Differentialgeometrie Ksenia Fedosova, Nadine Große
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/` WS 19/20

Übungsblatt 14

Das Übungsblatt muss nicht mehr abgegeben werden, kann aber für Zusatzpunkte genutzt werden. Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt. (Abgabe ggf. 13.02.20 bis 14 Uhr in die Briefkästen).

Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$.

(1) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist. Wie sieht M aus?

(2) Ist $F\colon (r, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi, r^2)$ eine lokale Parametrisierung von M?

(3) Berechnen Sie die induzierte Metrik g in den Koordinaten (r, ϕ) aus (2).

(4) Geben Sie eine Karte $\kappa\colon M \to \mathbb{R}^2$ von M an, die ganz M überdeckt.

(5) Berechnen Sie $\kappa^* g$ für g die induzierte Metrik auf κ aus (4).

(6) Berechnen Sie die Geodätengleichung in den (r, ϕ) Koordinaten aus (2).

(7) Ist $s \in (0, \infty) \mapsto F(s, \phi_0)$ für $\phi_0 \in (0, 2\pi)$ Geodäte? Falls ja, kann man diese Kurve, parametrisiert als Geodätische, auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen?

(8) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der nach Bogenlänge parametrisierten Breitenkreise. Sind diese Kurven Geodätische?

(9) Berechnen Sie den Paralleltransport von $\partial_r F(r_0, 0)$ entlang des zugehörigenen nach Bogenlänge parametrisierten Breitenkreises.

(10) Was ist der maximale Definitionsbereich für $\exp_{(0,0,0)}$ und $\exp_{(1,0,1)}$?

(11) Berechnen Sie $d((0, 0, 0), (5, 0, 25))$. Zeigen Sie $\sqrt{2} < d((1, 0, 1), (0, 1, 1)) < \pi/2$.

(12) Berechnen Sie $[\phi\partial_r, \partial_\phi]$.

(13) Was sind die Christoffelsymbole zu g in den Koordinaten (r, ϕ) aus (2)?

(14) Berechnen Sie $g(R(\partial_r, \partial_\phi)\partial_\phi, \partial_r)$ und die Gaußkrümmung K in den Koordinaten (r, ϕ) aus (2). Was ist die Gaußkrümmung in $(0, 0, 0)$?

(15) Geben Sie eine (nichttriviale[1]) Wirkung $\Phi\colon S^1 \times M \to M$ von S^1 auf M an, so dass $\Phi(z, .)$ für alle $z \in S^1$ isometrisch ist. Ist diese Wirkung frei?

(16) Geben Sie eine möglichst große Teilmenge N von M an, so dass S^1 auf dieser Teilmenge N wirkt (mit ihrer Wirkung aus (15)) und N/S^1 eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Was ist die induzierte Metrik auf N/S^1, also die Metrik h auf dem Orbitraum für die $\pi^* h = g$ gilt, wobei $\pi\colon N \to N/S^1$ die Projektionsabbildung ist?

(17) Sei $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusion. Ist ι eine eigentliche Einbettung?

(18) Ist M orientierbar? Wenn ja, wählen Sie eine Orientierung und geben Sie die Volumenform dvol_g von (M, g) in den Koordinaten (r, ϕ) an bzgl. dieser Orientierung an.

(19) Sei $M_h := \{(x, y, z) \in M \mid z \leq h\}$. Berechnen Sie $\int_M K \mathrm{dvol}_g$ einmal direkt und einmal, in dem Sie Gauß-Bonnet für M_h benutzen und den Limes für $h \to \infty$ bilden.

(20) Geben Sie explizit die Zusammenhangsformen ω^r_ϕ, ω^ϕ_r, ω^r_r, ω^ϕ_ϕ bzgl. des orthonormalen Rahmen ∂_r, ∂_ϕ an und berechnen Sie explizit $d\omega^r_\phi$. Lesen Sie mit Hilfe der Strukturgleichung auch die Gaußkrümmung ab.

[1]D.h. $\Phi(z, p) = p$ für alle $p \in M$ und $z \in S^1$ zählt nicht.