Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 10

Aufgabe 37. (2.5+1+1.5) Seien (M, g) und (N, h) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $(M \times N, g + h)$. Sei ∇^g, ∇^h bzw. ∇^{g+h} jeweils der Levi-Civita Zusammenhang auf M, N bzw. $M \times N$. Sei $X, Z \in \mathcal{X}(M)$ und $Y, W \in \mathfrak{X}(N)$. Dann ist $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\nabla^{g+h}_{(X,Y)}(Z, W) = (\nabla^g_X Z, \nabla^h_Y W)$ gilt.

(ii) Sei $c(t) = (c_M(t), c_N(t))$ eine Kurve in $M \times N$. Folgern Sie mittels (i), dass c genau dann Geodätische in $M \times N$ ist, falls $c_M(t)$ eine Geodätische in M und $c_N(t)$ eine Geodätische in N ist.

(iii) Sei $(M = N \times \mathbb{R}, g = h - dt^2)$ mit (N, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\pi\colon N \times \mathbb{R} \to N$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, ist $c\colon I \to N$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in N, dann ist $\gamma(t) = (c(t), t)$ eine lichtartige Geodätische in M. Zeigen Sie weiterhin, dass es für jede Geodätische c_N auf N eine lichtartige Geodätische c_M in M mit $\pi \circ c_M = c_N$ gibt.[1]

Aufgabe 38. (2+1+0.5+1.5)(Schwarzschild-Außenraum) Sei $M := \mathbb{R} \times (2m, \infty)$, $g := -h(r)(dt)^2 + \frac{1}{h(r)}(dr)^2$, wobei $h(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ und $m > 0$ ist.

(i) Skizzieren Sie die Lichtkegel in Abhängigkeit des Punktes auf M, also für $p \in M$ die Menge $C_p := \{v \in T_pM \mid g_p(v, v) = 0\}$.

(ii) Berechnen Sie die Geodätengleichung.

(iii) Sei $c(s)$ eine Geodäte, so dass $\dot{c}(0)$ lichtartig ist. In Koordinaten sei c gegeben durch $c(s) = (t(s), r(s))$. Zeigen Sie, dass dann $\dot{r}^2 = h^2(r)\dot{t}^2$ gilt.

(iv) Folgern Sie, dass für lichtartige Geodäten $\dot{r} = const = c$ und $\dot{t}(s)^2 = \frac{c^2(r(0)+sc)^2}{(r(0)+sc-2m)^2}$ gilt. Bestimmen Sie $c(s)$ und zeichnen Sie die Lösungen qualitativ in M ein.

[1] Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche aus einem lichtleitendem Material. Dann ist M mit induzierter Metrik Riemannsch. Wir betrachten $(N = \mathbb{R}, -(dt)^2)$ und $M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{3,1}$ (Lokal ist $\mathbb{R}^{3,1}$ eine gute Näherung für die Raumzeit (=Lorentzmannigfaltigkeit), in der wir leben.). Sendet eine Quelle in $p \in M$ in Richtung $v \in T_pM$ dann einen Lichtstrahl aus, dann bewegt sich das Licht in $M \times \mathbb{R}$ auf einer Geodäten. (iii) heißt also, dass die räumliche Bewegung des Lichtes, die wir dann sehen, eine Geodäte in M ist.

Aufgabe 39. (1+(2+2)) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(i) Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir $T_{X,Y}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ durch $T_{X,Y}(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Zeigen Sie, dass $T_{[X,Y]}$ eine *Derivation* ist, d.h. eine Abbildung wie in Übungsaufgabe 18, und damit eindeutig ein Element in $\mathfrak{X}(M)$ definiert, welches wir *Lieklammer* von X und Y nennen und mit $[X, Y]$ bezeichnen.

Die Lieklammer $[.,.] : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

(a) Bilinearität

(b) Antisymmetrie, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$.

(c) Jacobiidentität, d.h. für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

(a) und (b) sieht man sofort. (c) muss man nachrechnen. Soll hier nicht gemacht werden – aber man würde verwenden, dass aus Übungsaufgabe 18 folgt, dass ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$ schon das Nullvektorfeld sein muss.

(ii) Zeigen Sie, dass für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ die folgenden Identitäten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gelten:

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

(b) (Koszul-Formel)

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])$$

Aufgabe 40. (1+2+2) Sei $H = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der Metrik $g_H = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ gegeben.[2]

(i) Zeigen Sie, dass $(x, y)^T \mapsto (x + c, y)^T$ und $(x, y)^T \mapsto (ax, ay)^T$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ Isometrien von (H, g_H) sind.[3]

(ii) Zeigen Sie, dass die Kurven

$$c_1 \colon \mathbb{R} \to H, s \mapsto (0, e^s)$$
$$c_2 \colon \mathbb{R} \to H, s \mapsto (\tanh s, (\cosh s)^{-1})$$

Geodätische sind. Skizzieren Sie die Mengen $c_1(\mathbb{R})$ und $c_2(\mathbb{R})$.

(iii) Nutzen Sie (i) und (ii), um alle Geodäten in H zu beschreiben.

Abgabe am Donnerstag 16.01.20 bis 14 Uhr in die Briefkästen

[2] Das ist ein Modell des zweidimensionalen hyperbolischen Raumes, d.h. es existiert eine Isometrie zu $\mathbb{H}^2$ mit der Standardarmetrik wie in Bsp. II.1.4: Eine Isometrie zwischen H und dem Poincaréschen Ballmodell des hyperbolischen Raumes aus Übungsaufgabe 23 ist gegeben durch $H \to B_1(0)$, $z \mapsto \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$, wobei H und $B_1(0)$ als Teilmengen von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden.

[3] Man kann allgemeiner zeigen, dass die Möbiustransformationen

$$z \in H \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in H$$

für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ alle orientierungserhaltenen Isometrien sind. Hier wird $H \subset \mathbb{C}$ aufgefasst. Zusammen mit der Spiegelung $z \mapsto -\bar{z}$ und Hintereinanderausführung erhält man alle Isometrien von H.