Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (2+1.5+1.5)**.** Seien $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ und $Z \subset \mathbb{R}^\ell$ beliebige Teilmengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ glatt.

(i) Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon X \to Z$ glatt ist.

(ii) Sei $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x,y)^T \mapsto \begin{cases} \frac{1-y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ist f glatt? Begründen Sie.

(iii) Zeigen Sie, dass die Multiplikationsabbildung $\mu\colon \mathbb{O}(n) \times \mathbb{O}(n) \to \mathbb{O}(n)$, $(A,B) \mapsto AB$ und die Inversenbildung $\iota\colon \mathbb{O}(n) \to \mathbb{O}(n)$, $A \mapsto A^{-1}$, glatte Abbildungen sind. ($\mathbb{O}(n)$ ist die orthogonale Gruppe.)[1]

Aufgabe 6 (2+1.5+1.5)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, seien $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten die Untermannigfaltigkeiten $M_h = \mathrm{Graph}(h)$ und $M_g = \mathrm{Graph}(g)$. Sei $f\colon M_h \to M_g$ gegeben durch

$$(u, h(u))^T \mapsto (u, g(u))^T.$$

(i) Zeigen Sie einmal mittels der Definition und einmal mittels der zweiten Bedingung in Lemma I.2.12. aus der Vorlesung, dass f glatt ist.

(ii) Berechnen Sie $T_pM_h \subset \mathbb{R}^3$ für $p \in M_h$ und geben Sie explizit eine Basis an.

(iii) Berechnen Sie d_pf in der Basis aus (ii) für T_pM_h und T_pM_g.

Aufgabe 7. (2+1,5+1+0,5) Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = x^TAx$.

(i) Zeigen Sie, dass $M_c = f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^TAx = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Was ist die Dimension von M_c?

(ii) Berechnen Sie T_xM_c für die M_c aus (i).

(iii) Wenden Sie (i) und (ii) auf

$$M_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x-y| = c\}$$

an.

(iv) Stimmt (i), wenn A nicht symmetrisch ist?

[1] Gruppen, die Untermannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^k$ sind, und deren Multiplikations- und Inversenbildung glatt sind, nennt man *Liegruppen.* Alle Matrixuntergruppen von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ sind Liegruppen.

Aufgabe 8 (1.5+0.5+1+1+1)**.** Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine Hyperfläche. Wir nennen M *orientierbar*, falls es ein stetiges nirgends verschwindendes Normalenfeld gibt.

(i) Sei $p \in M$ und $F\colon U \to V$ eine lokalen Parametrisierung um p. Zeigen Sie, dass $F(U)$ orientierbar ist.

(ii) Ist S^2 orientierbar?

(iii) Sei
$$\text{Mö} = \{F(s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (-1,1), s \in \mathbb{R}\}$$
mit
$$F(s,t) = \left(\cos(s)\left(2 + t\cos\frac{s}{2}\right), \sin(s)\left(2 + t\cos\frac{s}{2}\right), t\sin\frac{s}{2}\right)^T.$$
Skizzieren Sie Mö und zeigen Sie, dass Mö $\subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit in dem sie genügend lokale Parametrisierungen angeben. Zeigen Sie, dass Mö nicht orientierbar ist.

(iv) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, falls es ein glattes nirgends verschwindendes Normalenfeld gibt.

(v) Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, falls es lokale Parametrisierungen $F_i\colon U_i \to V_i$ von M gibt, die M überdecken (d.h. es gilt $M \subseteq \cup_i V_i$) und $\det D_{F_i^{-1}(p)}(F_j^{-1} \circ F_i) > 0$ für alle i, j und $p \in V_i \cap V_j \cap M$ gilt. (Hinweis: Erweitern Sie $\frac{\partial F_i}{\partial u^i}(u)$ mittels eines Einheitsnormalenvektors $\nu_i(p = F(u))$ zu einer positiv orientierten Basis und diskutieren Sie, wann $\nu_i(p) = \nu_j(p)$ ist.)

Abgabe am Donnerstag 7.11.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen