Übungsblatt 13

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Für $v \in T_pM$ mit $g_p(v, v) = 1$ definieren wir

$$\rho(v) := \sup\{t \geq 0 \; | d(p, c_v(t) := \exp_p(tv)) = t\} \in [0, \infty]$$

und setzen

$$\text{Schnittort}(p) := \text{Cut}_p := \{c_v(\rho(v)) \mid v \in T_pM, g_p(v, v) = 1\}$$

sowie

$$D_p := \{tv \mid 0 \leq t < \rho(v), v \in T_pM, g_p(v, v) = 1\}.$$

Übungsaufgabe 49 (1+1+1.5+1.5)**.** Sei (M, g) eine geodätisch vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(i) Für alle $0 < t < \rho(v)$ ist c_v die eindeutige minimale Geodäte von p nach $c_v(t)$.

(ii) $\rho(v) \geq \text{inj}(p)$

(iii) $\text{inj}(p) = d(p, \text{Cut}_p)$

(iv) $M = \exp_p(D_p) \sqcup \text{Cut}_p$ ($\sqcup$ steht für die disjunkte Vereinigung)

Hinweis: Verwenden Sie ÜA 47.

Übungsaufgabe 50 (1+1+1.5+1.5)**.** Finden Sie (mit Begründung) Cut_p für

(i) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $p = (0, 0, 1)^T$,

(ii) $\mathbb{RP}^2$ mit der Fubini-Study Metrik, vgl. Bsp. II.1.22, und $p = \pi((0, 0, 1)^T)$, wobei $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion ist, vgl. Bsp. I.3.3.

(iii) $Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $p = (1, 0, 0)$,

(iv) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der flachen Metrik von $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, vgl. Satz II.1.20 und Bsp. I.3.41, und $p = \pi((0.5, 1)^T)$.

Übungsaufgabe 51. Sei (M, g) geodätisch vollständig Riemannsche Mannigfaltigkeit und nicht kompakt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in M$ ein $v \in T_pM$ gibt, so dass $c_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0, \infty)$ minimal ist (es gibt also einen längenminimierenden geodätischen Strahl nach unendlich).

Übungsaufgabe 52 (2.5+2.5)**.** Seien (M, g) und (N, h) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung.

(i) Sei (N, h) geodätisch vollständig und es gebe ein $c > 0$ derart, dass $g_p(v, v) \geq c \cdot h_{f(p)}(d_pf(v), d_pf(v))$ für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ gilt. Zeigen Sie, dass dann auch (M, g) geodätisch vollständig ist. (Hinweis: Verwenden Sie Eigenschaft (3) in Hopf-Rinow.)

(ii) Sei (M, g) geodätisch vollständig und f eine lokale Isometrie. Weiterhin gebe es zwischen je zwei Punkten in N eine eindeutige Geodätische. Zeigen Sie, dass f dann schon bijektiv und damit eine Isometrie ist.

Abgabe am Donnerstag 01.02.17 vor der Vorlesung in die Briefkästen