Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 3

Übungsaufgabe 9 (Fleig/ Jeßberger)**.** Sei $\pi\colon E \to M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r mit lokalen Trivialisierungen $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Wir setzen $\pi'\colon E* := \sqcup_{x\in M} E_x^* \to M$, $L_x \in E_x^* \mapsto x \in M$ und

$$\begin{aligned}\phi'_\alpha\colon (\pi')^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{x\in U_\alpha} E_x^* &\to U_\alpha \times (\mathbb{R}^r)^* \\ L_x \in E_x^* &\mapsto \left(\pi'(L_x) = x, (v \in \mathbb{R}^r \mapsto L_x(\phi_\alpha^{-1}(x, v))\right).\end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie die Übergangsfunktionen für ϕ'_α bzgl. der Übergangsfunktionen für ϕ_α und zeigen Sie, dass diese die Kozykelbedingung erfüllen.

(ii) Betrachten Sie $E = TM$ mit den lokalen Trivialisierungen, die von einem Atlas von M kommen, vgl. Skript Abb. I.1. Wie sieht ein Vektorfeld in einer lokalen Trivialisierung aus und wie berechnet sich die lokalen Darstellung beim Übergang zu einer anderen lokalen Trivialisierung.

(iii) Bearbeiten Sie die analoge Aufgabe zu (ii) für das Kotangentialbündel T^*M.

Übungsaufgabe 10 (Beisitzer/Storch)**.** Sei M^m eine Mannigfaltigkeit. Seien $x = (x^1, \ldots, x^n)$ lokale Koordinaten auf $U \subset M$. Wir definieren $\beta^x(X_1, \ldots, X_n) := \det(X_j^i)$, wobei $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ und $X_j = X_j^i \partial_{x^i}$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass $\beta^x \in \Omega^m(U)$ gilt und finden Sie die lokale Darstellung von β^x in den Koordinaten $\{x^i\}$.

(ii) Seien $y = (y^1, \ldots, y^m)$ weitere lokale Koordinaten auf U. Zeigen Sie, dass

$$\beta^y = \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\beta^x$$

gilt.

(iii) Sei $\kappa_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ mit lokalen Koordinaten x_α^i ein orientierter Atlas von M und sei ρ_α eine untergeordnete Zerlegung der Eins zu $\{U_\alpha\}$. Zeigen Sie, dass dann $\sum_\alpha \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^m$ eine nirgends verschwindene m-Form auf ganz M definiert.

(iv) Sei (M, g) orientiert und die lokalen Koordinaten derart, dass ∂_{x^i} positiv orientiert ist. Zeigen Sie, dass $\gamma := \sqrt{|\det g_{ij}^x|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ für alle solchen lokalen Koordinaten das gleiche Element in $\Omega^m(U)$ definiert. Hierbei ist $g_{ij}^x(x) := g_x(\partial_{x^i}|_x, \partial_{x^j}|_x)$. Stimmt das auch noch, wenn man zusätzlich auch lokalen Koordinaten x zulässt, so dass ∂_{y^i} negativ orientiert ist?

Übungsaufgabe 11 (Amann/Grom)**.** Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Der Pullback einer Differentialform $\gamma \in \Omega^k(N)$ ist definiert durch

$$(F^*\gamma)_p(X_1(p), \ldots, X_k(p)) = \gamma_{F(p)}(d_pF(X_1(p)), \ldots, d_pF(X_k(p)))$$

für alle $p \in M$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$. Es ist also insbesondere $F^*\gamma \in \Omega^k(M)$.
Seien x^i lokale Koordinaten auf $U \subset M$ und y^i lokale Koordinaten auf $U' \subset F(U) \subset N$. Sei $F(x = (x^1, \ldots, x^m)) = (y^1 = F^1(x), \ldots y^n = F^n(x))$.
Rechnen Sie nach:

$$F^*(f_{i_1\ldots i_k} dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}) = (f_{i_1\ldots i_k} \circ F)\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial F^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

Übungsaufgabe 12 (Lenthe/Stappen)**.** Sei G eine Liegruppe, $v \in T_1 G$ und $L_h \colon G \to G$, $g \mapsto hg$.

(i) Zeigen Sie, dass $X_v(h \in G) := d_1 L_h(v)$ ein glattes Vektorfeld auf G definiert.[1]

(ii) Zeigen Sie, dass für ein Vektorfeld X auf G die Beziehung $d_g L_h(X(g))) = X(hg)$ für alle $g, h \in G$ genau dann gilt, wenn es ein Vektorfeld wie in (i) ist. Solche Vektorfelder nennen wir *linksinvariant* und die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder auf G bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ und nennen wir *Lie-Algebra der Liegruppe* G. Damit haben wir einen Vektorraumisomorphismus $T_1 G \cong \mathfrak{g}$

(iii) Sei $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Dann ist $T_{\mathrm{Id}_n} G = \mathrm{Matr}(n, \mathbb{R}) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Matr}(n, \mathbb{R})$ gilt: $X_A(h \in G) = hA$.

(iv) Betrachten Sie die Exponentialabbildung[2] $\exp \colon \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ und setze $\gamma(t) := \exp(tA)$ für $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\dot\gamma(t) = X_A(\gamma(t))$ und $\gamma(0) = \mathrm{Id}_n$ gilt.

---

[1] Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann glatt, wenn $X(f) \in C^\infty(M)$ für alle $f \in C^\infty(M)$ ist. Warum ist das so?

[2] Was hat das mit der Exponentialabbildung aus DiffgeoI zu tun? $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ besitzt eine spezielle Riemannsche Metrik (biinvariante Metrik). Die Exponentialabbildung zu dieser Metrik ist gleich der hier gegebenen.