Ksenia Fedosova, Nadine Große

Übungsblatt 12

Auf diesem Übungsblatt bauen die verschiedenen Aufgaben aufeinander auf. Sie können bei jeder Teilaufgabe alle Aussagen, die davor stehen als gegeben voraussetzen (auch wenn Sie diese verwendeten Teile selbst nicht lösen.)

Aufgabe 45. (1.5+1+1+1.5) Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$.

(i) Zeigen Sie: Für jedes Intervall (a, b) um $0 \in \mathbb{R}$ mit $|b - a|$ klein genug, hat

$$\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)),\ \gamma_x(0) = x$$

eine Lösung. Ist das Intervall maximal, so ist die Lösung eindeutig – das maximale Intervall, nennen wir (a_x, b_x).

Der *Fluß des Vektorfeldes* X ist definiert durch

$$\Phi\colon \Sigma_X = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid a_x < t < b_x\} \to M,\ \Phi_t(x) := \Phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

Ist $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$, nennen wir das Vektorfeld X *vollständig*. Die Kurven $\gamma_x(t)$ nennen wir *Integralkurven/Flußlinien* des Vektorfeldes.

(ii) Zeigen Sie: Ist X vollständig, dann ist $\Phi_t\colon M \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s.$$

(iii) Ist $x^2 \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ vollständig?

(iv) Zeigen Sie: Jedes glatte Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Sei G von nun an eine Liegruppe. Für $g \in G$ sei $L_g\colon G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$ und $R_g\colon G \to G$, $h \mapsto h \cdot g$. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ ist *linksinvariant*, falls $(L_g)_*X = X$ für alle $g \in G$ gilt. Ist $v \in T_eG$, dann ist $V(g) := d_eL_g(v)$ das eindeutig linksinvarianten Vektorfeld mit $V(e) = v$. Man kann zeigen, dass für X, Y linksinvariante Vektorfelder auch $[X, Y]$ wieder linksinvariant ist[1]. Damit ergibt die Lieklammer auch eine Abbildung auf T_eG durch $[v \in T_eG, w \in T_eG] := [V, W](e)$, wobei V bzw. W, die zu v bzw. w gehörigen linksinvarianten Vektorfelder sind. Diese Lieklammer auf T_eG erbt die Bilinearität, die Antisymmetrie und die Jacobiidentität der Lieklammer auf Vektorfeldern (vgl. ÜA 39) und macht T_eG so zu einer *Liealgebra*[2].

Für Liegruppen definiert man eine Abbildung, die *Exponentialabbildung* genannt wird, durch

$$\exp\colon T_eG \to G, \quad v \mapsto \gamma_V(1)$$

wobei $V(g) = d_eL_g(v)$ und γ_V die zu V gehörige Integralkurve mit $\gamma_V(0) = e$ ist.

Eine Riemannsche Metrik σ auf G heißt *bi-invariant*, falls $L_g^*\sigma = R_g^*\sigma = \sigma$ für alle $g \in G$ ist. Jede kompakte Liegruppe besitzt eine bi-invariante Metrik[3].

Von nun sei σ eine solche bi-invariante Metrik auf G. In den folgenden Aufgaben werden wir sehen, dass die Exponentialabbildung einer Liegruppe, wie oben definiert, gleich der Exponentialabbildung für (G, σ), wie wir sie für beliebige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten in der Vorlesung definiert haben, ist. Weiterhin werden wir sehen, warum die Abbildung eigentlich Exponentialabbildung heißt.

[1] Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer 2002: Lemma 1.6.6
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Algebra
[3] Petersen: Riemannian geometry, 2nd ed, Springer 2006: S.18

Aufgabe 46. (2+1.5+1.5)

(i) Vervollständigen Sie den folgenden Beweis, dass $\iota\colon g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ eine Isometrie ist:

Sei $M\colon G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto g \cdot h$ die Gruppenmultiplikation in G. Sei $\gamma\colon I \to G$ eine Kurve mit $\gamma(0) = g$. Dann ist

$$e = \gamma(t) \cdot \gamma(t)^{-1} = M(\gamma(t), \iota(\gamma(t))).$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\qquad} &= \frac{d}{dt}|_{t=0} M(\gamma(t), \iota(\gamma(t))) = d_{(g,g^{-1})} M(\dot\gamma(), d\iota(\dot\gamma())) \\ \text{warum?}\ &= d_{(g,g^{-1})} M(\dot\gamma(\underline{\quad}), 0) + d_{(g,g^{-1})} M(0, d_{\underline{\quad}}\iota(\dot\gamma(\underline{\quad}))) = \frac{d}{dt}|_{t=0} M(\gamma(t), \underline{\quad}) + \frac{d}{dt}|_{t=0} M(\underline{\quad}, \iota(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} R_{\underline{\quad}}(\gamma(t)) + \frac{d}{dt}|_{t=0} L_{\underline{\quad}}(\iota(\gamma(t))) = d_{\underline{\quad}} R_{\underline{\quad}}(\dot\gamma(\underline{\quad})) + d_{\underline{\quad}} L_{\underline{\quad}}(d_{\underline{\quad}}\iota(\dot\gamma(\underline{\quad}))). \end{aligned}$$

Daraus folgt $d_g\iota(u) = -(d_{\underline{\quad}} L_{\underline{\quad}})^{-1}(d_{\underline{\quad}} R_{\underline{\quad}}(u))$. Da $\underline{\qquad\qquad\qquad}$, ist ι eine Isometrie.

Insbesondere gilt

$$d_e\iota(u) = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

(ii) Sei $\gamma\colon I \to G$ eine Geodätische mit $\gamma(0 \in I) = e$. Folgern Sie, dass auch $s \in I \mapsto \gamma(s)^{-1}$ und $s \in I \mapsto \gamma(s_0)\gamma(s)$ für $s_0 \in I$ Geodätische sind und $\gamma(s_0)\gamma(s) = \gamma(s_0 + s)$ für alle $s_0, s, s_0 + s \in I$ gilt.

(iii) Folgern Sie, dass die Geodätische γ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Aufgabe 47. (1.5+2+1.5) Seien X, Y, Z, U linksinvariante Vektorfelder auf G. Zeigen Sie:

(i) Die Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfeldes sind Geodätische. Für $v \in T_eG$ ist $\exp(v)$, wie oben definiert, gleich $\exp_e(v)$ für die Exponentialfunktion von (G, σ).

(ii) Es ist $\nabla_X X = 0$, $\nabla_X Y = -\nabla_Y X$, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, und $g(X, Y)$ ist konstant auf G.

(iii) Es gilt $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$ und $g(R(X,Y)Z, U) = -\frac{1}{4} g([X,Y],[Z,U])$. Insbesondere ist die Schnittkrümmung nichtnegativ.

Aufgabe 48. (1+1+1.5+1.5) Sei $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ für $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Matrikuntergruppe (und damit insbesondere eine Liegruppe). Es gilt $T_{\mathrm{Id}}G \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(n, n)$, vgl. ÜA 19.ii.

(i) Wie sehen linksinvariante Vektorfelder aus?

(ii) Zeigen Sie, dass $[A, B] = AB - BA$ für $A, B \in T_eG$ gilt (Die Lieklammer auf T_eG ist oben definiert).

(iii) Zeigen Sie, dass $\exp A = e^A$ ist. Hier ist $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ die Exponentialfunktion für Matrizen.

(iv) Betrachten Sie $G = SO(2)$. Geben Sie explizit $T_{\mathrm{Id}}G$, eine bi-invariante Metrik auf $SO(2)$ und die Exponentialabbildung an.

Abgabe am Donnerstag 30.01.20 bis 14 Uhr in die Briefkästen