Übungsblatt 6

Aufgabe 21. ((1+2)+2)

(i) Seien V und W endlich dimensionale reelle Vektorräume, b eine symmetrische Bilinearform auf V und $\Phi\colon W \to V$ eine lineare Abbildung. Sei

$$(\Phi^* b)(w_1, w_2) := b(\Phi(w_1), \Phi(w_2)) \quad \text{für } w_1, w_2 \in W.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi^* b$ eine symmetrische Bilinearform auf W ist.

(b) Sei Φ injektiv und sei b nicht entartet mit Index k. Zeigen Sie, dass $\Phi^* b$ nicht entartet mit Index $\leq k$ ist und falls Φ sogar bijektiv ist, $\Phi^* b$ auch Index k hat.

(ii) Sei $\phi\colon M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus und g eine semi-Riemannsche Metrik auf N. Zeigen Sie, dass dann $\phi^* g$ eine semi-Riemannsche Metrik auf M mit gleichem Index wie g ist.

Aufgabe 22. (1.5+(0.5+1+2))

(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $F\colon V \subset \mathbb{R}^m \to W \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung von M. Berechnen Sie die vom euklidischem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Metrik g in der Karte $\kappa := F^{-1}\colon U := W \cap M \to V$.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $M = \mathrm{graph}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Sei g die induzierte Metrik auf M. Wir betrachten die Parametrisierung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2)^T \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))^T$.

(a) Berechnen Sie g_{ij} in den Koordinaten x^i.

(b) Berechnen Sie ein Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(c) Zerlegen Sie $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \left(= \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x) \right)$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\frac{\partial F}{\partial x^1}(x)$, $\frac{\partial F}{\partial x^2}(x)$ und $\nu(x)$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 23. Betrachten Sie die stereographische Projektion des hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf den Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\phi\colon \mathbb{H}^n \to B_1(0), \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 + x^0} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Sei g die auf $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch die Lorentz-Metrik des $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Riemannsche Metrik. Berechnen Sie $(\phi^{-1})^* g$.[1]

Man nennt $(B_1(0), (\phi^{-1})^* g)$ das *Poincarésche Ballmodell des hyperbolischen Raumes.*

[1] Zur Berechnung von ϕ^{-1} z.B. den Ansatz $(y^1, \ldots, y^n) \in B_1(0) \mapsto (a, by^1, \ldots, by^n) \in \mathbb{H}^n$ machen und a, b bestimmen.

Aufgabe 24. (2+0.5+2.5) Wir betrachten $S^3 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Sei $SU(2) = \{A \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \mid A\bar{A}^T = \mathrm{Id}_2, \det A = 1\}$. Man kann

(i) Zeigen Sie, dass $\phi\colon (a,b) \in S^3 \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten ist.

Mittels diesem Diffeomorphismus können wir auf S^3 eine Gruppenstruktur derart definieren, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(ii) Was ist dann $(a,b) \cdot (c,d)$ für $(a,b), (c,d) \in S^3$?

Für $x \in S^3$ sei $L_x\colon S^3 \to S^3$, $y \mapsto x \cdot y$. Weiterhin versehen wir $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ mit der Standardmetrik genannt σ.

(iii) Zeigen Sie, dass die Standardmetrik S^3 *linksinvariant* ist, d.h. dass $L_x^*\sigma = \sigma$ für alle $x \in S^3$ gilt.

Abgabe am Donnerstag 05.12.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen