Differentialgeometrie Maximilian Gerhards, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 16/17

Übungsblatt 14

Sei $M := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = (2-\cos z)^2\}$.

(i) Zeigen Sie, dass M eine glatte Untermannigfaltigkeit ist und skizzieren Sie diese.

(ii) Berechnen Sie T_pM für alle $p \in M$. Welche der Breitenkreise (Kurven mit $z =$const) sind Geodäten?

(iii) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\phi_k \colon M \to M$ gegeben durch $(x^1,x^2,x^3)^T \mapsto (x^1,x^2,x^3+2\pi k)^T$. Zeigen Sie, dass ϕ_k eine Isometrie ist und $\mathbb{Z}\times M \to M$, $(k,x) \mapsto \phi_k(x)$ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung definiert. Skizzieren Sie $M/\mathbb{Z}$.

(iv) Zeigen Sie, dass $F\colon (\phi,z) \in (0,2\pi)\times\mathbb{R} \mapsto ((2-\cos z)\cos\phi, (2-\cos z)\sin\phi, z)^T \in \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung ist und berechnen die induzierte Metrik bzgl. der Koordinaten (ϕ, z).

(v) Stellen Sie die Geodätengleichung in diesen Koordinaten auf und überprüfen Sie daran, welche Breitenkreise und Meridiane Geodäten sind.

(vi) Berechnen Sie die Skalarkrümmung und skizzieren Sie in ihrer Skizze aus (i), welche Bereiche positive und welche negative Skalarkrümmung besitzen.

(vii) Sei $c_z\colon t \in (0,2\pi) \mapsto F(t,z)$ gegeben. Berechnen Sie $D_{\dot c}\frac{\partial F}{\partial \phi}$ und daraus $\nabla_{\dot c}\frac{\partial F}{\partial \phi}$. Folgern Sie daraus noch einmal, welche Breitenkreise keine Geodätische sein können.

(viii) Finden Sie den Schnittort von $p = (1,0,0)^T \in M$. Gibt es konjugierten Punkte von p entlang $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$?

(ix) Zeigen Sie, dass M mit der induzierten Metrik geodätisch vollständig ist.

(x) Für $p = F(u,z)$ sei die Geodätische $c(t) = F(u, f(z,t))$ gegeben, wobei $f(z,t)$ derart gewählt ist, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Finden Sie eine Variation $c_s\colon [-\epsilon,\epsilon] \to M$ von c mit festen Endpunkten und deren Variationsvektorfeld $X(t)$ für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ ein nichtnegatives Vielfaches von $\frac{\partial F}{\partial \phi}|_{c(t)}$ ist. Berechnen Sie für diese Variation $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(R(X(t),\dot c(t))\dot c(t), X(t))dt$ mittels der zweiten Variation des Energiefunktionals.

Keine reguläre Abgabe - Falls Sie noch Punkte zur Zulassung benötigen, können Sie dieses Blatt für Zusatzpunkte bearbeiten (pro Teilaufgabe 2 Punkte). Dann ist Abgabe am Donnerstag 09.02.17 vor der Vorlesung in die Briefkästen.