Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (1+2+2)**.** (Christoffelsymbole der $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik) Wir betrachten die lokale Parametrisierung

$$(\phi, \psi)^T \mapsto (\cos\phi\cos\psi, \cos\phi\sin\psi, \sin\phi)^T \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Berechnen Sie die induzierte Metrik in diesen Koordinaten (Zum Vergleich: $g = (d\phi)^2 + \cos^2\phi(d\psi)^2$).

(ii) Berechnen Sie die Christoffelsymbole bzgl. dieser Koordinaten und stellen Sie die Geodätengleichung $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$ in diesen Koordinaten auf.

(iii) Berechnen Sie noch einmal die Geodätengleichung, dieses Mal mittels der Lagrangegleichung (II.5).

Aufgabe 26 (1,5+(1+0,5+2))**.** (i) Sei M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Sei $c\colon t \in (-\epsilon, \epsilon) \to c(t) \in V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung. Berechnen Sie $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}$ (hierbei ist $\frac{\partial}{\partial t} := \frac{\partial c}{\partial t}$). Sei zusätzlich c derart, dass $\|\dot c(t)\| = 1$ für alle t ist[1]. Zeigen Sie, dass dann $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ist.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $M = \mathrm{graph(f)} \subset \mathbb{R}^3$. Sei g die induzierte Metrik auf M. Wir betrachten die Parametrisierung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2)^T \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))^T$.

(a) Berechnen Sie g_{ij} in den Koordinaten x^i.

(b) Berechnen Sie das Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(c) Zerlegen Sie $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}(x) \left(= \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x)\right)$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\frac{\partial F}{\partial x^1}(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x^2}(x)$ und $\nu(x)$.

Aufgabe 27. Zeigen Sie, dass die Lagrangegleichung (II.5) äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (II.6) ist.

Aufgabe 28 (3+2)**.** (Teilchen im 2D-Zentralkraftfeld) Eine große Masse m_2 befinde sich fest im Ursprung von $\mathbb{R}^2$ und übt auf eine kleine Masse m_1 eine Kraft $F = -\nabla V$ mit $V = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$ aus, wobei γ die Gravitationskonstante und r der Abstand zum Ursprung ist. Hier ist die Bewegung von m_1 nicht a priori eingeschränkt, d.h. es gilt $M = \mathbb{R}^2$.

(i) Benutzen Sie Polarkoordinaten (r, ϕ) und berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse und die Hamiltonfunktion.

(ii) Berechnen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Was folgt für p_ϕ? .

Abgabe am Donnerstag 08.12.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen

[1] Da c lokale Parametrisierung ist, ist $\dot c(t) \neq 0$ für alle t. Also ist c eine reguläre Kurve und es gibt immer eine Umparametrisierung, so dass $\|\dot c\| = 1$ ist.