Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 7

Aufgabe 25. (1.5+1.5+1+1)

(i) Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ die zugehörige Riemannsche Abstandsfunktion. Zeigen Sie, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

(Hinweis: Sei $\kappa\colon U \to V$ eine Karte von M. Sei g_{ij} die Metrik in den dazugehörigen lokalen Koordinaten. Sei $K \subset U$ kompakt. Da g_{ij} glatt und in jedem Punkt positiv definit ist, gibt es ein $\mu > 0$ mit $g_{ij}(\kappa(y))v^i v^j \geq \mu \sum_k (v^k)^2$ für alle $y \in K$ und $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_y \in T_yM$.)

(iii) Sei $(M = \mathbb{R}^n, <.,.>_L)$ der Minkowskiraum. Für $p, q \in M$ definieren wir

$$\hat{d}(p,q) = \inf\{\tau(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Infimum der leeren Menge ∞ setzen. Zeigen Sie, dass $\hat{d}$ nur die Werte 0 und ∞ annimmt.

(iv) Wir definieren für Lorentzsche Mannigfaltigkeiten den Lorentzschen Abstand

$$d(p,q) = \sup\{\tau(c) \mid c \text{ ist eine stückweise glatte kausale zukunftsgerichtete Kurve von } p \text{ zu } q\},$$

wobei wir das Supremum der leeren Menge 0 setzen. Wir betrachten die Lorentzmannigfaltigkeit $(M = S^1 \times \mathbb{R}, g)$ mit $g = d\phi^2 - dt^2$, wobei $(\phi, t) \mapsto (\sin\phi, \cos\phi, t) \in M$ Koordinaten auf M sind. Welche Punkte auf M kann man von $(0,0)$ durch glatte kausale Kurven erreichen? Bestimmen Sie zu allen diesen Punkten den Lorentzschen Abstand.

(v) Finden Sie ein Beispiel einer Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) mit $d(p,p) = \infty$ für alle Punkte $p \in M$.

Aufgabe 26. (1+1.5+2.5) ($S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik) Wir betrachten die lokale Parametrisierung

$$F\colon (\phi, \psi)^T \mapsto (\cos\phi\cos\psi, \cos\phi\sin\psi, \sin\phi)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $\partial_\phi := \frac{\partial}{\partial\phi}$ und $\partial_\psi := \frac{\partial}{\partial\psi}$.

(i) Berechnen Sie $D_{\partial_\phi}\partial_\phi$, $D_{\partial_\phi}\partial_\psi$,$D_{\partial_\psi}\partial_\phi$, $D_{\partial_\psi}\partial_\psi$.

(ii) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion der Vektoren aus (i) auf den jeweiligen Tangentialraum der Sphäre in der Basis ∂_ϕ, ∂_ψ.

(iii) Sei $c\colon I \to S^2$, $c(t) = F(\phi(t), \psi(t))$. Berechnen Sie $\ddot{c}^{\tan}$ und bestimmen Sie alle Lösungen von $\ddot{c}^{\tan} = 0$ für $c(0) = (1,0,0)$ und $\dot{c}(0) = (0,0,1)$.

Aufgabe 27 (2+(1+2))**.** Es sei der Rotationstorus gegeben:

$$\{F(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)^T \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(i) $F|_{u,v\in(0,2\pi)}$ ist ein lokale Parametrisierung. Berechnen Sie die Geodätengleichung in diesen Koordinaten.

(ii) Bestimmen Sie, welche der Koordinatenlinien $u = const$ bzw. $v = const$ Geodätische sind.
  (a) Einmal mittels der in (i) aufgestellten Geodätengleichung.
  (b) Einmal mittels des Geodätenkriteriums für Hyperflächen aus Beispiel II.2.5.

Aufgabe 28. (1+2+2) In dieser Aufgabe wird gezeigt: Bis auf Isometrien ist eine Riemannsche Metrik auf S^1 durch die Länge der S^1 eindeutig bestimmt.

(i) Sei $f\colon M \to N$ eine Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M,g) und (N,h). Sei $c\colon I \to M$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass $L(c) = L(f \circ c)$ gilt.

(ii) Sei $\pi\colon \mathbb{R} \to M := [0,1]/(0 \sim 1)$, $x \mapsto (x \bmod 1)$. Es ist M diffeomorph zu S^1. Sei $x \in (0,1) \subset M$ eine lokale Koordinate auf M. Zeigen Sie, dass $g = f(x)(dx)^2$ für eine glatte Funktion $f\colon (0,1) \subset M \to \mathbb{R}$ genau dann eine Metrik auf M induziert, wenn $f > 0$ und $\tilde{f} := f \circ \pi\colon \pi^{-1}((0,1)) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sich zu einer 1-periodischen glatten Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erweitert.

(iii) Seien $g_i(x) = f_i(x)(dx)^2$, $i = 1,2$, zwei Metriken auf M (Notation wie in (ii)). Zeigen Sie, dass (M, g_1) und (M, g_2) genau dann isometrisch sind, wenn $\int_0^1 \sqrt{f_1(x)}dx = \int_0^1 \sqrt{f_2(x)}dx$.

(Hinweis: Überlegen Sie sich erst, welches $y\colon x \in \mathbb{R} \to y(x) \in \mathbb{R}$ eine Isometrie zwischen $(\mathbb{R}, \tilde{f}_1(x)(dx)^2)$ mit $\tilde{f}_1$ wie in (ii) und $(\mathbb{R}, L^2(dx)^2)$ mit $L = \int_0^1 \sqrt{f_1(x)}dx$ ergibt.)

Abgabe am Donnerstag 12.12.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen