Maximilian Gerhards, Nadine Große
WS 16/17

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass der Torus $S^1 \times S^1 = \{(\cos\phi, \sin\phi, \cos\psi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^4 \mid \phi, \psi \in \mathbb{R}^4\}$ diffeomorph zum Rotationstorus

$$\mathbb{T}^2 = \{((2+\cos\phi)\cos\psi, (2+\cos\phi)\sin\psi, \sin\phi)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \phi, \psi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

ist.

Aufgabe 14. (2+1+2) Sei $M := ([-1,1] \times \{-1\}) \cup ([-1,1] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times [-1,1]) \cup (\{1\} \times [-1,1]) \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu S^1 ist. Folgern Sie daraus, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie.

(iii) Zeigen Sie, dass M für geeignete Wahl der Karten eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 15. (3+2) Sei $X = [0,1]$. Wir identifizieren $0 \sim 1$ und betrachten, die sich dadurch ergebene Äquivalenzrelation. Setze $Y = X/\sim$.

(i) Zeigen Sie, dass Y eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass Y diffeomorph zu S^1 ist.

Aufgabe 16. (2,5+2,5) Bearbeiten Sie mindestens <u>zwei</u> der folgenden Teilaufgaben: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Sei Z eine beliebige Menge.

(i) Sei $q\colon X \to Z$ surjektiv. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{T}' = \{U \subset Z \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ eine Topologie auf Z ist. Benötigt man die Surjektivität? Begründen Sie.

(ii) $U \subset X$ ist genau dann kompakt als Teilmenge in X[1], wenn es kompakt bezüglich der durch $\mathcal{T}_X$ auf U induzierten Topologie ist.

(iii) Ist $U \subset X$ kompakt, so ist auch $f(U) \subset Y$ kompakt.

(iv) Sei X kompakt, sei Y Hausdorffsch und sei f bijektiv. Dann ist f bereits ein Homoömorphismus.

(v) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann hausdorffsch, wenn $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{T}, x \in U} \bar{U}$ für alle $x \in X$ gilt.

Abgabe am Donnerstag 17.11.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen

[1] $U \subset X$ ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von U eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., für alle $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_X$ mit $\cup_{U \in \mathcal{U}} U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ mit $\cup_{U \in \mathcal{V}} U = X$.