Differentialgeometrie Maximilian Gerhards, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 16/17

Übungsblatt 9

Aufgabe 33 (4+1)**.** Seien (M,g) und (N,h) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $(M\times N, g+h)$. Sei ∇^g, ∇^h bzw. ∇^{g+h} jeweils der Levi-Civita Zusammenhang auf M, N bzw. $M\times N$. Sei $X,Z\in\mathcal{X}(M)$ und $Y,W\in\mathcal{X}(N)$. Dann ist $(X,Y)\in\mathcal{X}(M\times N)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\nabla^{g+h}_{(X,Y)}(Z,W)=(\nabla^g_X Z, \nabla^h_Y W)$ gilt.

(ii) Sei $c(t)=(c_M(t),c_N(t))$ eine Kurve in $M\times N$. Folgern Sie mittels (i), dass c genau dann Geodätische in $M\times N$ ist, falls $c_M(t)$ eine Geodätische in M und $c_N(t)$ eine Geodätische in N ist.[1]

Aufgabe 34 (1,5+1,5+2)**.** Wir betrachten $G=GL(1,\mathbb{R})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als Liegruppe.

(i) Zeigen Sie, dass $g_x(v,w)=\frac{vw}{x^2}$ eine Riemannsche Metrik auf G definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass dieses g *biinvariant* ist, d.h. $g_{L_h(x)}(d_xL_h(v),d_xL_h(w))=g_{R_h(x)}(d_xR_h(v),d_xR_h(w))=g_x(v,w)$ für alle $x\in G$, $v,w\in T_xG$, wobei $L_h\colon G\to G$, $x\mapsto hx$ bzw. $R_h\colon G\to G$, $x\mapsto xh$ ist. (Hinweis: ÜA 24)

(iii) Berechnen Sie die Geodätischen. (Hinweis: Verwenden Sie, dass die Hamiltonfunktion erhalten bleibt.)

Aufgabe 35. (2+2+1+1*)

(i) Sei $(M=\mathbb{R}^n, <.,.>_L)$ der Minkowskiraum. Für $p,q\in M$ definieren wir

$$\hat{d}(p,q)=\inf\{L(c)\mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale }^2\text{ Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Infimum der leeren Menge ∞ setzen. Zeigen Sie, dass $\hat{d}$ nur die Werte 0 und ∞ annimmt.

(ii) Wir definieren für Lorentzsche Mannigfaltigkeiten den Lorentzschen Abstand

$$d(p,q)=\sup\{L(c)\mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale zukunftsgerichtete Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Supremum der leeren Menge 0 setzen. Wir betrachten die Lorentzmannigfaltigkeit $(M=S^1\times\mathbb{R}, g)$ mit $g=d\phi^2-dt^2$, wobei $(\phi,t)\mapsto(\sin\phi,\cos\phi,t)\in M$ Koordinaten auf M sind. Welche Punkte auf M kann man von $(0,0)$ durch glatte kausale Kurven erreichen? Bestimmen Sie zu allen diesen Punkten den Lorentzschen Abstand.

(iii) Finden Sie ein Beispiel einer Lorentzmannigfaltigkeit (M,g) mit $d(p,p)=\infty$ für alle Punkte $p\in M$.

(iv*) Was hat (i) mit dem Zwillingsparadoxon zu tun?

Aufgabe 36. (3+2)

(i) Sei U eine offene Teilmenge einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m,g) um $p\in M$. Zeigen Sie, dass es ein $C>0$ gibt, so dass für jede Kurve c von p zu einem Punkt $q\notin U$ gilt, dass $L(c)>C$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie eine Karte $\kappa\colon U'\subset U\to B_r(0)$ um p ($\kappa(p)=0$).)

(ii) Sei (M,g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $d\colon M\times M\to\mathbb{R}$ die zugehörige Riemannsche Abstandsfunktion. Zeigen Sie, dass (M,d) ein metrischer Raum ist.

Abgabe am Donnerstag 22.12.16 vor der Vorlesung in die Briefkästen

[1] Ist $M^2\subset\mathbb{R}^3$ eine Fläche aus einem lichtleitendem Material. Dann ist M mit induzierter Metrik Riemannsch. Wir betrachten $(N=\mathbb{R},-(dt)^2)$ und $M\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{3,1}$ (Lokal ist $\mathbb{R}^{3,1}$ eine gute Näherung für die Raumzeit (=Lorentzmannigfaltigkeit), in der wir leben.). Sendet eine Quelle in $p\in M$ in Richtung $v\in T_pM$ dann einen Lichtstrahl aus, dann bewegt sich das Licht in $M\times\mathbb{R}$ auf einer Geodäten. (ii) heißt also, dass die räumliche Bewegung des Lichtes, die wir dann sehen, eine Geodäte in M ist.

[2] Das heißt $\dot c$ ist für jedes t ein kausaler Vektor, also $g_{c(t)}(\dot c(t),\dot c(t))\le 0$ für alle t. Im Minkowskiraum gilt für kausale Vektoren v,w die inverse Dreiecksungleichung: $|\langle v,w\rangle_L|^2\geq|\langle v,v\rangle_L|\cdot|\langle w,w\rangle_L|$.