Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. (4+1)

(i) Seien (M,g),(N,h) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M\to N$ eine Isometrie und $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Wir schreiben $f_*X := df(X)$(=Push-Forward), d.h.$(f_*X(p) = d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$. Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf (M,g) und $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf (N,h). Zeigen Sie, dass $f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ für alle $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ gilt.

(ii) Seien die Levi-Civita-Zusammenhänge zu zwei Metriken g und $\hat{g}$ auf M gleich. Folgt daraus schon, dass $g=\hat{g}$ ist? Begründen Sie.

Aufgabe 30 (1.5+3.5)**.** (Noch einmal $S^2\subset\mathbb{R}^3$ mit der Standardmetrik) Sei F wie in Aufgabe 26.

(i) Berechnen Sie die induzierte Metrik auf S^2 in den durch F gegebenen lokalen Koordinaten (zum Vergleich: $g=(d\phi)^2+\cos^2\phi(d\psi)^2$).

(ii) Berechnen Sie die Christoffelsymbole bzgl. dieser Koordinaten und stellen Sie damit die Geodätengleichung auf.

Aufgabe 31 (1.5+3.5)**.** Sei (M,g) semi-Riemansche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇.

(i) Sei $f\in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass genau ein Vektorfeld $Z\in\mathfrak{X}(M)$ mit $g(Z,X)=df(X)$ für alle $X\in\mathfrak{X}(M)$ gibt. Dieses Vektorfeld heißt *Gradient* $\mathrm{grad}_g f$ von f bzgl. g. Berechnen Sie $\mathrm{grad}_g f$ in lokalen Koordinaten.

(ii) Sei $\phi\in C^\infty(M)$, $g_\phi = e^{2\phi}g$ und $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang zu g_ϕ. Zeigen Sie, dass für alle $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X,Y)\mathrm{grad}_g\phi$$

gilt.

Aufgabe 32. (1+3+1) Sei (M,g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇.

(i) Sei $c\colon I\to M$ eine beliebige Parametrisierung einer Geodäten. Zeigen Sie, dass dann $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\parallel\dot{c}$ gilt.

(ii) Sei nun $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\parallel\dot{c}$ für eine Kurve $c\colon I\to M$. Zeigen Sie, dass das Bild von c eine Geodäte ist.

(iii) Sei (M,g) Lorentzsch und $c\colon I\to M$ eine lichtartige Geodätische (lichtartig heißt, dass $\dot{c}(t)$ für alle $t\in I$ lichtartig ist). Zeigen Sie, dass dann das Bild von c auch für $g_\phi=e^{2\phi}g$, $\phi\in C^\infty(M)$, eine Geodäte ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 31.(ii).)

Abgabe am Donnerstag 19.12.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen