Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 19/20

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (3+2)**.** (i) Geben Sie eine Karte $\kappa\colon U \to V$ von $\mathbb{R}^2$ mittels Polarkoordinaten (r, ϕ) an. Drücken Sie, die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial r}|_p$, $\frac{\partial}{\partial \phi}|_p$ für $p \in U$ in den kartesischen Koordinaten (x, y) aus.

(ii) Betrachten Sie den Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius 1. Sei $f\colon z \in S^1 \mapsto z^2 \in S^1$ gegeben, wobei $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ aufgefasst wird. Berechnen Sie die Darstellung von $d_z f$ bzgl. der lokalen Koordinate ϕ aus (i).

Aufgabe 14 (1+1+3)**.** Seien $f\colon M^m \to N^n$, $g\colon N^n \to Z^z$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

(i) Zeigen Sie, dass $d_p \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_pM}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $d_p(g \circ f) = d_{f(p)} g \circ d_p f$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $d_p f$ und die Abbildung

$$df\colon TM \to TN,\ (p \in M, v \in T_pM) \mapsto (f(p), d_p f(v))$$

jeweils glatt sind.

Aufgabe 15. (2,5+2,5) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Äquivalenzrelation gegeben durch:

$$(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \sim (x', y')^T \in \mathbb{R}^2 \text{ genau dann, wenn es } m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (x, y) = (x' + m, y' + n) \text{ gibt.}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/\sim$ diffeomorph zu $S^1 \times S^1$ ist.[1]

Aufgabe 16. (2+1+2) Sei $M := ([-1, 1] \times \{-1\}) \cup ([-1, 1] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times [-1, 1]) \cup (\{1\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass M homöomorph zu S^1 ist. Folgern Sie daraus, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie.

(iii) Zeigen Sie, dass M für geeignete Wahl der Karten eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Abgabe am Donnerstag 21.11.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen

[1] Man sieht leicht, dass das Produkt $M \times N$ zweier Mannigfaltigkeiten wieder eine Mannigfaltigkeit ist, in dem aus zwei Karten $\kappa_1 : U_1 \to V_1$ von M und $\kappa_2 : U_2 \to V_2$ von N mittels $\kappa_1 \times \kappa_2 : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ eine Karte auf $M \times N$ baut.