Übungsblatt 5

Aufgabe 17. Sei $M=\mathbb{R}^2$. Sei $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0)^T \mid a\geq 0\}$, $V=(0,\infty)\times(0,2\pi)$. Dann definiert $\kappa^{-1}(r,\phi):=(r\cos\phi, r\sin\phi)^T$ eine Karte $\kappa\colon U\to V$ von M (Polarkoordinaten). Desweiteren betrachten wir die Karte $\kappa'=\mathrm{id}\colon (x,y)^T\in\mathbb{R}^2\to(x,y)^T\in\mathbb{R}^2$ auf M. Auf U betrachten wir die Vektorfelder $X:=r\frac{\partial}{\partial r}$ und $Y:=\frac{\partial}{\partial\phi}$. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von X und Y bzgl. der Karte κ' und skizzieren Sie die Vektorfelder.

Aufgabe 18 (2+3)**.** Sei $f\colon M^m\to N^n$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

(i) Zeigen Sie, dass d_pf eine glatte Abbildung ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$df\colon TM\to TN,\ (p,v)\mapsto(f(p),d_pf(v))$$

glatt ist.

Aufgabe 19. (2+3) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(i) Ist M kompakt, dann ist $f\colon M\to N$ genau dann eine Einbettung, wenn f eine injektive Immersion ist.

Das stimmt nicht, wenn M nichtkompakt ist, siehe Übungsaufgabe 3(ii).

(ii) Eine Abbildung heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Teilmengen wieder kompakt sind. Zeigen Sie, dass jede eigentliche injektive Immersion eine Einbettung ist.

Definition. Eine Gruppe G heißt *Liegruppe*, falls G eine glatte Mannigfaltigkeit ist, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned} G\times G\to G, &\quad (g,h)\mapsto gh\\ G\to G, &\quad g\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

glatt sind.

Aufgabe 20 (1+2+2)**.** (i) Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ wieder eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ mit gleicher Kodimension ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $GL(n):=\{A\in M_{\mathbb{R}}(n\times n)\mid \det A\neq 0\}\subset M_{\mathbb{R}}(n\times n)\cong\mathbb{R}^{n^2}$ eine Liegruppe ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $O(n)\subset GL(n)$ und $SO(n)\subset GL(n)$ Liegruppen sind.
(Hinweis: Für das Nachweisen der Glattheit der Abbildungen in der Liegruppendefinition am besten die Fortsetzungsbedingung (siehe Bedingung 1 in Folgerung I.2.12) statt die Karten nutzen.)

Abgabe am Donnerstag 24.11.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen