_i}{\partial u^i}(u)$ mittels eines Einheitsnormalenvektors $\nu_i(p = F(u))$ zu einer positiv orientierten Basis und diskutieren Sie, wann $\nu_i(p) = \nu_j(p)$ ist.)

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass jede Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ versehen mit der vom $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Abgabe am Donnerstag 10.11.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen

[1] Während wir Orientierbarkeit nur für Hyperflächen definiert haben, kann man dieses Kriterium als Definition verwenden und so den Begriff der Orientierbarkeit für Untermannigfaltigkeiten beliebiger Kodimension bzw. abstrakte Mannigfaltigkeiten (mit Karten κ statt lokaler Parametrisierung) verallgemeinern.