Übungsblatt 13

Aufgabe 49. (3+1+1) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die zwischen je zwei Punkten $p, q \in M$ mindestens eine minimale Geodätische $c\colon [a, b] \to M$ ($c(a) = p$ und $c(b) = q$) existiert, d.h. $d(c(t_1), c(t_2)) = L(c\colon [t_1, t_2] \to M)$ für alle $t_{1,2} \in [a, b]$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ derart, dass $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0, 1]$ eine minimale Geodätische ist. Weiterhin sei γ_v nicht mehr minimierend für $t > 1$.

(i) Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle eintreten muss:
   (a) Es existiert ein $w \in T_pM$ mit $v \neq w$, $|v| = |w|$ und $\exp_p(v) = \exp_p(w)$.
   (b) p und $\exp_p(v)$ sind konjugierte Punkte längs γ_v.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall (a) auch $\gamma_w(t)$ auf $[0, 1]$ eine minimierende Geodäte ist.

(iii) Seien $w_1, w_2 \in T_pM$ derart, dass $w_1 \neq w_2$ und beide $\exp_p(tw_i)$ auf $[0, 1]$ minimierende Geodätische mit $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2)$ sind. Zeigen Sie, dass für $t > 1$ keine dieser beiden Geodätische minimierend sein kann. (Hinweis: Verwenden Sie, dass Geodätische immer glatt sind.)

Aufgabe 50. (1+2+(0.5+0.5+0.5+0.5)) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Für $v \in T_pM$ mit $g_p(v, v) = 1$ definieren wir

$$\rho(v) := \sup\{t \geq 0 \ |d(p, c_v(t) := \exp_p(tv)) = t\} \in [0, \infty]$$

und setzen

$$\text{Schnittort}(p) := \text{Cut}_p := \{c_v(\rho(v)) \mid v \in T_pM, g_p(v, v) = 1\}$$

sowie

$$D_p := \{tv \mid 0 \leq t < \rho(v), v \in T_pM, g_p(v, v) = 1\}.$$

Sei (M, g) nun geodätisch vollständig. Zeigen Sie (Hinweis: Verwenden Sie ÜA 49.):

(i) Für alle $0 < t < \rho(v)$ ist c_v die eindeutige minimale Geodäte von p nach $c_v(t)$ und wir haben $\rho(v) \geq \text{inj}(p)$

(ii) Es ist $\text{inj}(p) = d(p, \text{Cut}_p)$ und $M = \exp_p(D_p) \sqcup \text{Cut}_p$ ($\sqcup$ steht für die disjunkte Vereinigung)

(iii) Finden Sie Cut_p für
   (a) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $p = (0, 0, 1)^T$,
   (b) $\mathbb{RP}^2$ mit der Fubini-Study Metrik, vgl. Bsp. II.1.18, und $p = \pi((0, 0, 1)^T)$, wobei $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion ist, vgl. auch Bsp. I.3.10(iii).
   (c) $Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $p = (1, 0, 0)$,
   (d) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der flachen Metrik von $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, vgl. Satz II.1.20 und Bsp. I.3.41, und $p = \pi((0.5, 1)^T)$.

Aufgabe 51. Sei (M, g) geodätisch vollständig Riemannsche Mannigfaltigkeit und nicht kompakt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in M$ ein $v \in T_pM$ gibt, so dass $c_v(t) := \exp_p(tv)$ für alle $t \in [0, \infty)$ minimal ist (es gibt also einen längenminimierenden geodätischen Strahl nach unendlich).

Aufgabe 52. (1+1+3) Sei $p \in M$ und $\gamma\colon [0,a] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Sei $w \in T_v T_p M \cong T_p M$ mit $g_p(w,w) = 1$, und sei J das Jacobifeld entlang γ mit $J(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$. Zeigen Sie:

(i) $(\frac{\nabla}{dt})^2 J(0) = 0$

(ii) $(\frac{\nabla}{dt})^3 J(0) = -R(v,w)v$

(iii) Die Taylorentwicklung von $|J(t)|^2$ um $t = 0$ ist gegeben durch:

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3} g(R(v,w)w,v)t^4 + O(t^5).$$

Abgabe am Donnerstag 06.02.20 bis 14 Uhr in die Briefkästen