Übungsblatt 8

Aufgabe 29 (2+(1+2))**.** Es sei der Rotationstorus gegeben:

$$\{F(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u,v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(i) $F|_{u,v\in(0,2\pi)}$ ist ein lokale Parametrisierung. Berechnen Sie die Geodätengleichung in diesen Koordinaten.

(ii) Bestimmen Sie, welche der Koordinatenlinien $u = const$ bzw. $v = const$ Geodätische sind.
 (a) Einmal mittels der in (i) aufgestellten Geodätengleichung.
 (b) Einmal mittels des Geodätenkriteriums für Hyperflächen, vgl. (II.7) im Skript.

Aufgabe 30 (1+1,5+1+1,5)**.** (Schwarzschild-Außenraum) Sei $M := \mathbb{R}\times(2m,\infty)$, $g := -h(r)(dt)^2 + \frac{1}{h(r)}(dr)^2$, wobei $h(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ und $m > 0$ ist.

(i) Skizzieren Sie die Lichtkegel in Abhängigkeit des Punktes auf M, also für $p \in M$ die Menge $C_p := \{v \in T_pM \mid g_p(v,v) = 0\}$.

(ii) Berechnen Sie die Geodätengleichung.

(iii) Sei $c(s)$ eine Geodäte, so dass $c'(0)$ lichtartig ist, d.h. $g_{c(0)}(c'(0), c'(0)) = 0$. In Koordinaten sei c gegeben durch $c(s) = (t(s), r(s))$. Zeigen Sie, dass dann $r'(s)^2 = h^2(r)t'(s)^2$ für alle s gilt.

(iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass für lichtartige Geodäten $r' = const = c$ und $t'(s)^2 = \frac{c^2(r(0)+sc)^2}{(r(0)+sc-2m)^2}$ gilt. Bestimmen Sie $c(s)$ und zeichnen Sie die Lösungen qualitativ in M ein.

Definition. Eine *Derivation* δ auf M ist eine lineare Abbildung $\delta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, welche die Produktregel $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$ erfüllt.

Aufgabe 31 (1+1+(1+2))**.** (i) Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass $\delta_X\colon f \in C^\infty(M) \mapsto X(f) = df(X) \in C^\infty(M)$ eine Derivation ist.

(ii) Sei $\kappa\colon U \to V$ eine Karte von M mit Koordinatenfunktionen x^i und $\delta\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ eine Derivation auf U. Sei $a^i := \delta(x^i)$. Zeigen Sie, dass $\delta = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt.

(iii) Sei nun $\{\kappa_i\colon U_i \to V_i\}$ ein Atlas von M mit untergeordneter Zerlegung der Eins $\rho_i\colon M \to \mathbb{R}$. Sei δ eine Derivation auf M.
 (a) Zeigen Sie, dass $\rho_i\delta$ für jedes i eine Derivation auf M und die Einschränkung $\rho_i|_{U_i}\delta|_{C^\infty(U_i)}$ eine Derivation auf U_i ist.
 (b) Zeigen Sie, dass es für δ genau ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gibt, so dass $\delta = \delta_X$ gilt.

Alles in allem haben Sie dann gezeigt, dass $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ = Menge der Derivationen auf M, $X \mapsto \delta_X$, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 32 (4+1)**.** Seien (M,g), (N,h) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir schreiben $f_*X := df(X)$ (=*Push-Forward* des Vektorfeldes X), d.h. $(f^*(X))(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$. Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf (M,g) und $\overline{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf (N,h).

(i) Zeigen Sie, dass $f_*(\nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ genau dann für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt, wenn ∇ auch der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik f^*h ist.

(ii) Seien die Levi-Civita-Zusammenhänge zu zwei Metriken g und $\hat{g}$ auf M gleich. Folgt daraus schon, dass $g = \hat{g}$ ist? Begründen Sie.

Abgabe am Donnerstag 15.12.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen