Übungsblatt 11

Übungsaufgabe 41. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei ∇ bzw. R der zur induzierten Metrik gehörige Levi-Civita Zusammenhang bzw. Riemannsche Krümmungstensor. Sei II die zweite Fundamentalform, also $II(X,Y) := D_XY - \nabla_XY$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie die Gaußgleichung

$$\langle R(X,Y)W,Z\rangle = \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(Y,Z), II(X,W)\rangle.$$

Übungsaufgabe 42 (1.5+0.5+2)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche. Sei $II(X,Y) := D_XY - \nabla_XY$.

(i) Zeigen Sie, dass II symmetrisch ist und in jedem Punkt $p \in M$ eine Abbildung $S\colon T_pM \to T_pM$ mit $g(S(X(p)), Y(p)) = II(X(p), Y(p)))$ induziert, die sogenannte *Weingartenabbildung*.

(ii) Folgern Sie, dass die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist und damit diagonalisierbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass jede Hauptkrümmungsrichtung (=Eigenvektor der Weingartenabbildung) einer Hyperfläche M im Punkt $p \in M$ ein Eigenvektor der Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric}\colon T_pM \to T_pM$ ist.

Übungsaufgabe 43/44 (2.5+1+1.5+2.5 + 2.5)**.** Sei $G \subset O(n)$ eine Liegruppe. Wir setzen $\langle v, w\rangle := \mathrm{Spur}(v^T w)$ für $v, w \in T_gG$ und $g \in G$. Sei $L_g\colon G \to G$ gegeben durch $h \mapsto gh$ (vgl. ÜA 24 für R_g, die analogen Aussagen gelten für L_g). Ein Vektorfeld auf G heißt *linksinvariant*, falls $X(g) = d_eL_g(X(e))$ für alle $g \in G$ gilt. Für alle linksinvarianten Vektorfelder X,Y gilt $[X,Y] = XY - YX$, wobei die rechte Seite als Matrixmultiplikation und -subtraktion zu verstehen ist (für die Definition der Lieklammer $[X,Y]$ siehe ÜA 39/40(i))[1]. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen.

(i) $\langle ., .\rangle$ ist eine Riemannsche Metrik auf G und biinvariant (vgl. ÜA. 34(ii))

(ii) Für linksinvariante Vektorfelder X, Y ist $\langle X, Y\rangle$ eine auf G konstante Funktion.

(iii) Es ist $T_eG \subset \{v \in M_{\mathbb{R}}(n) \mid v^T = -v\}$ und für alle linksinvarianten Vektorfelder X, Y, Z gilt $\langle [X,Y], Z\rangle = -\langle Y, [X,Z]\rangle$.

(iv) Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik $\langle ., .\rangle$. Dann gilt $\nabla_XY = \frac{1}{2}[X,Y]$ für alle linksinvarianten Vektorfelder X, Y. (Hinweis: Verwenden Sie die Koszulformel aus ÜA 39/40(iii)(b))

(v) Die Krümmung der Metrik $\langle ., .\rangle$ ist durch $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$ gegeben.

Abgabe am Donnerstag 19.01.17 vor der Vorlesung in die Briefkästen

[1] Dies gilt sogar für linksinvariante Vektorfelder auf $GL(n)$.