Übungsblatt 10

Übungsaufgabe 37. [Grom/Jeßberger]

(i) Sei $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ gebildet aus dem E- und B-Feld $\vec{E}, \vec{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$, wie in Abschnitt **??**. Sei $A = (\phi, \vec{A})^\flat \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ mit $\phi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\vec{A} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass lokal genau dann $F = dA$ ist, wenn $\vec{E} = -\mathrm{grad}_{\vec{x}}\phi + \partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ ist.

(ii) (Elektrischer Monopol) Auf $\mathbb{R} \times \{V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^4$ betrachten wir $\vec{E}(t, \vec{x}) := \frac{q}{r^3}\vec{x}$, wobei $r = |\vec{x}|$ ist, und $\vec{B}(t, \vec{x}) = 0$. Rechnen Sie nach, dass $\vec{E} = -\mathrm{grad}_{\vec{x}}\phi$ für ein globales $\phi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ ist und dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die homogenen Maxwellgleichungen auf U erfüllt.

(iii) (Magnetischer Monopol) Auf $U := \mathbb{R} \times \{V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^4$ betrachten wir $\vec{B}(t, \vec{x}) := \frac{q}{r^3}\vec{x}$, wobei $r = |\vec{x}|$ ist, und $\vec{E}(t, \vec{x}) = 0$. Wieder sind die Maxwellgleichungen auf U erfüllt. Sei $U_\pm := \mathbb{R} \times \{V_\pm = \mathbb{R}^3 \setminus \{\pm z \geq 0\}\}$. Finden Sie $\vec{A}_\pm$ mit $\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}_\pm$ auf $U_\pm$. Zeigen Sie, dass sich $\vec{A}_+ - \vec{A}_- = \mathrm{grad}_{\vec{x}}\chi$ für ein $\chi\colon V_+ \cap V_- \to \mathbb{R}$ ist.
Wann gibt es dann ein S^1-Hauptfaserbündel über U mit glatter Übergangsfunktion $\mu_{+-}(t, \vec{x}) = e^{\mathrm{i}\chi(\vec{x})}$ zusammen mit einen Zusammenhang ω, der lokal gleich $\mathrm{i}A_\pm$ ist? Schränken Sie die zugehörige lokale Krümmungsform Ω auf die S^2 ein und integrieren diese über S^2. [1]

Übungsaufgabe 38. [Fleig/Lenthe] Wir betrachten das Hopfbündel $S^3 \to S^2$. Das ist ein $S^1 = U(1)$-Hauptfaserbündel und damit $\mathfrak{g} \cong \mathrm{i}\mathbb{R}$. Sei $p \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und $X = \mathrm{i} \in \mathfrak{g}$. Sei $\langle ., . \rangle$ das reelle Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Wir setzen $\omega_p(Y \in T_pS^3 \subset \mathbb{R}^4) := \mathrm{i}\langle Y, \mathrm{i}p\rangle$. Rechnen Sie nach, dass

(i) $\tilde{X}(p) = \mathrm{i}p$ und

(ii) $\omega \in \Omega^1(S^3, \mathrm{i}\mathbb{R})$ ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel ist.

Übungsaufgabe 39. [Storch/Amann] Wir identifizieren $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ – den Quaternionen und $SU(2)$ mit der symplektischen Gruppe $Sp(1) := \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ durch

$$\iota\colon x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in Sp(1) \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 - ix^4 \\ x^3 - ix^4 & x^1 - ix^2. \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Wir kürzen ab: $dx = dx^1 + idx^2 + jdx^3 + kdx^4$ und $d\bar{x} = dx^1 - idx^2 - jdx^3 - kdx^4$. Sei $P = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$ das triviale $SU(2)$-Hauptfaserbündel über $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$. Wir betrachten lokale Zusammenhangsformen A (und Krümmungsformen F) im folgenden immer bzgl. der kanonischen Trivialisierung von P – also ist $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2))$.

(i) Zeigen Sie, dass die Liealgebra von $Sp(1)$ gleich $\mathfrak{sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re} q = 0\}$ ist.

(ii) Wir setzen

$$A_{x \in \mathbb{H}} := \mathrm{Im}\left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2}\right).$$

Warum definiert A einen Zusammenhang auf P? Rechnen Sie nach, dass $*F = F$ für die zugehörige Krümmungsform gilt.

(iii) Für $\mu \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{H}$, setzen wir $\Phi_{\mu,b}(y \in \mathbb{H}) = \mu(y - b)$ und $A_{\mu,b} = \Phi^*_{\mu,b}A$. Berechnen Sie die zugehörige Krümmungsform und folgern Sie, dass auch $A_{\mu,b}$ einen selbstdualen Zusammenhang definiert.

[1] Dieses Integral ist bis auf eine universelle Konstante die erste Chernzahl des entsprechnden $U(1)$-Hauptfaserbündel über S^2. Diese Zahl ist eine topologische Invariante des Bündels und hängt nicht vom gewählten Zusammenhang ab.

(iv) Zeigen Sie, dass für verschiedene (μ, b) die lokalen Zusammenhangsformen $A_{\mu,b}$ nicht zu eichäquivalenten Zusammenhängen auf P gehören. (Hinweis: Benutzen Sie die Ad-Invarianz der Killingform auf $SU(2)$ und die Transformationsformel für (lokale) Krümmungsformen bei Wechsel der lokalen Trivialisierung bzw. Eichtransformationen.)

Übungsaufgabe 40. [Stappen/Beisitzer] Sei (M, g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\tilde{g} = f^2 g$ mit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine zu g konforme Metrik. Sei $*_g$ bzw. $*_{\tilde{g}}$ der zu g bzw. $\tilde{g}$ gehörige Hodge-Stern-Operator. Rechnen Sie die Wirkung von $\tilde{g}$ in die von $\tilde{g}$ um. Folgern Sie damit, dass eine Lösung der Yang-Mills-Gleichung eines Hauptfaserbündels P über (M, g) auch eine Lösung auf P über $(M, \tilde{g})$ ist.