Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 3

Aufgabe 9. (1+1+2+1)

(i) Sei V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $T_vV = V$ für alle $v \in V$ gilt.

(ii) Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie T_pU und T_pM für $p \in U$.

(iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$ gilt und $d_p\iota\colon T_pM \to T_p\mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung ist.

(iv) Berechnen Sie explizit den Tangentialraum an $M_a := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = a\}$ $(a>0)$ im Punkt $(\sqrt{a},0,0)$.

Aufgabe 10. (2+2+1) Sei $X = \mathbb{R} \times \{1,-1\}$. Sei $(x,y) \sim (x',y')$ genau dann, wenn beide gleich sind oder $x = x' > 0$ ist. Setzen wir $M = X/\sim$, $\kappa_1\colon U_1 := \mathbb{R}\times\{1\}/\sim\,\cong \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\kappa_2\colon U_2 := \mathbb{R}\times\{-1\}/\sim\,\cong \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}\colon \kappa_2(U_1\cap U_2) \to \kappa_1(U_1 \cap U_2)$ glatt ist.

(ii) Sei $\mathcal{T}$, die eindeutige Topologie, bzgl. derer die κ_i stetig sind (vgl. Beispiel I.3.6). Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ gleich der Quotiententopologie auf M der Surjektion $X \to X/\sim$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ nicht Hausdorffsch ist.

Aufgabe 11. (je 1) Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Z,\mathcal{T}_Z)$ topologische Räume und Y eine Menge. Sei $q\colon X \to Y$ surjektiv.

(i) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{T}' = \{U \subset Y \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ eine Topologie auf Y ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}'$ die feinste Topologie auf Y ist, so dass q stetig ist. D.h. zeigen Sie: Ist $\hat{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf Y, für die q stetig ist, dann gilt $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}'$.

(iii) Zeigen Sie, dass für jeden weiteren topologischen Raum $(Z,\mathcal{T}'')$ und jede Abbildung $f\colon Y \to Z$ gilt: f ist genau dann stetig, wenn $f\circ q$ stetig ist.

(iv) (Universelle Eigenschaft) Sei $\tilde{f}\colon X \to Z$ eine stetige Abbildung für die $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $q(x_1) = q(x_2)$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $f\colon Y \to Z$ mit $\tilde{f} = f \circ q$ gibt.

(v) Für welche der Aussagen (i)-(iv) benötigt man die Surjektivität von q? Begründen Sie.

Aufgabe 12. Sei $N \subset \mathbb{R}^\ell$ eine Untermannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine Teilmenge. Wann würden Sie die Menge M eine Untermannigfaltigkeit von N nennen? Schlagen Sie eine Definition vor, die die Definition von Untermannigfaltigkeiten in $N = \mathbb{R}^n$ verallgemeinert[1] (und zeigen Sie, dass Ihre Definition wirklich eine solche Verallgemeinerung liefert). Ist dann auch M, wenn als Teilmenge von $\mathbb{R}^\ell$ betrachtet, eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^\ell$?

Abgabe am Donnerstag 07.11.19 bis 18 Uhr in die Briefkästen

[1] 'Verallgemeinert' bedeutet, dass jede Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ im Sinne von Def. 1.1 auch Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ in ihrem Sinne ist.