
Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 19/20

Übungsblatt 9 – Frohe Weihnachten!

Aufgabe 33/34. (2.5+2.5+ 3+2) Sei $\gamma\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei M die Fläche, die durch Rotation von γ um die z-Achse entsteht. Verwenden Sie als Koordinaten zur Beschreibung von M die Koordinate zu I und den Rotationswinkel ϕ.

(i) Berechnen Sie die induzierte Metrik und die zugehörigen Lagrangegleichung.

(ii) Zeigen Sie, dass für (Teile von) Geodätischen $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ mit $\dot{z}(s) \neq 0$ für alle s, das Produkt aus $r(s) := \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}$ mit dem Kosinus des Winkels von $\dot{c}(s)$ mit dem jeweiligen Breitenkreis konstant ist.

(iii) Nutzen Sie Maxima (oder ein anderes Computeralgebrasystem)[1] um M für $\mathrm{Spur}(\gamma) = \{(1, 0, z)\}$ und für $\mathrm{Spur}(\gamma) = \mathrm{Bild}(sin(x))$ graphisch darzustellen. Stellen Sie auch jeweils Geodätische (mit unterschiedlichem qualitativen Verhalten) graphisch dar.

(iv) Warum braucht man in (iii) $\dot{z}(s) \neq 0$? Illustrieren Sie das mit einer Geodätischen aus (iii).

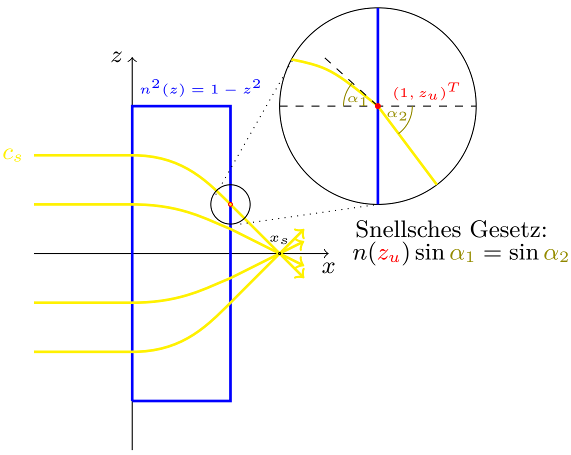
Aufgabe 35/36. (3+2+5)

(i) Sei eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ gegeben als: $n^2(z)((dx)^2 + (dz)^2)$. Zeigen Sie, dass für eine Geodätische $c(s) = (x(s), z(s))$ die beiden Größen $n^2(z)(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = C_2$ und $n^2(z)\dot{x} = C_1$ konstant in s sind. Folgern Sie daraus, dass eine Geodätische $\dot{z}^2 = n^{-2}(z)\left(C_2 - C_1^2 n^{-2}(z)\right)$ erfüllt.

(ii) Betrachten Sie die Geodätischen aus (i) als Graph über x, also $\tilde{z}(x(s)) = z(s)$. Zeigen Sie, dass dann $(\tilde{z}')^2 = \frac{C_2}{C_1^2} n^2(\tilde{z}) - 1$ gilt.

(iii) (Gradientenlinse[2])

Licht (nach Bogenlänge parametrisiert) bewege sich parallel zur x-Achse auf eine Gradientenlinse ($M = [0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (Koordinaten (x, z)) gegeben mit $g = n^2(z) g_E$ mit $n^2(z) = 1 - z^2$) zu, also $c_u(0) = (0, u)^T$ und $\dot{c}_u(0) = (\frac{1}{n(u)}, 0)^T$. Berechnen Sie c_u (in der Linse) unter Nutzung von (iii). Bei $x = 1$ tritt c_u wieder aus der Linse aus und befolgt dort das Snellsche Brechungsgesetz, siehe Abbildung. Der ausgetrete Lichtstrahl schneide die x-Achse in x_u. Rechnen Sie nach, dass $x_u = \mathrm{const} + O(u^2)$ gilt.



Abgabe am Donnerstag 09.01.19 bis 14 Uhr in die Briefkästen

---

[1] siehe Beispieldatei auf der Homepage
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient-index_optics