Differentialgeometrie II Ksenia Fedosova, Nadine Große
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ WS 17/18

Übungsblatt 5

Übungsaufgabe 17 (Grom/Lenthe)**.** Die *Torsion* eines Zusammenhangs ∇ auf TM ist definiert durch $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Zeigen Sie, dass

(i) T ein $(1,2)$ schiefsymmetrischer Tensor ist, also $T \in \mathfrak{T}_1^2(M)$ mit $T(X,Y) = -T(Y,X)$ gilt. Was ist die lokale Darstellung von T?

(ii) für zwei Zusammenhänge ∇^1, ∇^2 mit der gleichen Torsion $\omega(X)(Y) = \omega(Y)(X)$ ist.

(iii) für ein $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, welches symmetrisch in den ersten zwei Komponenten ist, und ∇ ein Zusammenhang auf TM auch $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X,Y)$ einen Zusammenhang auf TM mit der gleichen Torsion, wie ∇ definiert.

Übungsaufgabe 18 (Stappen/Beisitzer)**.** Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit metrischem Zusammenhang ∇^E (bzgl. einer Bündelmetrik h^E). Auf E^* erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*}\omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass ∇^{E^*} bzgl. der Bündelmetrik h^{E^*} aus Lemma I.2.28 metrisch ist.

Übungsaufgabe 19 (Amann/Storch)**.** Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit affinem Zusammenhang ∇^E. Auf $\Lambda^k E*$ erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla_X^{E^*}\omega)(s) + \omega(\nabla_X^E s) \quad \text{und}$$
$$\nabla_X^{\Lambda^{k+\ell}E^*}(\alpha \wedge \beta) = \left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*}\alpha\right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla_X^{\Lambda^\ell E^*}\beta\right)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\nabla_X^{\Lambda^k E^*}\alpha\right)(s_1, \ldots, s_k) = X(\alpha(s_1, \ldots, s_k)) - \sum_{j=1}^k \alpha(s_1, \ldots, s_{j-1}, \nabla_X^E s_j, s_{j+1}, \ldots, s_k)$$

für alle $s_i \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

Übungsaufgabe 20 (Fleig/Jeßberger)**.** Sei $E \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇. Sei $\omega = (\omega_k^i) \in \Omega^1(U; \mathfrak{gl}(r,\mathbb{R}))$ die Zusammenhangsform von ∇ bzgl. eines Rahmen s_i auf U und $\Omega = (\Omega_k^i) \in \Omega^2(U; \mathfrak{gl}(r,\mathbb{R}))$ die zugehörige Krümmungsform von F auf U bzgl. dieses Rahmen s_i. Zeigen Sie, dass

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i$$

gilt.