
Übungsblatt 7

Übungsaufgabe 25 (Fleig/Stappen). Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der Torus. Wir betrachten die folgenden Wirkungen: Für $\delta \in \mathbb{R}$ sei

$$\Phi^\alpha: \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1, (n, e^{i\delta}) \mapsto e^{i(\delta + \alpha n)}.$$

Für $\gamma \in \mathbb{R}$ sei

$$\Psi^\gamma: \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2, (t, (e^{i\alpha}, e^{i\beta})) \mapsto (e^{i(\alpha+t)}, e^{i(\beta+t\gamma)}).$$

Untersuchen Sie diese Wirkungen auf die Eigenschaften: frei, eigentlich, transitiv. Gibt es eine Untergruppe von \mathbb{Z} bzw. \mathbb{R} deren induzierte Wirkung zum gleichen Orbitraum führt. Beschreiben Sie den Orbitraum möglichst genau (Hausdorffsch, Mannigfaltigkeit, ...?).

Übungsaufgabe 26 (Storch/ Beisitzer). Sei $p: N \rightarrow M$ ein Faserbündel mit diskreter Faser (= Überlagerung). Wann ist p ein Hauptfaserbündel? Finden Sie Kriterien (hinreichend und/oder notwendig?) in Termen der Fundamentalgruppen der involvierten Mannigfaltigkeiten.

Übungsaufgabe 27 (Lenthe/ Jeßberger). (i) Sei $(e^{i\alpha}, (z_1, z_2)) \in S^1 \times S^3 \mapsto (e^{-i\alpha} z_1, e^{-i\alpha} z_2) \in S^3$. Dann ist $S^3 \rightarrow S^3/S^1 \cong S^2$ ein S^1 -Hauptfaserbündel. Zeigen Sie, dass dieses Bündel zum Hopfbündel als Faserbündel isomorph ist, aber nicht als Hauptfaserbündel.

(ii) Manchmal findet man auch folgende Definition für Isomorphie von Hauptfaserbündeln: Seien G_i -Hauptfaserbündel $\pi_i: E_i \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ gegeben mit G_i -Wirkungen Ψ_i . Diese sind isomorph falls es Diffeomorphismen $f: E_1 \rightarrow E_2$, $\tilde{f}: M_1 \rightarrow M_2$ und einen Liegruppenisomorphismus $\lambda: G_1 \rightarrow G_2$ mit $\pi_2 \circ f = \tilde{f} \circ \pi_1$ und $f(\Psi_1(g, e)) = \Psi_2(\lambda(g), \tilde{f}(e))$ für alle $g \in G_1$ und $e \in E_1$. Stimmt diese Definition für den Fall $G_1 = G_2$ und $\tilde{f} = \text{id}_M$ mit unserer Definition I.3.6 überein?

Übungsaufgabe 28 (Ammann/ Grom). Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe, die auf M wirkt (o.B.d.A. eine Linkswirkung). Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:¹

- (i) Die Wirkung ist eigentlich.
- (ii) Ist (p_i) eine Folge in M und (g_i) eine in G , so dass sowohl p_i als auch $g_i \cdot p_i$ in M konvergieren, dann konvergiert auch eine Teilfolge der g_i in G .
- (iii) Für jedes Kompaktum $K \subset M$ ist die Menge $G_K := \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\} \subset G$ kompakt.

¹Daraus folgt dann auch direkt, dass Wirkungen kompakter Gruppen immer eigentlich sind.