Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Berechen Sie für die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik die Exponentialabbildung $\exp_p(v)$ für $p \in S^2$ und $v \in T_pS^2$. Berechnen Sie weiterhin die Metrikkoeffizienten zur Karte $(\rho, \theta) \mapsto \exp_p(\rho e^{i\theta})$, wobei $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \cong T_pS^2$ identifiziert wurde und p der Nordpol sein soll.

Aufgabe 42. (3+1+1) Sei $f\colon M \to N$ eine lokale Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h). Zeigen Sie:

(i) $f(\exp_p(v)) = \exp_{f(p)}(d_pf(v))$ für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ für die $\exp_p(v)$ definiert ist.

(ii) $\mathrm{dist}_h(f(p), f(q)) \leq \mathrm{dist}_g(p, q)$ für alle $p, q \in M$.

(iii) $\mathrm{dist}_h(f(p), f(q)) = \mathrm{dist}_g(p, q)$ für alle $p, q \in M$, falls f schon eine Isometrie ist.

Aufgabe 43. (4+1) Sei (M, g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Sei $\delta > 0$ klein genug, dass $\exp_p\colon \overline{B_\delta(0)} \subset T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $v\colon S^1 \to T_pM$ eine Parametrisierung von $S_1(0) := \{v \in T_pM \mid g_p(v, v) = 1\}$. Sei $F\colon (\rho, \theta) \in (0, \delta) \times (-\pi, \pi) \to M$ gegeben als $F(\rho, \delta) = \exp_p(\rho v(\theta))$.

(i) Nehmen Sie erst einmal an, dass F eine Parametrisierung der Fläche ist. Zeigen Sie, dass für die Metrik g in den lokalen Koordinaten $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\rho\phi} = 0$, $\lim_{\rho\to 0} g_{\phi\phi} = 0$ und $\lim_{\rho\to 0} \frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{g_{\phi\phi}} = 1$ gilt.

(Hinweis: Um zu zeigen, dass $g_{\rho\phi} = 0$ ist, berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial\rho} g_{\rho\phi}$ und $\lim_{\rho\to 0} g_{\rho\phi}(\rho, \phi_0)$.)

(ii) Folgern Sie aus obigen Rechnungen, dass F eine Parametrisierung der Fläche ist.

Aufgabe 44. (2+3)

(i) Betrachten Sie $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik. Sei $p \in S^2$. Sei $c\colon [0, \pi] \to S^2$ eine minimierende Geodätische von p nach $-p$ Bestimmen Sie die Menge der $v \in T_{-p}S^2$, für die es ein Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $J(\pi) = v$ gibt.

(ii) Betrachten Sie den Zylinder $Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit induzierter Metrik und die Geodätische $c\colon t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, 0) \in Z$. Bestimmen Sie alle periodischen Jacobifelder J längs c (also $J(t + 2\pi) = J(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

(Hinweis: Sie können schon verwenden, dass alle Jacobifelder aus geodätischen Variationen entstehen.)

Abgabe am Donnerstag 23.01.20 bis 14 Uhr in die Briefkästen