Übungsblatt 12

Übungsaufgabe 45 (2.5+ 2.5). (i) Betrachten Sie $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik. Sei $p \in S^2$. Sei $c\colon [0,\pi] \to S^2$ eine minimierende Geodätische von p nach $-p$ Bestimmen Sie die Menge der $v \in T_{-p}S^2$ für die es ein Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $J(\pi) = v$ gibt.

(ii) Betrachten Sie den Zylinder $Z := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit induzierter Metrik und die Geodätische $c\colon t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \in Z$. Bestimmen Sie alle periodischen Jacobifelder J längs c (also $J(t + 2\pi) = J(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$). Geben Sie zu diesen periodischen Jacobifeldern jeweils eine zugehörige geodätische Variation von c an.

Übungsaufgabe 46 (0.5+2+2.5). Sei (M,g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei $\delta > 0$ derart, dass $\exp_p\colon \overline{B_\delta(0)} \subset T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $v\colon S^1 \to \partial T_pM$ eine Parametrisierung von $S_1(0) := \{v \in T_pM \mid g_p(v,v) = 1\}$. Sei $F\colon (\rho,\theta) \in (0,\delta) \times (-\pi,\pi) \to M$ gegeben als $F(\rho,\delta) = \exp_p(\rho v(\theta))$.

(i) Zeigen Sie, dass F eine Parametrisierung der Fläche ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Metrik g in den lokalen Koordinaten $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\rho\phi} = 0$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie Lemma II.9.21).

(iii) Sei $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik. Sei p der Nordpol. Geben Sie die Abbildung F explizit an (für maximal mögliches $\delta > 0$). Berechnen Sie die Metrikkoeffizienten in den Koordinaten (ρ,θ).

Übungsaufgabe 47 (2+1+2). Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die zwischen je zwei Punkten $p,q \in M$ mindestens eine minimale Geodätische $c\colon [a,b] \to M$ ($c(a) = p$ und $c(b) = q$) existiert, d.h. $d(c(t_1), c(t_2)) = L(c\colon [t_1,t_2] \to M)$ für alle $t_{1,2} \in [a,b]$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ derart, dass $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0,1]$ eine minimale Geodätische ist. Weiterhin sei γ_v nicht mehr minimierend für $t > 1$.

(i) Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle eintreten muss:
   (a) Es existiert ein $w \in T_pM$ mit $v \neq w$, $|v| = |w|$ und $\exp_p(v) = \exp_p(w)$.
   (b) p und $\exp_p(v)$ sind konjugierte Punkte längs γ_v.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall (a) auch $\gamma_w(t)$ auf $[0,1]$ eine minimierende Geodäte ist.

(iii) Seien $w_1, w_2 \in T_pM$ derart, dass $w_1 \neq w_2$ und beide $\exp_p(tw_i)$ auf $[0,1]$ minimierende Geodätische mit $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2)$ sind. Zeigen Sie, dass für $t > 1$ keine dieser beiden Geodätische minimierend sein kann. (Hinweis: Verwenden Sie, dass Geodätische immer glatt sind.)

Übungsaufgabe 48 (0.5+1.5+3). Sei $p \in M$ und $\gamma\colon [0,a] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Sei $w \in T_vT_pM$ mit $|w| = 1$ und sei J das Jacobifeld entlang γ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$. Zeigen Sie:

(i) $(\frac{\nabla}{dt})^2 J(0) = 0$

(ii) $(\frac{\nabla}{dt})^3 J(0) = -R(v,w)v$

(iii) Die Taylorentwicklung von $|J(t)|^2$ um $t = 0$ ist gegeben durch:

$$|J(t)|^2 = t^2 + \frac{1}{3} g(R(v,w)w,v)t^4 + O(t^5).$$

Abgabe am Donnerstag 26.01.17 vor der Vorlesung in die Briefkästen