Maximilian Gerhards, Nadine Große

Übungsblatt 10 – Frohe Weihnachten!

Aufgabe 37/38. (2+1,5+1,5+3+2)

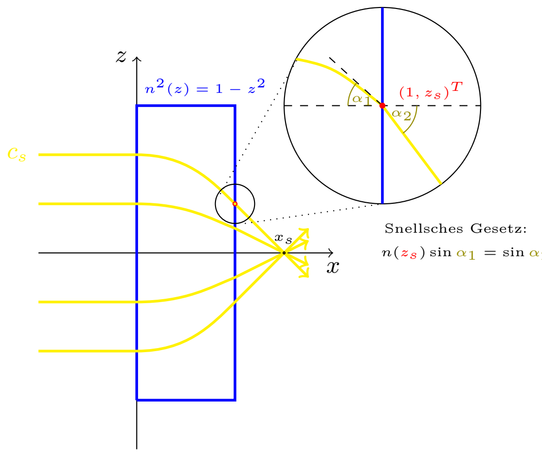
(i) Sei eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ gegeben als verzerrtes Produkt: $f^2(y)(dx)^2+(dy)^2$. Zeigen Sie, dass für eine Geodätische $c(t)=(x(t),y(t))$ die beiden Größen $f^2(y)\dot{x}^2+\dot{y}^2=C_2$ und $f^2(y)\dot{x}=C_1$ konstant in t ist. Folgern Sie daraus, dass eine Geodätische $\dot{y}^2=C_2-C_1^2f^{-2}(y)$ erfüllt.

(ii) Wir betrachten eine Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$, die dadurch entsteht, dass die Kurve $s\mapsto(r(s),0,h(s))^T\in\mathbb{R}^3$ um die z-Achse rotiert wird. Die Kurve sei nach Bogenlänge parametrisiert. Geben Sie eine Parametrisierung F der Fläche an, die die Koordinaten s und den Drehwinkel ϕ nutzt. Zeigen Sie, dass die induzierte Metrik in den Koordinaten (s,ϕ) ein verzerrtes Produkt wie in (i) ist und das für eine Geodätische $c(t)=F(s(t),\phi(t))$ das Produkt aus $r(s)$ und dem Kosinus des Winkels zwischen $\dot{c}(t)$ und $\frac{\partial}{\partial\phi}|_{c(t)}$ konstant in t sind.

(iii) Sei eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ gegeben als verzerrtes Produkt: $n^2(z)((dx)^2+(dz)^2)$ Analog wie in (i) erhält man, dass für eine Geodätische $c(t)=(x(t),z(t))$ die beiden Größen $n^2(z)(\dot{x}^2+\dot{z}^2)=C_2$ und $n^2(z)\dot{x}=C_1$ konstant in t sind und damit eine Geodätische $\dot{z}^2=\frac{1}{n^2(z)}\left(C_2-C_1^2n^{-2}(z)\right)$ erfüllt. Betrachten Sie die Geodätische als Graph über x, also $\tilde{z}(x(t))=z(t)$. Zeigen Sie, dass dann $(\tilde{z}')^2=\frac{C_2}{C_1^2}n^2(\tilde{z})-1$ gilt.

(iv) (Gradientenlinse[1])

Licht (nach Bogenlänge parametrisiert) bewege sich parallel zur x-Achse auf eine Gradientenlinse ($M=[0,1]\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ (Koordinaten (x,z)) gegeben mit $g=n^2(z)g_E$ mit $n^2(z)=1-z^2$) zu, also $c_s(0)=(0,s)^T$ und $\dot{c}_s(0)=(\frac{1}{n(s)},0)^T$. Berechnen Sie c_s (in der Linse) unter Nutzung von (iii). Bei $x=1$ tritt c_s wieder aus der Linse aus und befolgt dort das Snellsche Brechungsgesetz, siehe Abbildung. Der ausgetrete Lichtstrahl schneide die x-Achse in x_s. Rechnen Sie nach, dass $x_s=\text{const}+O(s^2)$ gilt.



(v) Sei eine Metrik g einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es lokal genau dann Koordinaten (x,y) gibt mit $g=f(x)^2((dx)^2+(dy)^2)$, wenn es lokal Koordinaten (x',y') mit $g=(dx')^2+\tilde{f}(x')(dy')^2$ gibt.

Aufgabe 39/40. (1.5+(1+0.5+2)+ (2+2)) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(i) Für $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ definieren wir $T_{X,Y}\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ durch $T_{X,Y}(f)=X(Y(f))-Y(X(f))$. Zeigen Sie, dass $T_{[X,Y]}$ eine Derivation ist und damit nach Übungsaufgabe 31 eindeutig ein Element in $\mathfrak{X}(M)$ definiert, welches wir *Lieklammer* von X und Y nennen und mit $[X,Y]$ bezeichnen.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Lieklammer $[.,.]:(X,Y)\in\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\mapsto[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$ folgende Eigenschaften gelten:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics

(a) Bilinearität

(b) Antisymmetrie, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$.

(c) Jacobiidentität, d.h. für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
(Hinweis: Aus Übungsaufgabe 31 folgt, dass ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$ schon das Nullvektorfeld sein muss.)

(iii) Zeigen Sie, dass für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ die folgenden Identitäten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gelten:

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

(b) (Koszul-Formel) $2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])$

Abgabe am Donnerstag 12.01.17 vor der Vorlesung in die Briefkästen